

THE UKRAINIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
THE INSTITUTE OF ELECTRODYNAMICS

**Yu. M. VASETSKY**

**THREE-DIMENSIONAL QUASI-STATIONARY  
ELECTROMAGNETIC FIELD OF THE  
CURRENT NEAR CONDUCTING BODY**

Kyiv  
2019

This book is devoted to the further development of the theory for solving of a certain class of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field problems. The electromagnetic systems under examination include the contour of arbitrary spatial configuration with sinusoidal and pulse current located near conducting magnetizing half-space with induced eddy currents. The exact analytical solution is obtained without restrictions on the contour configuration, electrophysical properties of media and field frequency. For the strong skin effect the approximate solution in the form of expansion into an asymptotic series is also found. The general properties of field formation are revealed (the current density component perpendicular to the interface between the media is equal to zero; the more quick attenuation of inhomogeneous field in conducting medium in comparison with homogeneous field). The concept of a strong skin effect is expanded. The skin effect is considered to be strong, when the depth of field penetration is small compared to not only the characteristic dimensions of the conductive body, but also with the minimum distance from the field sources to the interface. The approximate impedance boundary condition is generalized to the interaction of inhomogeneous field with conductive medium.

The book is intended for the researchers, postgraduate students and students specialized in theory and calculations of electromagnetic fields.

**Reviewers:**

V.F. Reztsov, Corresponding Member, the Ukrainian National Academy of Sciences

A.D. Podoltsev, Doctor of Engineering Science

**ISBN 978-617-7457-84-7**

© Yu. M. Vasetsky, 2019

© The Institute of Electrodynamics, 2019

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

**Ю.М. ВАСЕЦКИЙ**

**ТРЕХМЕРНОЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА,  
ПРОТЕКАЮЩЕГО ВБЛИЗИ  
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА**

Киев

2019

УДК 537.8; 621.3.01

В монографии представлены основные положения теории решения определенного класса задач трехмерного электромагнитного поля. Рассматриваются системы с синусоидальным и импульсным токами, протекающими по контуру произвольной пространственной конфигурации вблизи электропроводного намагничивающегося тела с плоской поверхностью, в котором индуцируются вихревые токи. Получено точное аналитическое решение и разложение в асимптотический ряд. Установлены общие свойства формирования поля: равенство нулю перпендикулярной к поверхности раздела сред компоненты плотности тока; более быстрое затухание в электропроводной среде неоднородного поля по сравнению с однородным. Расширено понятие сильного скин-эффекта. Приближенное импедансное граничное условие обобщено на взаимодействие неоднородного поля с электропроводной средой.

Для специалистов в области теории и методов расчета электромагнитных полей, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

У монографії представлено основні положення теорії рішення певного класу задач тривимірного електромагнітного поля. Розглянуто системи з синусоїдальним та імпульсним струмами, що протікають по контуру довільної просторової конфігурації поблизу електропровідного тіла з плоскою поверхнею, в якому індуються вихрові струми. Отримано точний аналітичний розв'язок і розкладання в асимптотичний ряд. Встановлено загальні властивості формування поля: нульове значення перпендикулярної до поверхні поділу середовищ компоненти густини струму; більш швидке згасання в електропровідному середовищі неоднорідного поля порівняно з однорідним. Розширено поняття сильного скин-ефекту. Наближену імпедансну граничну умову узагальнено на взаємодію неоднорідного поля з електропровідним середовищем.

Для фахівців у галузі теорії і методів розрахунку електромагнітних полів, аспірантів і студентів відповідних спеціальностей.

***Рецензенты:***

член-корреспондент НАН Украины *В.Ф.Резцов*  
доктор технических наук *А.Д.Подольцев*

Утверждено к печати ученым советом Института электродинамики НАН Украины (протокол № 6 от 06.06. 2019)

**ISBN 978-617-7457-84-7**

© Ю.М. Васецкий, 2019

© Институт электродинамики, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>9</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>13</b>

<b>ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНТУРА ТОКА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.....</b>	<b>17</b>
--	-----------

1.1. Общее решение волновой задачи .....	20
1.1.1. Постановка задачи и основные уравнения .....	20
1.1.2. Общее решение волновой задачи для контура с переменным током в виде системы излучающих токовых диполей .....	24
1.2. Квазистационарное электромагнитное поле произвольного контура с переменным током: пренебрежение токами смещения во всем пространстве.....	31
1.2.1. Формулировка задачи сопряжения для электромагнитного поля гармонического тока произвольного контура.....	31
1.2.2. Трехмерное квазистационарное магнитное поле в диэлектрическом полупространстве .....	35
1.2.3. Электромагнитное поле в электропроводной среде.....	39
1.3. Особенности формирования трехмерного квазистационарного электромагнитного поля в системе «произвольный пространственный контур с током – электропроводное полупространство».....	43
1.3.1. Основная особенность распределения трехмерного электромагнитного поля в электропроводном полупространстве .....	43
1.3.2. Источники поля и условия на границе раздела сред.....	52

## Содержание

1.4. Трехмерное квазистационарное электромагнитное поле произвольного контура: учет токов смещения в диэлектрической среде .....	60
1.5. Выводы к главе 1 .....	66

## **ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ .....**

**68**

2.1. Электромагнитное поле пространственного контура с током над плоской поверхностью проводящего тела с идеальным скин-эффектом .....	69
2.2. Метод асимптотического разложения в задаче расчета трехмерного квазистационарного электромагнитного поля .....	79
2.2.1. Разложение в асимптотический ряд функции $\dot{G}_e$ .....	80
2.2.2. Решение в виде разложения в асимптотический ряд для трехмерного квазистационарного электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве .....	87
2.2.3. Оценка погрешности разложения в асимптотический ряд .....	91
2.2.4. Выбор числа членов асимптотического ряда .....	96
2.3. Математическая модель локально двумерного электромагнитного поля вблизи контура с током .....	105
2.4. Выводы к главе 2 .....	118

## **ГЛАВА 3. ЗАТУХАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА КОНТУРА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ .....**

**120**

3.1. Общая особенность затухания неоднородного электромагнитного поля в электропроводном полупространстве .....	123
3.2. Затухание неоднородного электромагнитного поля при глубине проникновения, малой по сравнению с характерными размерами контура .....	128

3.3. Напряженности электрического и магнитного полей на границе раздела диэлектрической и электропроводной сред. Импедансное граничное условие. ....	132
3.4. Затухание электромагнитного поля: учет неоднородности поля .....	139
3.5. Выводы к главе 3.....	144

**ГЛАВА 4. ТРЕХМЕРНОЕ ИМПУЛЬСНОЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА,  
ПРОТЕКАЮЩЕГО ВБЛИЗИ  
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.....146**

4.1. Общее аналитическое решение для трехмерного импульсного электромагнитного поля тока контура произвольной конфигурации.....	147
4.2. Метод асимптотического разложения для импульсного трехмерного квазистационарного поля.....	151
4.2.1. Решение для импульсного электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве в виде асимптотического ряда.....	151
4.2.2. Граничные значения частоты и моментов времени в методе разложения в асимптотический ряд импульсного электромагнитного поля.....	158
4.2.3. Интегральные показатели для учета ограничений по частоте и времени импульсов тока .....	166
4.2.4. Учет ограниченных промежутков времени для импульса тока .....	168
4.3. Разложение в асимптотический ряд для стандартных импульсов тока .....	171
4.3.1. Импульс тока, затухающий по экспоненциальному закону.....	172
4.3.2. Импульс тока, представленный разностью двух затухающих экспонент .....	176
4.3.3. Затухающий колебательный импульс тока .....	180

## Содержание

4.4. Примеры использования метода асимптотического разложения для определения импульсного электромагнитного поля .....	183
4.4.1. Сравнение результатов расчета подынтегральной функции в контурных интегралах.....	184
4.4.2. Сравнение точного и приближенного методов расчета поля для системы с контурами тока .....	191
4.4.3. Пример расчета трехмерного электромагнитного поля с контурами импульсного тока.....	195
4.5. Выводы к главе 4.....	202
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>205</b>



## INTRODUCTION

The book is devoted to the solution of one general problem of the theory of a three-dimensional quasistationary electromagnetic field. A feature, unlike many well-known works, is that the studies are based on the received exact analytical solution of the problem for the field, generated by arbitrary spatial current contour near the conducting body with plane surface. The solution for the vector and scalar potentials, electric and magnetic intensities in the dielectric and conducting media is found, without restrictions on the contours configuration, properties of the media and field frequency.

The presence of an exact solution, in addition to the advantage associated with the validity of the results, allows to obtain a number of consequences that are true for an arbitrary field in the system under consideration. These include, in particular, the conclusion that the field of the electric charge distributed on the interface is completely compensates for the normal component of the induced external electric field. As a result, the eddy current flow lines in conductive medium lie in planes parallel to the boundary surface, i.e., the components of the density current and electric field intensity perpendicular to the surface have zero value in the entire half-space. The surface charge density and the vertical component of electric intensity on the interface of media are determined in dielectric medium only by the normal component of induced electric intensity created initial current system. Another consequence of the exact solution is the conclusion that in conductive medium the rate of the inhomogeneous field reduction is always more than the rate of the uniform one.

An exact analytical solution also provides a certain set of exactly solvable particular problems that can serve as a standard of comparison when developing other methods for calculating

## Introduction

---

systems of more complex geometry, where obtaining analytical solutions is impossible.

An integral part of the theoretical study in the book is the development of the method of expansion in asymptotic series for potentials and vector fields. The expansion in asymptotic series is carried out by a small parameter that proportional to the ratio of the field penetration depth to the distance between the source and observation point. This means that the asymptotic method is valid in the case of a strong skin effect, however, in its extended interpretation. The skin effect is considered to be strong, when the depth of field penetration is small compared to not only the characteristic dimensions of the conductive body, but also with the minimum distance from the field sources to the interface.

Despite the limitations associated with the presence of small parameter, an approximate solution in the form of asymptotic series makes it possible to analyze the influence of the nonuniformity of the external electromagnetic field at its interaction with the conductive medium. The analysis made it possible to find expressions for the components tangent to the surface for electric and magnetic fields intensity as functions of the external field of the sources. In contrast to commonly used models, expressions, in addition to the local value of vector fields contain their derivatives with respect to a coordinate perpendicular to the interface, thereby determining the influence of field nonuniformity near the surface.

The expressions in the asymptotic approximation made it possible to generalize the Leontovich approximate impedance boundary condition to the case of the penetration of nonuniform electromagnetic field into conductive medium. The classical relation between the electric and magnetic field intensities is accurate to terms containing the introduced small parameter in the first degree. With the same accuracy, the law of uniform electromagnetic field reduction used in many studies is valid to describe the nonuniform field reduction.

The obtained exact solution of the three-dimensional problem allows using it to develop simpler approximate mathematical models. In this case, approximate models are based on valid assumptions. It is also possible to determine the actual error of approximate models. In some cases, approximate models make it possible to obtain a clear physical idea of the ongoing electromagnetic processes. Finally, when performing calculations using approximate models, the required amount of calculations is reduced. Reducing the volume of calculations for approximate analytical models, which is much more difficult to achieve with the use of widespread numerical methods, becomes most relevant in solving inverse problems of field theory and optimization of electromagnetic systems.

Simplification of calculations using expansion into an asymptotic series is achieved, first of all, by replacing improper integrals from special functions with limited series, where each term is found by calculating only a one-dimensional contour integral, the determination of which is not difficult. The analysis of the calculation error when replacing exact expressions with approximate ones showed that for sinusoidal fields, the necessary accuracy is achieved using only the first few members of the series, the number of which depends on the value of small parameter. For pulsed fields, the calculation is limited to a certain period from the beginning of the current pulse, and the closer to the initial moment of time, the more accurately the electromagnetic field is calculated. Since the current pulse usually changes most rapidly and reaches its highest values over a relatively short period, at this most important stage the electromagnetic field is determined.

The use of developed methods and calculation results in solving specific problems were not the purpose of this study. These questions are partially reflected in the collective monograph and in separate articles, references to which are given in the text. In these works, in particular, studies were performed to solve the inverse problems of finding the geometry of

## Introduction

---

electromagnetic systems in the field of induction heating of metal products with their formulation as parametric optimization problems in a certain class of configurations of spatial contours with current.

The author gratefully acknowledges Prof. Yu.P. Emets, who was the initiator of research on scientific topics, which was reflected in the book. I want to express my sincere gratitude to all the colleagues of the Institute of Electrodynamics of the NAS of Ukraine, whose efforts have developed this area. The author is grateful to Ph.D. I.L. Mazurenko for cooperation and assistance in preparing the book for publication, and considers it his pleasant duty to thank the Corresponding Member of the NAS of Ukraine V.F. Reztsov and Doctor of Engineering Sciences A.D. Podoltsev for reviewing the book.

## ВВЕДЕНИЕ

Монография посвящена решению одной достаточно общей задачи теории трехмерного квазистационарного электромагнитного поля. Ее особенностью, в отличие от многих известных работ, является то, что исследования основываются на полученном точном аналитическом решении задачи для электромагнитного поля, создаваемого произвольным пространственным контуром с током, расположенном вблизи электропроводного намагничивающегося тела с плоской поверхностью, в котором индуцируются вихревые токи. Решение с учетом замкнутости контуров найдено в виде квадратур для векторного и скалярного потенциалов, напряженностей магнитного и электрического полей в диэлектрической и электропроводной средах без ограничений на геометрию контуров, свойства среды и частоту поля.

Наличие точного решения, помимо несомненного преимущества, связанного с обоснованностью найденных результатов, позволяет получить ряд следствий, справедливых для произвольного поля в рассматриваемой системе. К ним, в частности, относится вывод о полной компенсации полем электрического заряда, распределенного на поверхности раздела сред, нормальной к этой поверхности компоненты индуцированного внешнего электрического поля. Как следствие, линии протекания вихревых токов в электропроводной среде лежат в плоскостях, параллельных граничной поверхности, то есть компоненты плотности тока и напряженности электрического поля, перпендикулярные к поверхности, имеют нулевое значение во всем полупространстве. Результатом этого является также граничное условие для нормальной компоненты напряженности электрического поля в диэлектрической среде, которое полностью определяется известным полем внешних источников.

Другое следствие точного решения – вывод о том, что неоднородное электромагнитное поле при проникновении в

## Введение

электропроводное полупространство затухает с глубиной всегда быстрее, чем однородное поле.

Из общего аналитического решения можно получить также определенный набор точно решаемых частных задач, которые могут служить эталоном сравнения при разработке других методов для расчета систем более сложной геометрии, где получение аналитических решений невозможно.

Неотъемлемой частью теоретического исследования в монографии является развитие метода разложения потенциалов и векторных полей в асимптотические ряды. Разложение проводится по малому параметру, пропорциональному отношению глубины проникновения поля к расстоянию между точками истока и наблюдения. Это означает, что метод асимптотического разложения справедлив в случае сильного скин-эффекта, однако в расширенной его трактовке. Сильным считается скин-эффект, при котором глубина проникновения поля является малой величиной по сравнению не только с характерными размерами электропроводного тела, но и с минимальным расстоянием от источников поля до поверхности раздела сред.

Несмотря на ограничения, связанные с наличием малого параметра, приближенное решение в виде асимптотического разложения дает возможность анализировать влияние неоднородности внешнего электромагнитного поля при его взаимодействии с электропроводной средой. Проведенный анализ позволил найти выражения для касательных к поверхности компонент напряженностей электрического и магнитного полей как функций внешнего поля источников. Выражения, в отличие от обычно используемых моделей, помимо локального значения векторных полей содержат их производные по координате, перпендикулярной к поверхности раздела сред, определяя тем самым влияние неоднородности поля у поверхности.

Найденные в асимптотическом приближении выражения позволили обобщить приближенное импедансное граничное условие Леонтовича на случай проникновения в электропроводную среду неоднородного электромагнитного поля. Классическое соотношение между напряженностями электрического и магнитного полей выполняется с точностью до членов, содержащих введенный малый параметр в первой степени. С такой же точностью справедлив используемый во многих исследованиях закон затухания однородного электромагнитного поля для описания затухания неоднородного поля.

Полученное точное решение трехмерной задачи позволяет использовать его для разработки более простых приближенных математических моделей. Эти модели создаются на основе обоснованных допущений, в связи с чем появляется возможность определить их действительную погрешность. В ряде случаев приближенные модели позволяют получить наглядное физическое представление о протекающих электромагнитных процессах. Наконец, такие модели являются более экономичными с точки зрения необходимого объема вычислений. Уменьшение объема вычислений, которого значительно труднее достигнуть при использовании широко распространенных численных методов расчета, становится наиболее актуальным при решении обратных задач теории поля и оптимизации электромагнитных систем.

Упрощение расчетов с применением разложения в асимптотический ряд достигается, в первую очередь, в результате замены несобственных интегралов от специальных функций ограниченными рядами, где каждый член находится вычислением лишь одномерного контурного интеграла, определение которого не вызывает затруднений. Анализ погрешности расчета при замене точных выражений приближенными показал, что для синусоидально изменяющихся во времени полей необходимая точность

## Введение

достигается с использованием лишь нескольких первых членов ряда, число которых зависит от величины малого параметра. Для импульсных полей расчет ограничен определенным промежутком времени от начала действия импульса тока, причем, чем ближе к начальному моменту времени, тем более точно рассчитывается электромагнитное поле. Так как обычно импульс тока изменяется наиболее быстро и достигает наибольших значений на протяжении относительно малого промежутка времени, то именно на этом наиболее важном этапе и определяется электромагнитное поле.

Использование развитых методов и результаты расчета при решении конкретных задач не являлись целью настоящего исследования. Эти вопросы частично отражены в коллективной монографии и в отдельных статьях, ссылки на которые приводятся в тексте. В этих работах, в частности, выполнены исследования по решению обратных задач нахождения геометрии электромагнитных систем в области индукционного нагрева металлических изделий с их формулировкой как задач параметрической оптимизации в определенном классе конфигураций пространственных контуров с током.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Ю.П.Емцу – инициатору исследований научной тематики, которая нашла отражение в книге. Выражает искреннюю признательность и благодарность всем сотрудникам Института электродинамики НАН Украины, усилиями которых развивалось данное направление. Автор благодарен к.т.н. И.Л. Мазуренко за сотрудничество и помощь при подготовке рукописи к изданию, а также считает своим приятным долгом поблагодарить члена-корреспондента НАН Украины В.Ф. Резцова и доктора технических наук А.Д. Подольцева за рецензирование работы.



## **ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНТУРА ТОКА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Основная направленность исследований в главе связана с полным аналитическим решением трехмерной квазистационарной задачи, которая формулируется в достаточно общей постановке нахождения электромагнитного поля произвольного пространственного контура с переменным током, расположенного над проводящим намагничивающимся полупространством, в котором индуцируются вихревые токи. Еще одной важной с теоретической точки зрения задачей является определение на основе полученного точного аналитического решения общих закономерностей формирования поля в рассматриваемой системе.

Подчеркнем, что в работе развиваются аналитические методы решения задач, которые, несмотря на повсеместное успешное применение численных методов расчета, позволяют получить результаты для достаточно широкого круга объектов, где эффективными остаются специализированные аналитические или численно-аналитические методы. К таким объектам относятся, в частности, системы, геометрические особенности которых характеризуются разным изменением поля в пространстве – быстрым изменением вблизи элементов с током или вблизи границы раздела сред и значительно более медленным в другой части пространства, существенно большего объема [1].

Аргументом в пользу аналитических методов является также возможность получения общих особенностей протекания физических процессов, установить которые, а тем более обосновать их общий характер на основе численного решения большого числа конкретных задач, затруднительно.

Поставленная задача рассматривалась во многих работах, в том числе и общетеоретического характера, в которых, тем не менее, накладывались ограничения на геометрию системы или на электрофизические свойства электропроводной среды. Например, в работе [2] решение найдено только для источников поля в виде плоского токового контура, расположенного параллельного границе раздела сред. В работе [3], наоборот, решалась задача о проводнике, лежащем в плоскости, перпендикулярной границе раздела сред. В этой главе развиваются теория и аналитические методы расчета трехмерного электромагнитного поля в общей постановке, где первичное поле создается переменным током, протекающим по контуру пространственной конфигурации, произвольным образом ориентированному относительно границы раздела сред, а в электропроводном теле учитываются возникающие вихревые токи. При этом не накладываются ограничения на геометрию контура, частоту поля, электрофизические свойства среды. В такой постановке задача охватывает полученные ранее результаты, которые в отдельности имеют ограничения по определенным характеристикам, и позволяет установить некоторые общие закономерности формирования электромагнитного поля.

Будем рассматривать произвольный контур в неэлектропроводной немагнитной среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_e$ , по которому протекает ток  $I_0(t)$ . Контур расположен вблизи электропроводного тела с плоской границей, обладающего электропроводностью

$\gamma$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ . На рис. 1.1 исходный контур с током показан сплошной кривой в верхнем полупространстве  $z > 0$ ; точками  $M$  и  $Q$  отмечены соответственно точка истока поля на контуре с током и точка наблюдения, в которой определяется величина электромагнитного поля. Элемент контура длиной  $dl$  представлен в виде направленного элементарного отрезка  $\mathbf{t}_M dl$ , где  $\mathbf{t}_M$  – единичный касательный вектор к контуру в точке  $M$ . Ось  $z$  ориентирована перпендикулярно границе раздела сред в вертикальном направлении.

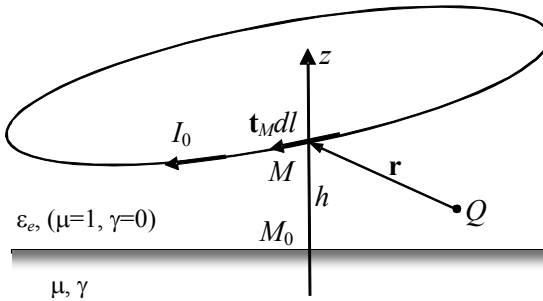


Рис. 1.1. Расчетная модель

Считается, что размеры контура значительно меньше, чем размеры плоского участка поверхности тела, что позволяет использовать модель контура с током над электропроводным полупространством. Рассматривается линейная задача в кусочно-однородной среде, свойства которой изменяются скачком при переходе из нижнего в верхнее полупространство. Так как конечным результатом является получение аналитического решения квазистационарной задачи, для которой плотность тока удовлетворяет условию непрерывности  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , то необходимо рассматривать замкнутый контур с неизменным вдоль него током  $I_0(t)$ .

## 1.1. Общее решение волновой задачи

В [4] отмечается, что рассматриваемый класс электромагнитных полей может описываться как с помощью уравнений квазистационарного поля, так и на основе общих волновых уравнений. В последнем случае переход к квазистационарной постановке выполняется на основе полученного решения волновой задачи. Именно такой подход применяется в данной главе, что связано со следующими двумя обстоятельствами. Во-первых, для получения решения квазистационарной задачи используется известное решение волновой задачи [5], в которой поле контура с током рассматривается как суперпозиция полей системы токовых диполей. Во-вторых, наличие напряженности электрического поля в диэлектрической среде обуславливает протекания в ней соответствующих токов смещения. В квазистационарной постановке обычно пренебрегают токами смещения во всем пространстве. Однако так как токи проводимости в диэлектрической среде отсутствуют, то при такой постановке сравниваются токи в разных средах, что требует соответствующего обоснования. Данный вопрос рассматривается на основе точного решения трехмерной квазистационарной задачи.

### 1.1.1. Постановка задачи и основные уравнения

Задача об электромагнитном поле излучающего токового диполя была поставлена в середине прошлого века в работах Г. Гринберга [6], А. Зоммерфельда [7] и других авторов. Дальнейшее развитие в общей постановке для диполя, произвольно расположенного относительно границы раздела сред, задача получила в работе О. Тозони [5] посвященной исследованию СВЧ устройств, где необходимо было учитывать геометрическую конфигурацию токоведущих контуров, электрофизические и геометрические

свойства подложки для полосковых линий и другие факторы. Контуры с током без ограничения общности представлялись последовательной системой токовых диполей. Привлекательность рассматриваемой модели заключается в возможности получения аналитического решения задачи.

Сформулируем задачу для комплексных амплитуд электромагнитного поля, не ограничивая вначале размеры контура с током. В волновой постановке проблема сводится к решению задачи, которая описывается уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля: напряженностей электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, векторов индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  и электрического смещения  $\mathbf{D}$ , полного тока  $\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_t = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j} + \mathbf{j}_D$ , который складывается из плотности тока сторонних источников в элементах контура  $\mathbf{j}_0$ , плотности тока проводимости  $\mathbf{j}$  и плотности тока смещения  $\mathbf{j}_D = i\omega\mathbf{D}$ :

$$\begin{cases} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_t; & \text{div } \dot{\mathbf{B}} = 0; \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -i\omega\dot{\mathbf{B}}; & \text{div } \dot{\mathbf{D}} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\omega$  – циклическая частота,  $i$  – мнимая единица. Для линейной задачи свободный заряд в кусочно-однородной среде может быть сосредоточен только на поверхности раздела сред с соответствующей поверхностной плотностью  $\sigma$ , поэтому в последнем из уравнений (1.1), которые описывают поле вне граничной поверхности, заряд опущен.

Используя комплексную электропроводность  $\tilde{\gamma} = \gamma + i\omega\varepsilon\varepsilon_0$ , материальные уравнения, дополняющие (1.1), записываются в виде

$$\begin{aligned} z > 0: & \quad \mathbf{j}_{te} = \mathbf{j}_e = \tilde{\gamma}_e \dot{\mathbf{E}}_e, \quad \dot{\mathbf{D}}_e = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_e \dot{\mathbf{E}}_e, \quad \dot{\mathbf{B}}_e = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_e, \\ z < 0: & \quad \mathbf{j}_{ti} = \mathbf{j}_i = \tilde{\gamma}_i \dot{\mathbf{E}}_i, \quad \dot{\mathbf{D}}_i = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}_i \dot{\mathbf{E}}_i, \quad \dot{\mathbf{B}}_i = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индексами “ $e$ ” и “ $i$ ” отмечены величины в областях  $z > 0$  и  $z < 0$  соответственно. Комплексная

## Глава 1

электропроводность в разных областях принимает конкретные значения:  $\tilde{\gamma}_e = i\omega\varepsilon_e\varepsilon_0$ ,  $\tilde{\gamma}_i = \gamma$ , комплексная относительная диэлектрическая проницаемость связана с комплексной проводимостью соотношением  $\tilde{\gamma} = i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}$  [8].

Введением векторного  $\dot{\mathbf{A}}$  и скалярного  $\dot{\phi}$  потенциалов

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } \dot{\phi} - i\omega\dot{\mathbf{A}}, \quad (1.3)$$

а также калибровки Лоренца

$$i\omega \text{div } \dot{\mathbf{A}} - k^2\dot{\phi} = 0, \quad (1.4)$$

где  $k^2 = -i\omega\mu_0\tilde{\gamma}$  – волновой параметр, из уравнений Максвелла (1.1) получают уравнения для потенциалов:

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \Delta\dot{\mathbf{A}}_e + k_e^2\dot{\mathbf{A}}_e &= -\mu_0\dot{\mathbf{j}}_0, & \Delta\dot{\phi}_e + k_e^2\dot{\phi}_e &= 0, \\ z < 0: \quad \Delta\dot{\mathbf{A}}_i + k_i^2\dot{\mathbf{A}}_i &= 0, & \Delta\dot{\phi}_i + k_e^2\dot{\phi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В предположении, что проводник является бесконечно тонким, плотность тока  $\dot{\mathbf{j}}_0$  в (1.5) записывают с использованием импульсной функции Дирака

$$\dot{\mathbf{j}}_0 = \dot{I}_0\delta(\mathbf{r}_M - \mathbf{r})\mathbf{t}_M. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5) записаны и для векторного, и для скалярного потенциалов. Однако, поскольку для волновой задачи всегда  $k^2 \neq 0$ , то, как следует из (1.4), достаточно знать только векторный потенциал. Наоборот, в квазистационарной постановке при пренебрежении токами смещения в диэлектрической среде, т.е. при  $\kappa_e^2 = 0$ , распределение векторного потенциала для нахождения электромагнитного поля недостаточно, задача должна быть дополнена соотношениями, которые определяют также и скалярный потенциал.

Задача сопряжения помимо дифференциальных уравнений (1.5) должна содержать условия для тангенциальных и нормальных составляющих векторных

полей на границе раздела сред: равенства тангенциальных составляющих напряженностей магнитного и электрического полей, условие равенства нормальных составляющих индукции магнитного поля [5, 8], а также равенства нормальных составляющих вектора плотности тока:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0, \quad \mathbf{e}_z \times (\dot{\mathbf{H}}^+ - \dot{\mathbf{H}}^-) = \mathbf{j}_S, \\ \mathbf{e}_z \cdot (\dot{\mathbf{B}}^+ - \dot{\mathbf{B}}^-) = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot (\dot{\mathbf{j}}_t^+ - \dot{\mathbf{j}}_t^-) = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{j}_S$  – поверхностная плотность тока.

Относительно последнего условия в (1.7), которое следует из закона полного тока, необходимо указать, что обычно вместо него используется граничное условие для нормальных компонент вектора электрического смещения  $\mathbf{e}_z \cdot (\dot{\mathbf{D}}^+ - \dot{\mathbf{D}}^-) = 0$ , что является непосредственным следствием электростатической теоремы Гаусса. В данном случае равенство нормальных компонент вектора электрического смещения обусловлено учетом в материальных уравнениях (1.2) как токов проводимости, так и токов смещения, введением комплексных проводимости и относительной диэлектрической проницаемости, а также отсутствием свободного поверхностного заряда, обусловленного другими физическими явлениями. Оба граничных условия являются равнозначными, а использование граничного условия для плотности тока, а не для вектора электрического смещения связано с анализом электромагнитных процессов в системе с электропроводной средой, хотя это и не принципиально.

Электромагнитное поле на бесконечности затухает, поэтому задачу решают при условии равенства нулю векторного потенциала в бесконечно удаленных точках:

$$\dot{A}(\infty) = 0. \quad (1.8)$$

Решению подлежат уравнения поля для векторного потенциала в (1.5). При этом и граничные условия должны быть переписаны для  $\mathbf{A}_e$  и  $\mathbf{A}_i$ . В этом случае необходимо

воспользоваться соотношениями(1.3) и (1.4), связывающими векторы поля  $\dot{\mathbf{B}}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}$ ,  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{D}}$  с векторным потенциалом.

### 1.1.2.Общее решение волновой задачи для контура с переменным током в виде системы излучающих токовых диполей

Следуя [5, 9], электромагнитное поле контура с переменным током конечных размеров будем, определять как суперпозицию полей элементарных токовых диполей  $\mathbf{t}_M dl$  (рис. 1.1), распределенных вдоль контура. Для этого вначале приведем решение задачи нахождения поля уединенного токового диполя, расположенного над плоской границей раздела сред с различными электрофизическими свойствами, подробно представленное в [5]. Для получения поля всего контура решение достаточно представить в виде контурного интеграла от найденных выражений для поля диполя. Несмотря на то, что решение задачи изложено в литературе, здесь с целью последовательного изложения материала даются основные положения по нахождению аналитического решения.

Уравнения для потенциалов (1.5) и граничные условия (1.7), (1.8) для поля токового диполя остаются прежними с тем отличием, что в качестве источника  $\mathbf{j}_0$  выступает элемент тока  $\dot{I}_0 \delta(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) \mathbf{t}_M dl$  (рис. 1.2). Рассматривается произвольная ориентация элемента тока относительно плоской поверхности раздела сред. В этом случае единичный вектор может быть представлен суммой двух проекций  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\perp + \mathbf{t}_\parallel$ , где  $\mathbf{t}_\perp$  – проекция на вертикальную ось,  $\mathbf{t}_\parallel$  – проекция на поверхность раздела сред.



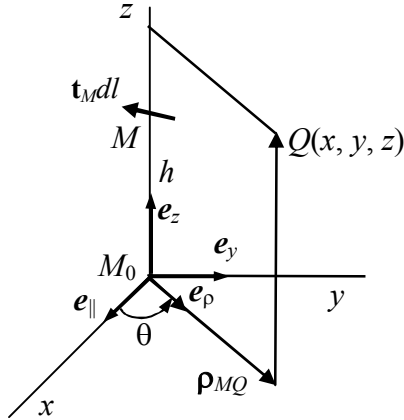


Рис. 1.2. Токовый диполь

Используем локальную систему координат, связанную с элементом тока следующим образом. Центр системы координат (точка  $M_0$ ) расположен на поверхности раздела сред, вертикальная ось проходит через точку источника  $M(0,0,h)$ , ось  $x$  выбрана в направлении проекции  $\mathbf{t}_{\parallel}$  касательной на поверхность раздела сред и характеризуется единичным вектором  $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{t}_{\parallel} / |\mathbf{t}_{\parallel}|$ . Помимо локальной декартовой системы координат будем использовать и локальную цилиндрическую систему с координатами  $\rho, \theta, z$ , показанными на рис. 1.2.

Решение сформулированной волновой задачи удалось найти в [5], осуществив двумерное преобразование Фурье по координатам. Формула прямого преобразования Фурье функции двух переменных  $f(x, y)$  по координатам имеет вид

$$f^*(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy, \quad (1.9)$$

где  $i$  – мнимая единица для данного преобразования.

При этом дифференцированию по координатам  $x$  и  $y$  функций-оригиналов соответствует умножение их изображений  $f^*(\xi, \eta)$  на операторы  $i\xi$  и  $i\eta$  соответственно. Кроме того, изображение  $\delta$ - функции равно постоянной величине  $1/2\pi$ . Учитывая эти обстоятельства, после применения к уравнениям (1.5) интегрального преобразования (1.9) вместо трехмерных уравнений в оригиналах получают уже одномерные уравнения для изображений векторного потенциала

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \frac{d^2 \dot{\mathbf{A}}_e^*}{dz^2} - q_e^2 \dot{\mathbf{A}}_e^* &= -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \delta(z-h) \mathbf{t}_M dl, \\ z < 0: \quad \frac{d^2 \dot{\mathbf{A}}_i^*}{dz^2} - q_i^2 \dot{\mathbf{A}}_i^* &= 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $q^2 = \xi^2 + \eta^2 - k^2$ ,  $h = z_M$  – вертикальная координата точки расположения токового диполя. Помимо координат  $\xi$  и  $\eta$  будем использовать преобразованные полярные координаты  $\vartheta$  и  $\psi$ , для которых  $\xi = \vartheta \cos \psi$ ,  $\eta = \vartheta \sin \psi$ . При этом величины, входящие в (1.10), принимают вид:

$$q_e^2 = \vartheta^2 - k_e^2, \quad q_i^2 = \vartheta^2 - k_i^2. \quad (1.11)$$

Сформулируем задачу нахождения решения для изображений векторного потенциала отдельно для горизонтальной  $\mathbf{t}_{\parallel} dl$  и вертикальной  $\mathbf{t}_{\perp} dl$  компонент токового диполя. Для каждой компоненты задача формулируется в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка для изображений векторного потенциала и граничных условий, выраженных через изображения векторного потенциала, а также условия затухания поля на бесконечности

$$\dot{\mathbf{A}}_e^*(z \rightarrow \infty) = \dot{\mathbf{A}}_i^*(z \rightarrow -\infty) = 0. \quad (1.12)$$

Для горизонтальной составляющей токового диполя  $\mathbf{t}_{\parallel} dl$ , которая ориентирована параллельно оси  $Ox$ ,

компонента  $\dot{A}_y^* = 0$ , а для двух других компонент задача формулируется следующим образом [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \dot{A}_x^*}{dz^2} - q^2 \dot{A}_x^* = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \delta(z-h) (\mathbf{t}_M \mathbf{e}_{\parallel}) dl, \\ \frac{d^2 \dot{A}_z^*}{dz^2} - q^2 \dot{A}_z^* = 0, \\ \dot{A}_{xe}^* = \dot{A}_{xi}^*, \quad \frac{d\dot{A}_{xe}^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{d\dot{A}_{xi}^*}{dz}, \\ \frac{d\dot{A}_{ze}^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{d\dot{A}_{zi}^*}{dz}, \quad \frac{1}{k_e^2} \left( \frac{d\dot{A}_{ze}^*}{dz} + i\xi \dot{A}_{xe}^* \right) = \frac{1}{k_i^2} \left( \frac{d\dot{A}_{zi}^*}{dz} + i\xi \dot{A}_{xi}^* \right). \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Для вертикальной составляющей токового диполя  $\mathbf{t}_{\perp} dl$  две компоненты векторного потенциала равны нулю  $\dot{A}_x^* = \dot{A}_y^* = 0$ . Задачу для вертикальной преобразованной компоненты  $\dot{A}_z^*$  также легко сформулировать исходя из общих уравнений (1.1) и граничных условий (1.7), переписанных для преобразованных компонент поля и выраженных через соответствующую компоненту векторного потенциала:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \dot{A}_z^*}{dz^2} - q^2 \dot{A}_z^* = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \delta(z-h) (\mathbf{t}_M \mathbf{e}_z) dl, \\ \dot{A}_{ze}^* = \frac{1}{\mu} \dot{A}_{zi}^*, \quad \frac{d\dot{A}_{ze}^*}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{d\dot{A}_{zi}^*}{dz}, \quad \frac{1}{k_e^2} \frac{d\dot{A}_{ze}^*}{dz} = \frac{1}{k_i^2} \frac{d\dot{A}_{zi}^*}{dz}. \end{array} \right. \quad (1.14)$$

В (1.13) и (1.14) для сокращения использована одна общая запись дифференциальных уравнений в диэлектрической и электропроводной средах.

Обе задачи (1.13) и (1.14) для компонент токового диполя с учетом условия на бесконечности (1.12) имеют

простое аналитическое решение [5]. Переход к выражениям для электромагнитного поля контура конечных размеров на основе принципа суперпозиции осуществляется простым интегрированием поля диполя по точкам истока  $M$  вдоль контура.

Запишем это решение для Фурье-изображений векторного потенциала в виде интеграла по контуру отдельно в диэлектрической  $z > 0$  и электропроводной  $z < 0$  средах следующим образом:

$$z > 0: \dot{\mathbf{A}}_e^* = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \oint_l \left\{ \frac{e^{-q_e|z-z_M|}}{2q_e} \mathbf{t} - \frac{e^{-q_e(z-z_{M1})}}{2q_e} \mathbf{t}_1 + \right. \\ \left. + \dot{Y}_{e1}^* \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{e1}^* (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z + \dot{Y}_{e2}^* \mathbf{t}_{\perp} \right\} dl, \quad (1.15)$$

$$z < 0: \dot{\mathbf{A}}_i^* = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \oint_l \left( \dot{Y}_{i1}^* \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{i1}^* (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z + \dot{Y}_{i2}^* \mathbf{t}_{\perp} \right) dl. \quad (1.16)$$

В выражениях (1.15), (1.16) помимо точек истока на исходном контуре используются и точки на контуре, зеркально отраженном от плоской границы раздела сред. Элементы исходного и зеркально отраженного контуров показаны на рис. 1.3. Здесь  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  – единичные векторы, касательные соответственно к исходному контуру в точке  $M$ , и к контуру, зеркально отраженному от границы раздела сред, в точке  $M_1$ . Векторы  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  имеют одинаковые по величине и противоположные по направлению проекции на вертикальную ось  $\mathbf{t}_{\perp} = -\mathbf{t}_{\perp}$  и одинаковые по величине и направлению проекции на поверхность раздела сред  $\mathbf{t}_{\parallel} = \mathbf{t}_{\parallel}$ , то есть  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}$ .

Отметим, что в общем случае источником вертикальной компоненты векторного потенциала  $\dot{A}_z^*$  является как горизонтальная составляющая токового диполя

в задаче (1.13), так и его вертикальная составляющая в задаче (1.14). В приведенном решении (1.15), (1.16) выделены соответствующие слагаемые. В области  $z > 0$  в выражении (1.15) функция  $Y_{e1}^*$  связана с протеканием тока в горизонтальном направлении, а функция  $Y_{e2}^*$  – с протеканием тока в вертикальном направлении. Аналогичным образом отмечены функции для слагаемых вертикальной компоненты векторного потенциала в области  $z < 0$  в выражении (1.16).

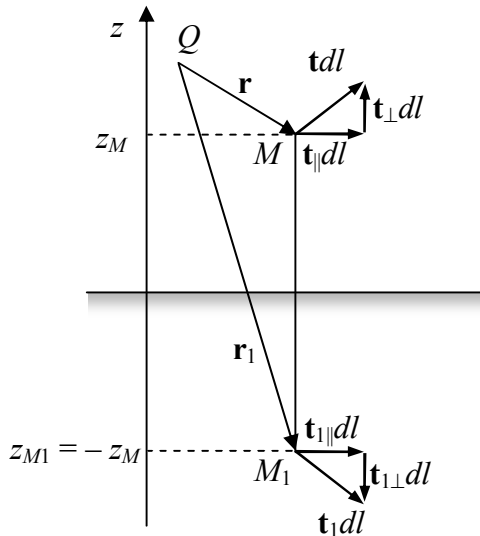


Рис. 1.3. Элемент контура и его зеркальное отражение от плоской границы раздела сред

Подынтегральные функции в (1.15) при  $z > 0$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Y_{e1}^* &= \frac{\mu e^{-q_e(z-z_{M1})}}{\mu q_e + q_i}, \\
 Y_{e1}^* &= i\vartheta \cos \psi \frac{(\mu \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_e) e^{-q_e(z-z_{M1})}}{(\mu q_e + q_i)(q_e \tilde{\gamma}_i + q_i \tilde{\gamma}_e)}, \\
 Y_{e2}^* &= -\frac{q_i \tilde{\gamma}_e e^{-q_e(z-z_{M1})}}{q_e(q_e \tilde{\gamma}_i + q_i \tilde{\gamma}_e)}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

В области  $z < 0$  подынтегральные функции в решении для Фурье-образов следующие:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}_{i1}^* &= \frac{\mu e^{q_i z - q_e z_M}}{\mu q_e + q_i}, \\
 \dot{Y}_{i1}^* &= i\vartheta \cos \psi \frac{\mu(\mu \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_e) e^{q_i z - q_e z_M}}{(\mu q_e + q_i)(q_e \tilde{\gamma}_i + q_i \tilde{\gamma}_e)}, \\
 \dot{Y}_{i2}^* &= \frac{\mu \tilde{\gamma}_i e^{q_i z - q_e z_M}}{q_e \tilde{\gamma}_i + q_i \tilde{\gamma}_e}.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Для получения решения относительно физических переменных необходимо осуществить обратное преобразование по координатам согласно выражению

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta) \cdot e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\
 &= \int_0^{\infty} f_1^*(\vartheta) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f_2^*(\psi) e^{i\vartheta \rho \cos(\psi - \theta)} d\psi \right] \vartheta d\vartheta,
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

где подынтегральная функция, в качестве которой выступает любое из слагаемых в (1.17) и (1.18), в общем случае имеет вид  $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\vartheta) f_2^*(\psi)$ . Для этих функций интегрирование по (1.19) дает [10]

для  $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\vartheta)$ :

$$f(x, y) = \int_0^\infty f_1^*(\vartheta) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\vartheta\rho\cos(\psi-\theta)} d\psi \right] \vartheta d\vartheta = 2\pi \int_0^\infty f_1^*(\vartheta) J_0(\vartheta\rho) \vartheta d\vartheta;$$

для  $f^*(\xi, \eta) = f_1^*(\vartheta) \cos\psi$ : (1.20)

$$f(x, y) = \int_0^\infty f_1^*(\vartheta) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos\psi e^{i\vartheta\rho\cos(\psi-\theta)} d\psi \right] \vartheta d\vartheta =$$

$$= -2\pi \cos\theta \int_0^\infty f_1^*(\vartheta) J_1(\vartheta\rho) \vartheta d\vartheta.$$

Здесь  $J_0(\cdot)$ ,  $J_1(\cdot)$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.

Конкретные выражения для векторного потенциала волнового электромагнитного поля после выполнения обратного преобразования Фурье согласно (1.20) представлены в [5]. Однако так как в этой работе анализируется квазистационарное поле, то выражения в физических координатах для таких полей представим после необходимых дополнительных преобразований, которые учитывают особенности квазистационарной постановки задачи.

## 1.2. Квазистационарное электромагнитное поле произвольного контура с переменным током: пренебрежение токами смещения во всем пространстве

### 1.2.1. Формулировка задачи сопряжения для электромагнитного поля гармонического тока произвольного контура

Квазистационарная постановка предполагает выполнение двух ограничений: во-первых, длина волны

## Глава 1

электромагнитного поля  $\lambda$  значительно больше любого характерного размера  $L$  электромагнитной системы

$$\lambda = 2\pi/\omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} \gg L;$$

во-вторых, в уравнении полного тока пренебрегают плотностью тока смещения  $\mathbf{j}_D$  по сравнению с плотностью тока проводимости  $\mathbf{j}$  [4, 8].

В данном разделе как обычно при переходе к квазистационарной задаче будем пренебрегать токами смещения не только в электропроводной, но и в диэлектрической средах. Тогда параметры  $\tilde{\gamma}_i = \gamma$  и  $k_i^2 = -j\omega\mu_0\gamma$  отличны от нуля в области  $z < 0$  и равны нулю  $\tilde{\gamma}_e = 0$ ,  $k_e^2 = 0$  в диэлектрическом полупространстве  $z > 0$ .

Условия калибровки Лоренца (1.4) в разных средах принимают вид

$$\begin{aligned} z > 0: \operatorname{div} \mathbf{A}_e &= 0, \\ z < 0: \operatorname{div} \mathbf{A}_i + \mu\mu_0\gamma\varphi_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Заметим, что в рассматриваемой постановке в диэлектрической среде  $z > 0$  калибровка Лоренца совпадает с калибровкой Кулона.

Уравнения для потенциалов оказываются:

$$\begin{aligned} z > 0: \Delta \mathbf{A}_e &= -\mu\mu_0\mathbf{j}_0, \quad \Delta\varphi_e = 0, \\ z < 0: \Delta \mathbf{A}_i - \mu\mu_0\gamma \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} &= 0, \quad \Delta\varphi_i - \mu\mu_0\gamma \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

На поверхности раздела сред для нормальной компоненты напряженности электрического поля в квазистационарной постановке при пренебрежении токами смещения во всем пространстве выполняются следующие условия. В электропроводной среде нормальная компонента напряженности электрического поля на границе проводника равна нулю:



$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^- = 0. \quad (1.23)$$

В данном случае это является следствием равенства нулю плотности тока в диэлектрической среде и соответственно равенства нулю нормальной компоненты плотности тока, а значит, и напряженности электрического поля в проводнике на его границе.

В диэлектрической среде на основе электростатической теоремы Гаусса при выполнении (1.23) нормальная компонента напряженности электрического поля связана с поверхностной плотностью электрического заряда соотношением

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^+ = \sigma / \epsilon_e \epsilon_0. \quad (1.24)$$

На основании (1.21) в электропроводной среде, где  $\gamma \neq 0$ , для решения задачи достаточно найти распределение векторного потенциала. Однако в диэлектрической среде величина скалярного потенциала остается неопределенной. Скалярный потенциал не входит в условие калибровки (1.21), а нормальная компонента поля на плоской границе в (1.24) определяется через неизвестную поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . В этом случае, используя только векторный потенциал, напряженность электрического поля в (1.3) может быть определена с точностью до потенциального слагаемого.

На отмеченное свойство задачи сопряжения в квазистационарной постановке при пренебрежении токами смещения, в том числе и в диэлектрической области обращают внимание авторы работы [11], в которой показано, что решение будет однозначным при задании дополнительных условий. Отсутствие потенциальной составляющей является несущественным, если необходимо знать распределение индукции магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  или ЭДС, индуцируемой в замкнутом контуре. Однако нахождение напряженности электрического поля с учетом потенциальной составляющей становится необходимым, например, при определении локальных силовых

характеристик действия электрического поля, плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  и в ряде других приложений.

При выполнении обратного преобразования Фурье по координатам в квазистационарном приближении необходимо учесть, что  $q_e = \vartheta$ ,  $q_i = \sqrt{\vartheta^2 + i\omega\mu_0\gamma}$ . В этом случае, используя (1.20), интегралы для первых двух слагаемых в (1.15) являются табличными [12] и выражения относительно физических координат имеют вид [9]

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta|z-z_M|}}{2\vartheta} J_0(\vartheta\rho) \vartheta d\vartheta = \pi \frac{1}{r},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})}}{2\vartheta} J_0(\vartheta\rho) \vartheta d\vartheta = \pi \frac{1}{r_1}. \quad (1.25)$$

Здесь  $r$  и  $r_1$  – расстояния между точкой наблюдения  $Q$  и точками истока на исходном контуре  $M$  и его зеркальном отражении  $M_1$  (рис. 1.3).

В свою очередь, применение обратного преобразования Фурье для слагаемых, содержащих функции  $\dot{Y}_{\parallel}^*$ ,  $\dot{Y}_1^*$  и  $\dot{Y}_2^*$  в (1.15) и (1.16), в которых исключены члены, связанные с токами смещения, позволяет найти результат интегрирования в виде аналитических зависимостей только по углу  $\psi$ .

В диэлектрической области  $z > 0$  имеем

$$\dot{Y}_{e\parallel} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta\rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta,$$

$$\dot{Y}_{e1} = -2\pi \cos\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_1(\vartheta\rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \quad (1.26)$$

$$\dot{Y}_{e2} = 0.$$

Для электропроводной среды  $z < 0$  находим

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{i\parallel} &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \\ \dot{Y}_{i1} &= -2\pi \mu \cos \theta \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta, \\ \dot{Y}_{i2} &= 2\pi \mu \int_0^{\infty} e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho) d\vartheta.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Здесь обозначено  $w(\vartheta) = \frac{\mu \vartheta + q_i}{\mu} = \vartheta + \frac{1}{\mu} \sqrt{\vartheta^2 + i\omega \mu \mu_0 \gamma}$ .

В результате, подставляя в (1.17), (1.18) вместо Фурье-образов их выражения в физических координатах (1.25) – (1.27), получаем явные выражения в виде квадратур для определения во всем пространстве векторного потенциала трехмерного гармонически изменяющегося во времени электромагнитного поля. Заметим, что в работе [5] в выражениях, из которых следуют  $\dot{Y}_{e1}$  и  $\dot{Y}_{i1}$ , утерян знак «-».

### 1.2.2. Трехмерное квазистационарное магнитное поле в диэлектрическом полупространстве

Как было отмечено, пренебрежение токами смещения в диэлектрической области не влияет на значение индукции магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , для нахождения которого используется только векторный потенциал. Приведенные выражения для векторного потенциала получены на основе формального исключения из решения общей волновой задачи членов, связанных с токами смещения. Однако при переходе к квазистационарной постановке должно быть учтено условие замкнутости контура с током, что, как будет показано, существенно упрощает выражения для векторного потенциала и индукции магнитного поля, создаваемого в системе «произвольный пространственный контур с током – электропроводное полупространство».

Выражение для векторного потенциала при  $z > 0$  принимает вид:

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left\{ \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} + \frac{1}{\pi} (\dot{Y}_{e\parallel} \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{e1} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z) \right\} dl, \quad (1.28)$$

где функции  $\dot{Y}_{e\parallel}$  и  $\dot{Y}_{e1}$  определены в (1.26).

Из (1.28) следует, что для выражения в круглых скобках вместо двух функций  $\dot{Y}_{e\parallel}$  и  $\dot{Y}_{e1}$  достаточно использовать одну вспомогательную функцию  $\dot{G}_e$  [9]

$$\dot{G}_e = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta, \quad (1.29)$$

для которой в локальных координатах справедливы равенства  $\dot{Y}_{e\parallel} = -\pi \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z}$ ,  $\dot{Y}_{e1} = \pi \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial x}$ .

В выражении (1.28) отсутствует вертикальная  $\mathbf{t}_{\perp}$  компонента касательного вектора, что позволяет представить векторный потенциал следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}] \times \nabla \dot{G}_e \right) dl. \quad (1.30)$$

Упростим результат интегрирования третьего слагаемого в выражении (1.30), используя условие замкнутости контура с током. Для этого будем учитывать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{QM} = \rho_{QM1} = \sqrt{(x_Q - x_{M1})^2 + (y_Q - y_{M1})^2}, \\ [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_M] &= [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_{M1}], \\ \nabla_Q \dot{G}_e(\mathbf{r}_{QM1}) &= -\nabla_{M1} \dot{G}_e(\mathbf{r}_{QM1}), \quad dl_M = dl_{M1}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Здесь показано, что аргументом функции  $\dot{G}_e(\mathbf{r}_{QM1})$  являются координаты вектора  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{QM1}$  (рис. 1.3). Индексами внизу отмечены точки, по которым выполняются соответствующие

операции. Замена дифференцирования функции  $\dot{G}_e$  по точкам наблюдения  $Q$  на дифференцирование по точкам истока  $M_1$  сопровождается изменением знака перед функцией [13]. В результате, с учетом равенства нулю циркуляции градиента скалярной функции, для третьего слагаемого в (1.30) имеем

$$\oint_l [\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_M] \times \nabla_Q \dot{G}_e dl_M =$$

$$= \oint_{l_1} \left\{ \mathbf{t}_{M1} (\mathbf{e}_z \cdot \nabla_Q \dot{G}_e) + \mathbf{e}_z (\mathbf{t}_{M1} \cdot \nabla_{M1} \dot{G}_e) \right\} dl_{M1} = \oint_l \mathbf{t}_{M1} \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z_Q} dl_{M1}. \quad (1.32)$$

Окончательно, опуская обозначения точек, выражения для векторного потенциала и индукции магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  в диэлектрической среде ( $z > 0$ ) упрощаются и принимают вид

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2 = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \mathbf{t}_1 \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) dl, \quad (1.33)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \dot{\mathbf{B}}_0 + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left[ \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} - \mathbf{t}_1 \times \nabla \left( \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) \right] dl. \quad (1.34)$$

Введенная функция  $\dot{G}_e$  (1.29) удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \dot{G}_e = 0$ , в чем легко убедиться, применяя метод разделения переменных или непосредственной проверкой. Кроме того, так как для любой функции вида  $\mathbf{t}_{M1} f(\mathbf{r}_{QM1})$  следующий интеграл по замкнутому контуру от дивергенции этой функции дает нулевое значение:

$$\oint_{l_1} \text{div}_Q (\mathbf{t}_{M1} f(\mathbf{r}_{QM1})) dl_{M1} = -\int_{l_1} \mathbf{t}_{M1} \cdot \text{grad}_{M1} (f(\mathbf{r}_{QM1})) dl_{M1} = 0. \quad (1.35)$$

Отсюда следует, что найденное выражение для векторного потенциала действительно удовлетворяет условию (1.21)

непрерывности векторного потенциала в диэлектрической среде в квазистационарном приближении  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{A}} = 0$ .

Наконец, из (1.33) вытекает, что для произвольного плоского контура, ориентированного параллельно границе раздела сред (для которого  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z = 0$ ), вертикальная компонента векторного потенциала в области  $z > 0$  равна нулю  $\dot{\mathbf{A}}_e \cdot \mathbf{e}_z = 0$ .

При сделанном допущении об отсутствии токов смещения найденное выражение (1.33) дает возможность определить лишь одно слагаемое напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_{eV} = -i\omega \dot{\mathbf{A}}_e$ . Второе слагаемое, определяющее потенциальную составляющую напряженности электрического поля, оказывается неопределенным. В частном случае плоских контуров, компланарных плоской поверхности электропроводного тела, указанное слагаемое для вертикальной компоненты напряженности электрического поля будет  $\dot{\mathbf{E}}_{eV} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ . В дальнейшем будет показано, что этот вывод в случае плоских контуров справедлив не только для составляющей  $\dot{\mathbf{E}}_{eV}$  в диэлектрической области, но и для полной напряженности электрического поля, включая потенциальную составляющую.

Заметим, что без учета утерянного в [5] знака « $\rightarrow$ » в выражении, аналогичном (1.26) для  $\dot{Y}_{e1}$  (а также в (1.27) для  $\dot{Y}_{i1}$ ), не удастся использовать единую функцию  $\dot{G}_e$  и, что более существенно, в этом случае в диэлектрической среде в квазистационарном приближении не выполняется необходимое условие непрерывности векторного потенциала  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ .

### 1.2.3. Электромагнитное поле в электропроводной среде

Для квазистационарного поля в электропроводном полупространстве, в отличие от диэлектрической среды, пренебрежение токами смещения по сравнению с токами проводимости не приводит к неопределенности в определении напряженности электрического поля. Скалярный потенциал  $\phi_i$  из условия калибровки Лоренца (1.21) находится по известному распределению векторного потенциала  $\dot{\mathbf{A}}_i$ , определяя тем самым потенциальную составляющую  $\dot{\mathbf{E}}_{iP}$  электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_i = \dot{\mathbf{E}}_{iV} + \dot{\mathbf{E}}_{iP} = -i\omega\dot{\mathbf{A}}_i - \text{grad}\phi_i$ .

Используя выражения (1.27), которые получены в результате пренебрежения токами смещения в подынтегральных функциях, векторный потенциал в области  $z < 0$  можно записать в виде

$$z < 0: \dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \oint_l (\dot{Y}_{i\parallel} \mathbf{t}_{\parallel} + \dot{Y}_{i\perp} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \mathbf{e}_z + \dot{Y}_{i2} \mathbf{t}_{\perp}) dl. \quad (1.36)$$

Дальнейшие преобразования и упрощения выражений после формального пренебрежения членами, связанными с токами смещения, выполняются с учетом замкнутости контуров с током для квазистационарного приближения. В этом случае выделяются слагаемые, представляющие собой полные дифференциалы в подынтегральных функциях контурных интегралов, которые в результате интегрирования по замкнутому контуру дают нулевое значение.

Прежде всего упростим (1.36), исключив второе слагаемое в подынтегральной функции (1.36). Введением функции

$$\dot{G}_{i1} = 2\pi\mu \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \quad (1.37)$$

выражение (1.36) можно представить следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi^2} \oint_l \left\{ \begin{aligned} & - \left( \frac{\partial \dot{G}_{i1}}{\partial x_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) + \frac{\partial \dot{G}_{i1}}{\partial z_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right) \mathbf{e}_z + \\ & + \left[ \dot{Y}_{i1} \mathbf{t}_{\parallel} + \left( \frac{\partial \dot{G}_{i1}}{\partial z_M} + \dot{Y}_{i2} \right) \mathbf{t}_{\perp} \right] \end{aligned} \right\} dl. \quad (1.38)$$

Первое слагаемое, заключенное в круглые скобки, дает полный дифференциал, и его интеграл по замкнутому контуру равен нулю. Окончательно выражение для векторного потенциала электромагнитного поля в электропроводной среде принимает вид, где каждое слагаемое в подынтегральной функции обусловлено элементом тока соответствующего направления:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{t}_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + \\ & + \mathbf{t}_{\perp} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i d\vartheta \end{aligned} \right\} dl. \quad (1.39)$$

Найдем величину  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i$ , значение которой в силу принятой калибровки Лоренца (1.21) не обязательно равно нулю. Тем самым определим распределение скалярного потенциала электромагнитного поля  $\dot{\phi}_i = -\frac{\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i}{\mu\mu_0\gamma}$ .

Исходя из (1.39) и используя локальные цилиндрические координаты (рис. 1.2), имеем

$$\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left\{ \begin{aligned} & - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) \cos\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta^2 d\vartheta + \\ & + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i^2 d\vartheta \end{aligned} \right\} dl. \quad (1.40)$$

Исключим из записанного выражения слагаемое, связанное с участками контура, имеющими ненулевую



касательную к поверхности раздела сред составляющую  $\mathbf{t}_{\parallel}$ .  
Для этого с использованием вспомогательной функции

$$\dot{G}_{i2} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \quad (1.41)$$

получим следующее выражение для  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i$ :

$$\begin{aligned} \text{div } \dot{\mathbf{A}}_i &= \frac{\mu_0 \dot{J}_0}{4\pi} 2 \oint_l \left\{ \begin{aligned} & - \left( \frac{\partial \dot{G}_{i2}}{\partial x_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) + \frac{\partial \dot{G}_{i2}}{\partial z_M} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right) + \\ & + \left[ \left( \frac{\partial \dot{G}_{i2}}{\partial z_M} + \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i^2 d\vartheta \right) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right] \end{aligned} \right\} dl = \\ &= \frac{\mu_0 \dot{J}_0}{4\pi} 2i\omega \mu_0 \gamma \oint_l \left\{ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \right\} dl. \end{aligned} \quad (1.42)$$

В результате выражение для комплексной амплитуды скалярного потенциала в окончательном виде запишется как

$$\dot{\phi}_i = - \frac{\mu_0 \dot{J}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \right\} dl. \quad (1.43)$$

Из (1.43) следует, в частности, что для плоских контуров, лежащих в плоскости, параллельной границе раздела сред, т.е. при отсутствии участков контура с не равной нулю нормальной компонентой  $\mathbf{t}_{\perp}$ ,  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_i = 0$  и соответственно  $\dot{\phi}_i = 0$ . Для таких контуров напряженность электрического поля в электропроводной среде  $\dot{\mathbf{E}}_i = \dot{\mathbf{E}}_{iV} + \dot{\mathbf{E}}_{iP} = -i\omega \dot{\mathbf{A}}_i - \text{grad } \dot{\phi}_i$  не содержит потенциальной составляющей и напряженность электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_i = -i\omega \dot{\mathbf{A}}_i$  определяется непосредственно распределением в пространстве векторного потенциала.

Наконец, найдем выражение для напряженности электрического поля в области  $z < 0$  для общего случая пространственной конфигурации контура с током и его

произвольной ориентации относительно плоской границы раздела сред.

Используя (1.39) и (1.43), после выполнения необходимых операций получим следующее выражение для напряженности электрического поля в электропроводном полупространстве:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_i &= \dot{\mathbf{E}}_{iV} + \dot{\mathbf{E}}_{iP} = (\dot{\mathbf{E}}_{i\parallel 1} + \dot{\mathbf{E}}_{i\perp}) + (\dot{\mathbf{E}}_{i\parallel 2} - \dot{\mathbf{E}}_{i\perp}) = \\ &= -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ \mathbf{t}_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \right\} dl, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где  $\mathbf{e}_{\rho} = \mathbf{e}_{\parallel} \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta$  – единичный вектор вдоль радиального направления локальной цилиндрической системы координат.

Заметим, что выражение

$$\dot{\mathbf{E}}_{i\perp} = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2 \oint_l \left\{ \mathbf{t}_{\perp} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i d\vartheta \right\} dl \quad (1.45)$$

входит слагаемыми в значения составляющих  $\dot{\mathbf{E}}_{iV}$  и  $\dot{\mathbf{E}}_{iP}$  общей напряженности с разными знаками и поэтому отсутствует в (1.44). По этой причине каждое из слагаемых  $\dot{\mathbf{E}}_{i\parallel 1}$  и  $\dot{\mathbf{E}}_{i\parallel 2}$  в (1.44), в отличие от составляющих напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_{iV}$  и  $\dot{\mathbf{E}}_{iP}$ , не могут рассматриваться как напряженности полей (хотя бы потому, что интегрирование проводится не обязательно по замкнутым контурам) и только в сумме дают напряженность электрического поля в электропроводном полупространстве. Разделение на два слагаемых в (1.44) отражает влияние на напряженность поля различно ориентированных участков исходного контура с током.

### **1.3. Особенности формирования трехмерного квазистационарного электромагнитного поля в системе «произвольный пространственный контур с током – электропроводное полупространство»**

#### **1.3.1. Основная особенность распределения трехмерного электромагнитного поля в электропроводном полупространстве**

Из выражения (1.44) следует, что в электропроводной среде вектор напряженности электрического поля, а значит, и вектор плотности тока не содержат компоненты, перпендикулярной поверхности раздела сред. Нулевые значения реализуются не только на поверхности [14], как этого требует выполнение граничного условия (1.23), а распространяется на все электропроводное полупространство. Этот результат справедлив для любых конфигураций контуров с током и их ориентаций относительно границы раздела сред, он справедлив также при любых значениях электрофизических свойств электропроводной и диэлектрической сред и не зависит от частоты поля. Ограничением является использование математической модели электропроводного полупространства, которое, как известно, для реальных электропроводных тел возможно при условии, когда глубина проникновения электромагнитного поля мала по сравнению с характерными размерами тела.

Подчеркнем, что полученный результат об отсутствии вертикальной компоненты напряженности электрического поля в электропроводной среде стал следствием решения волновой задачи теории поля. Покажем, что такой вывод для квазистационарной задачи имеет более общие основания [13, 15].

Из уравнений Максвелла (1.1) следует, что в кусочно-однородной среде в области, где отсутствуют источники тока, напряженность электрического поля удовлетворяет однородному уравнению параболического типа:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\mu_0\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (1.46)$$

В электропроводном полупространстве на границе раздела сред вертикальная компонента напряженности электрического поля согласно граничному условию (1.23) равна нулю. Условие ограниченности поля в бесконечно удаленных точках дает нулевое значение данной компоненты электрического поля на бесконечности. В результате для вертикальной компоненты электрического поля в области  $z < 0$  получаем задачу для однородного уравнения параболического типа с нулевыми краевыми условиями:

$$\begin{cases} \Delta E_{iz} - \mu\mu_0\gamma \frac{\partial E_{iz}}{\partial t} = 0, \\ E_{iz}(z=0-0) = 0, \quad E_{iz}(\infty) = 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Решение этой задачи для установившегося синусоидального процесса (процесса «без начальных условий») для полубесконечной области имеет единственное нулевое значение [16]. Компонента поля также будет отсутствовать в любой момент времени при нулевых начальных условиях.

Так как рассматривается линейная задача, то на основании принципа суперпозиции сделанный вывод относительно отсутствия вертикальных компонент напряженности электрического поля и плотности тока в электропроводной среде распространяется на более общий случай. Во-первых, вывод справедлив не только при протекании тока вдоль конкретного контура, но и для любого заданного распределения исходного тока в диэлектрической среде, поскольку в квазистационарной постановке оно может быть представлено системой замкнутых контуров [17]. Во-

вторых, так как произвольная зависимость тока от времени может быть представлена своим частотным спектром (с известными ограничениями), то полученный результат справедлив и для любой зависимости от времени исходного тока.

Общий характер найденной особенности распределения поля позволяет определить ее как основную особенность формирования трехмерного квазистационарного электромагнитного поля для произвольной системы токов пространственной конфигурации, протекающих вблизи электропроводного намагничивающегося полупространства.

Кроме общего вывода результаты могут оказаться полезными при разработке подходов при трехмерном моделировании электромагнитных систем. Например, в методе интегральных уравнений при использовании модели электропроводного полупространства определение векторного поля индуцированных токов в электропроводной среде должно быть ограничено путем нахождения только двух компонент в плоскостях, параллельных границе раздела сред. Включение в систему уравнений вертикальной компоненты, которая тождественно равна нулю, помимо усложнения расчетов может приводить к некорректной постановке задачи.

В связи с рассматриваемой особенностью распределения поля необходимо отметить также известный факт из теории отражения и преломления электромагнитных волн от плоской границы раздела сред, когда оптические плотности сред, в которых они распространяются, существенно различны (например, воздух и металл). В этом случае угол преломления практически равен нулю и направление распространения преломленной волны почти полностью совпадает с направлением нормали к поверхности [18]. Следствием является то, что направления векторов напряженности как электрического, так и магнитного полей ориентированы только в направлениях, параллельных

граничной поверхности, а сами векторные поля на поверхности и внутри оптически плотной среды связаны соотношением, полученным М.А. Леонтовичем при исследовании распространения радиоволн [19]. Оно носит название приближенного граничного условия Леонтовича или еще условия Леонтовича-Рыкова-Щукина.

Решаемая здесь задача в двух отношениях отличается от задачи распространения электромагнитной волны: во-первых, с самого начала проблема формулируется в квазистационарной постановке, во-вторых, и это наиболее существенно, в отличие от упомянутой волновой задачи поле внешних источников в общем случае не является однородным, степень его неоднородности вообще не ограничивается. По этой причине только напряженность электрического поля имеет нулевую компоненту в направлении, перпендикулярном границе раздела сред. В дальнейшем будет показано, что при удалении источников внешнего поля от границы раздела сред вертикальная компонента вектора напряженности магнитного поля также будет стремиться к нулю. И тогда направления векторных полей в квазистационарной и волновой задачах будут полностью соответствовать друг другу, так как при этом в обоих случаях рассматривается однородное поле внешних источников.

Подтвердить справедливость сделанного вывода об основной особенности распределения квазистационарного электромагнитного поля можно на основе сравнения результатов расчета трехмерного электромагнитного поля рассмотренным и независимым методами. Приведем результаты численного расчета с помощью программного пакета Comsol конкретной электромагнитной системы, которая имеет также и прикладное значение [20].

Рассмотрим распределение трехмерного электромагнитного поля для электромагнитной системы в виде кругового контура радиуса  $R$  с током  $I_0$ ,

расположенного в плоскости  $xOz$  перпендикулярно к поверхности раздела сред. Минимальное расстояние от контура до поверхности  $h_0$  (рис. 1.4).

Переменное магнитное поле тока кругового контура  $\mathbf{V}_0 = \text{rot } \mathbf{A}_0$  обуславливает появление индуцированного электрического поля и вихревых токов в электропроводном полупространстве. Существенно, что при выбранной ориентации контура с током, напряженность индуцированного электрического поля исходного тока  $\dot{\mathbf{E}}_0 = -i\omega\dot{\mathbf{A}}_0$  имеет не равную нулю компоненту  $(\mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{E}}_0)$ , перпендикулярную границе раздела сред. Однако в электропроводной среде эта компонента оказывается равной нулю.

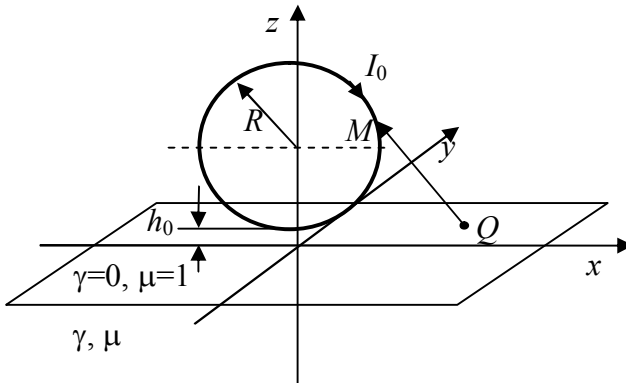


Рис. 1.4. Электромагнитная система с круговым токовым контуром, расположенным в плоскости, перпендикулярной к поверхности раздела сред

В отличие от аналитического метода при использовании пакета Comsol контур с током выбирается в виде токопровода квадратной формы сечения  $2r \times 2r$ , сторона которого значительно меньше, чем расстояние  $h_0$ . В численном расчете задача формулируется для ограниченной

## Глава 1

области, размеры которой значительно превышают радиус контура  $R$ .

Результаты расчетов приводятся для следующих геометрических параметров:  $R = 0,05$  м,  $h_0 = 0,02$  м,  $r = 0.004$  м. Среда считается немагнитной  $\mu = 1$  и имеет удельную электропроводность  $\gamma = 10^5$  Ом<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup>. По кольцу протекает ток  $I_0 = 10^3$  А частотой  $f = 10^3$  Гц. При таких электрофизических параметрах глубина проникновения поля составляет  $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\gamma} = 0,05$  м.

На рис. 1.5 показана картина протекания тока, где стрелки обозначают векторы плотности индуцированного тока  $\mathbf{j}_i = \gamma \mathbf{E}_i$ , рассчитанного численным методом: в вертикальной плоскости, проходящей через центр контура с током, и в плоскости, параллельной поверхности раздела сред на глубине  $z = -h_0$ .

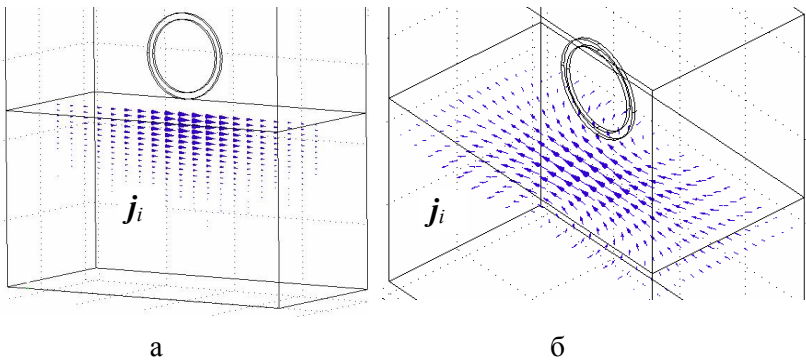


Рис. 1.5. Картина протекания индуцированного тока, рассчитанного численным методом: а) в вертикальной плоскости, проходящей через центр контура с током; б) в плоскости  $z = -h_0$ , параллельной поверхности раздела сред

Моделирование численным методом подтверждает отсутствие нормальных к поверхности раздела сред



компонент напряженности электрического поля и плотности тока в электропроводном полупространстве. Это видно из примера на рис. 1.5.

Компонента напряженности электрического поля, параллельная плоской границе раздела сред обусловлена не только наличием участков контура, которые имеют параллельное к поверхности направление тока. Влияние этих участков контура отображается первым слагаемым в (1.44). Для трехмерного поля пространственного контура горизонтальная компонента обусловлена также наличием нормальных к поверхности участков контура. С ними связано второе слагаемое в (1.44).

Для расчетной модели в виде кругового контура с током (рис. 1.4) будут присутствовать обе составляющие напряженности электрического поля, параллельные поверхности раздела сред. Рис. 1.6 и 1.7 иллюстрируют результаты расчета распределения поля и поясняют его структуру.

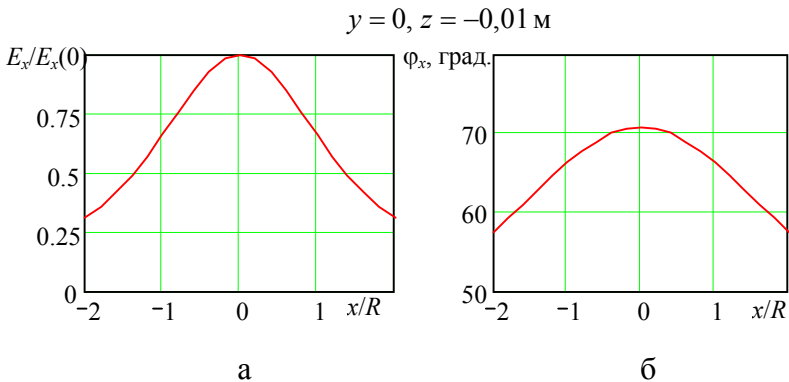


Рис. 1.6. Распределение напряженности синусоидального электрического поля вдоль оси  $x$  при  $y = 0, z = -0,01 \text{ м}$ : а) нормированное значение амплитуды; б) сдвиг фаз между напряженностью электрического поля и током контура

Рис. 1.6 соответствует распределению напряженности электрического поля вдоль оси  $x$  непосредственно под кольцом с током при  $y = 0$  в плоскости, которая параллельна поверхности на глубине  $z = -0,01$  м. На этой линии напряженность электрического поля и соответственно плотность тока  $\dot{\mathbf{j}} = \gamma \dot{\mathbf{E}}_i = \dot{j}_x \mathbf{e}_x$  имеют ненулевую компоненту только вдоль оси  $x$ . На рис. 1.6, а показано распределение относительного значения модуля комплексной амплитуды напряженности поля, нормированного на максимальную величину поля, которая реализуется при  $x = 0$ . Рис. 1.6, б иллюстрирует распределение вдоль того же направления разности фаз между током  $\dot{I}_0$  и напряженностью поля или плотностью тока  $\dot{j}_x$ , которые изменяются во времени по синусоидальному закону. Видно, что сдвиг фаз не остается неизменным. Поэтому максимальные значения напряженности поля в разных точках достигаются в разные моменты времени.

На той же поверхности  $z = -0,01$  м, но в точках, не лежащих в плоскости кругового контура, напряженность поля и плотность тока уже направлены не только вдоль оси  $x$ . В общем случае они имеют две не равные нулю компоненты  $\dot{\mathbf{j}} = \gamma \dot{\mathbf{E}}_i = \dot{j}_x \mathbf{e}_x + \dot{j}_y \mathbf{e}_y$ .

На рис. 1.7 аналогично предыдущему рисунку, но при  $y = 0,03$  м показано распределение вдоль оси  $x$  относительных значений амплитуд обеих компонент напряженности поля (рис. 1.7, а) и соответствующие сдвиги фаз (рис. 1.7, б) для этих компонент поля относительно тока контура. Точками обозначены значения, которые найдены с помощью вычисления в пакете Comsol.

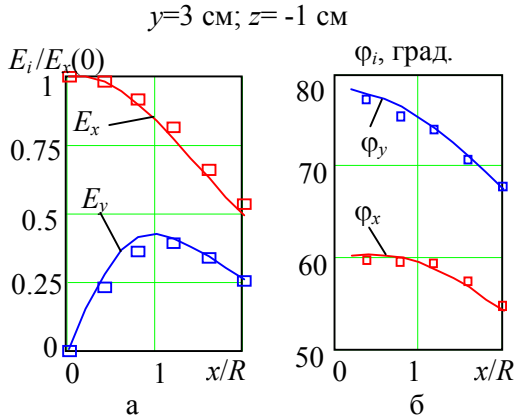


Рис. 1.7. Распределение напряженности синусоидального электрического поля вдоль оси  $x$  при  $y=0, z=-0,01 \text{ м}$ : а) нормированное значение амплитуд компонент поля; б) сдвиг фаз между током контура и напряженностью электрического поля

Особенностью распределения поля в точках, которые не находятся в плоскости кольца, является то, что фазы двух взаимно перпендикулярных компонент поля отличаются одна от одной. Это свидетельствует о наличии "эллиптической поляризации" поля в области, где  $y \neq 0$ .

Как видно из рис. 1.7, результаты аналитического и численного методов в целом соответствуют друг другу. Однако следует заметить, что численным методом в данном случае не удалось достичь достаточной точности расчета, что связано с необходимостью применения относительно грубой расчетной сетки для решения трехмерной задачи, особенно для точек вблизи границы раздела сред. Вместе с тем полученные результаты свидетельствуют о достоверности аналитического решения задачи и корректности вывода о нулевых значениях вертикальных компонент напряженности электрического поля и плотности тока в электропроводном полупространстве.

### 1.3.2. Источники поля и условия на границе раздела сред

Распределение источников электромагнитного поля, токов и зарядов позволяет установить физические причины особенностей распределения напряженности электрического поля и плотности тока в электропроводном полупространстве.

Несмотря на то, что пока при пренебрежении токами смещения во всем пространстве напряженность электрического поля в диэлектрической области не найдена, особенности распределения плотности тока в электропроводном полупространстве вместе с граничными условиями на поверхности раздела сред позволяют установить источники поля и его значение на границе в диэлектрической среде.

Нормальную компоненту напряженности электрического поля в диэлектрической среде на границе раздела сред  $e_z \cdot \dot{\mathbf{E}}^+$  можно определить, учитывая отсутствие на границе в электропроводной среде нормальной компоненты плотности тока и напряженности электрического поля (1.23). Для этого представим векторный потенциал как потенциал, который определяется только токами, протекающими во всем пространстве:  $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_c$ , где  $\dot{\mathbf{A}}_0$  – векторный потенциал, обусловленный током исходного контура в (1.33),  $\dot{\mathbf{A}}_c$  – векторный потенциал, определяемый индуцированными токами в области  $z < 0$ :

$$\dot{\mathbf{A}}_c = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{V_i} \frac{\gamma \dot{\mathbf{E}}_i}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j}_{Sm}}{r} dS. \quad (1.48)$$

Здесь учитываются как плотность токов проводимости  $\gamma \dot{\mathbf{E}}_i$ , так и плотность токов намагничивания  $(\mu - 1)\gamma \dot{\mathbf{E}}_i$  в объеме  $V_i$  и поверхностная плотность токов намагничивания  $\mathbf{j}_{Sm} = -(\mu - 1)\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}^-$  на поверхности раздела сред.

Выражение (1.48) справедливо если во всем пространстве, и в диэлектрической, и в электропроводной областях, для векторного потенциала справедлива калибровка Кулона, то есть выполняется условие непрерывности  $\operatorname{div} \dot{A} = 0$  [21]. Очевидно, что оба слагаемых  $\dot{A}_0 + \dot{A}_c$  также по раздельности удовлетворяют этому условию. (Заметим, что  $\dot{A}_c$  в общем случае отличается от суммы  $\dot{A}_1 + \dot{A}_2$  в (1.33) при  $z > 0$  и  $\dot{A}_0 + \dot{A}_c$  отличается от  $\dot{A}_i$  в (1.39) при  $z < 0$  на величину градиента скалярной функции, что связано с другим условием калибровки).

При выбранной калибровке напряженность электрического поля представляется суммой напряженностей полей  $\dot{E} = \dot{E}_\sigma + \dot{E}_j$ , где скалярный потенциал  $\phi_\sigma$  и связанное с ним потенциальное слагаемое напряженности электрического поля  $\dot{E}_\sigma = -\operatorname{grad} \phi_\sigma$  обусловлено электрическими зарядами [22], которые в рассматриваемой задаче сосредоточены на границе раздела сред с поверхностной плотностью  $\dot{\sigma}$ :

$$\phi_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_e\epsilon_0} \int_S \frac{\dot{\sigma}}{r} dS. \quad (1.49)$$

Второе же слагаемое напряженности электрического поля  $\dot{E}_j = -i\omega(\dot{A}_0 + \dot{A}_c)$  определяется токами, протекающими в системе, включая ток контура и токи, индуцированные в электропроводной среде.

Существенным обстоятельством в представлении  $\dot{A} = \dot{A}_0 + \dot{A}_c$ , как следует из (1.48), является равенство нулю вертикальной компоненты векторного потенциала  $\dot{A}_c$  и соответственно равенство нулю слагаемого напряженности электрического поля  $-i\omega\dot{A}_c$ . Нормальная компонента суммарного поля может появиться только в связи с протеканием исходного тока контура в направлении,

перпендикулярном границе раздела сред. Такая ситуация возможна для контуров пространственной конфигурации или для плоских контуров, лежащих в плоскости, которая некомпланарна границе раздела сред.

Нормальные составляющие напряженности электрического поля, созданного поверхностным зарядом, по разные стороны граничной поверхности равны и противоположны по знаку. Кроме того, в электропроводной среде эта вертикальная составляющая поля электрических зарядов на границе компенсируется напряженностью индуцированного электрического поля, то есть:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\sigma z}^+ &= -\dot{E}_{\sigma z}^-, \\ \dot{E}_{\sigma z}^- - i\omega\dot{A}_{0z}^- &= 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Учитывая непрерывность нормальной составляющей векторного потенциала  $\dot{A}_{0z}^+ = \dot{A}_{0z}^-$ , поверхностная плотность электрического заряда, исходя из граничного условия, будет  $\dot{\sigma} = \varepsilon_e \varepsilon_0 \dot{E}_z^+$ . Отсюда вместе с (1.50) найдем значение поверхностной плотности заряда и величину нормальной компоненты напряженности электрического поля, которые, как оказывается, полностью определяются только векторным потенциалом тока исходного контура:

$$\frac{\dot{\sigma}}{\varepsilon_e \varepsilon_0} = \dot{E}_z^+ = -2i\omega\dot{A}_{0z}^-. \quad (1.51)$$

Отметим также, что точно такое соотношение было получено ранее для задачи об электромагнитном поле в случае идеального скин-эффекта [23], где ток в электропроводной среде протекает только вдоль плоской поверхности и естественно не имеет нормальной к ней компоненты. На основании представленных результатов заключаем, что соотношение (1.51) имеет общий характер, оно не зависит от электропроводности и магнитной проницаемости среды, над плоской поверхностью которой протекает переменный электрический ток. Причем в этом

случае (1.50) справедливо не только для гармонических токов, но и при произвольной зависимости от времени исходного тока контура. Кроме того, на основании принципа суперпозиции результат остается верным для любой исходной системы замкнутых токов:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_e \varepsilon_0} = E_z^+ = -2 \frac{\partial A_{0z}}{\partial t}, \quad (1.52)$$

где 
$$-\frac{\partial A_{0z}(z=0, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial I_0(t)}{\partial t} \oint_l \frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)}{r} dl.$$

Таким образом, можно заключить, что физической причиной отсутствия вертикальной составляющей плотности тока и напряженности электрического поля в электропроводном полупространстве является то, что на электропроводной поверхности формируется распределение электрического заряда, поле которого полностью компенсирует внешнее индуцированное электрическое поле. Этот заряд создает в электропроводной области дополнительную составляющую электрического поля, векторы напряженности которого лежат в плоскостях, параллельных границе раздела сред.

Касательная составляющая напряженности электрического поля на границе раздела сред в силу выполнения граничного условия (1.7) принимает одинаковые значения в диэлектрической  $\dot{\mathbf{E}}_r^+$  и электропроводной  $\dot{\mathbf{E}}_i(z=0)$  средах:  $\dot{\mathbf{E}}_r^+ = \dot{\mathbf{E}}_i(z=0)$ . Величина поля на границе важна в том отношении, что здесь в электропроводном полупространстве напряженность поля, а значит и плотность тока, имеет максимальное значение и, кроме того, касательная компонента определяет плотность потока электромагнитной энергии внутрь тела.

В заключение отметим, что распределенный на поверхности раздела сред электрический заряд с поверхностной плотностью  $\dot{\sigma}$  вместе с заданным током

контура и найденным распределением индуцированных токов создают полную систему источников квазистационарного электромагнитного поля и тем самым полностью определяют величину поля во всем пространстве. К уже найденным составляющим электромагнитного поля необходимо добавить только потенциальную составляющую электрического поля в диэлектрическом полупространстве. Потенциал этого поля  $\phi_e$  в калибровке Кулона определяется в виде интеграла по поверхности (1.49).

Включение интегрального соотношения для определения поля источников хотя и решает полностью задачу нахождения трехмерного электромагнитного поля в рассматриваемой системе, однако все же это соотношение выпадает из общего аналитического решения для остальных составляющих поля. Последовательное использование соответствующей волновой задачи и для потенциальной составляющей электрического поля приводится в следующем подразделе.

Как видно из (1.52), при заданной геометрии контура с переменным током определение нормальной компоненты напряженности электрического поля на поверхности раздела сред в диэлектрической области и поверхностной плотности электрического заряда не представляет труда. Проиллюстрируем распределение этих величин на двух примерах.

В первом случае рассмотрим прежнюю модельную задачу в виде кругового контура с током, расположенного в плоскости, перпендикулярной к границе раздела сред (рис. 1.4). Для выбранных прежних параметров системы на рис. 1.8, *а* показаны результаты расчета напряженности электрического поля в виде линий  $E_z^+ = \text{const}$ . На рис. 1.8, *б* представлено распределение напряженности поля  $E_z^+$  вдоль линий на поверхности, параллельных плоскости кольца.



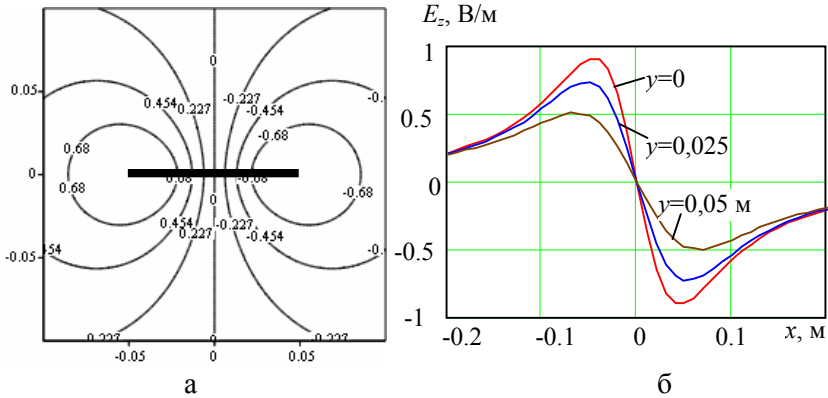


Рис. 1.8. Распределение вертикальной компоненты напряженности электрического поля кругового контура на поверхности раздела сред в диэлектрической области: а) линии  $E_z = \text{const}$ ; б) изменение компоненты  $E_z^+$  вдоль координаты  $x$

В качестве второго примера рассмотрим конфигурацию контура с током, типичную для технологических систем. Центральная часть контура  $l_1$  располагается параллельно плоской поверхности электропроводного тела. Токоподвод осуществляется по двум параллельным проводникам  $l_2$ , перпендикулярным плоскости, в которой лежит центральная часть контура, и соответственно перпендикулярным поверхности раздела сред (рис. 1.9). В том или ином конструктивном исполнении подобные конфигурации используются, например, в высокочастотных индукционных устройствах термической обработки металлических изделий [24 – 26], в устройствах магнитно-импульсной обработки металлов [27], в технологии изменения свойств материалов под воздействием токов высокой плотности [24, 25] и других.

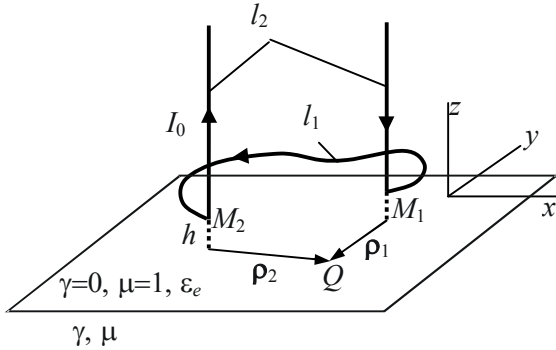


Рис. 1.9. Токовый контур с разделенными горизонтальным и вертикальным участками

Напряженность электрического поля для рассматриваемого исходного пространственного контура на плоской границе со стороны диэлектрической среды имеет как нормальную  $E_z^+$ , так и тангенциальную  $E_{\parallel}$  компоненты. Рассмотрим вначале тангенциальную компоненту. Эта компонента не изменяется на границе раздела сред. Ее можно определить из (1.44) при  $z = 0$ . Тангенциальная компонента для контура, показанного на рис. 1.9, может быть записана в виде суммы следующих двух контурных интегралов вдоль участков  $l_1$  и  $l_2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel 1} + \mathbf{E}_{\parallel 2} = \\ &= i\omega \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{l_1} \mathbf{t}_{\parallel} \frac{\partial G_e}{\partial z} dl - i\omega \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{l_2} (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \frac{\partial G_e}{\partial \rho} \mathbf{e}_{\rho} dl. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Интегрирование по вертикальным элементам контура приводит к следующему выражению для слагаемого  $\mathbf{E}_{\parallel 2}$  в (1.53):

$$\mathbf{E}_{\parallel 2} = i\omega \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\vartheta h)}{w(\vartheta)} [J_1(\vartheta \rho_1) \mathbf{e}_1 - J_1(\vartheta \rho_2) \mathbf{e}_2] d\vartheta, \quad (1.54)$$

где  $h$  – расстояние от центральной части контура до поверхности;  $\mathbf{e}_{1,2} = \mathbf{\rho}_{1,2} / |\mathbf{\rho}_{1,2}|$ .

Значение в (1.54) должно быть добавлено к слагаемому  $\mathbf{E}_{\parallel}$ , обусловленному протеканием тока вдоль центрального горизонтального участка контура.

Найдем еще поверхностную плотность электрического заряда. Поскольку распределение заряда определяется только протеканием переменного тока по участкам контура, перпендикулярным границе раздела сред, то в данном примере распределение заряда будет одинаковым для любой конфигурации центральной части контура.

Для выбранной геометрии контура вертикальная компонента векторного потенциала и связанная с ним поверхностная плотность заряда могут быть представлены простыми алгебраическими выражениями. Так, для величины  $\dot{\sigma}$  найдем

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -2 \frac{i\omega \varepsilon_e \varepsilon_0 \mu_0}{4\pi} j_0 \int_h^\infty \left[ (z_M^2 + \rho_2^2)^{-1/2} - (z_M^2 + \rho_1^2)^{-1/2} \right] dz_M = \\ &= \frac{i\omega \varepsilon_e \varepsilon_0 \mu_0}{2\pi} j_0 \ln \frac{h + (h^2 + \rho_2^2)^{1/2}}{h + (h^2 + \rho_1^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Здесь  $\rho_{1,2}^2 = (x_Q - x_{1,2})^2 + (y_Q - y_{1,2})^2$ , где  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  – координаты на плоской поверхности двух вертикальных проводников, вдоль которых ток направлен соответственно к центральному участку контура и от него.

Результаты расчета по (1.55) показаны на рис. 1.10 в виде линий  $\sigma/\sigma_m = \text{const}$ , где  $\sigma_m$  – максимальное значение поверхностной плотности распределенного электрического заряда.

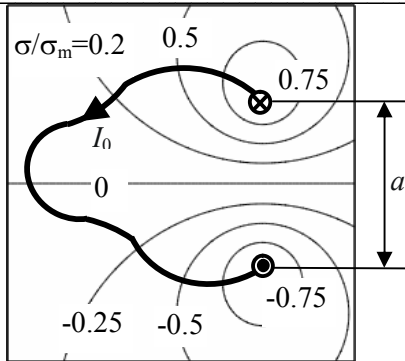


Рис. 1.10. Распределение поверхностной плотности электрического при  $a/h = 10/\sqrt{2}$

#### 1.4. Трехмерное квазистационарное электромагнитное поле произвольного контура: учет токов смещения в диэлектрической среде

Как отмечалось, в квазистационарном приближении пренебрегают током смещения по сравнению с током проводимости. Вполне корректно для локальных значений такое сравнение можно выполнить в электропроводной среде. В диэлектрической среде существует только ток смещения, причем величина плотности этого тока однозначно связана с наличием переменного электрического поля  $\dot{\mathbf{j}}_D = i\omega\epsilon\mathbf{\dot{E}}$  и не может иметь нулевое значение, если напряженность электрического поля не равна нулю. Поэтому пренебрежение токами смещения в диэлектрической области требует специального обоснования.

Сравнение локальных значений плотностей токов проводимости и токов смещения может быть выполнено не только в электропроводной среде, но и на поверхности раздела сред. При этом, как будет показано, можно ввести малый параметр  $\epsilon$ , используя известное решение волновой задачи, выделить в выражении для векторного потенциала

члены, которые определяют величину потенциальной составляющей напряженности электрического поля. При этом будем учитывать токи смещения в диэлектрической области, но волновыми явлениями будем пренебрегать. Такой подход в квазистационарном приближении позволит найти в диэлектрической среде не только решение для распределения магнитного поля, но и решение для скалярного потенциала и напряженности электрического поля. Учет токов смещения позволяет при переходе от волновой к квазистационарной задаче найти аналитические зависимости не только для непотенциальной  $\dot{\mathbf{E}}_{eV} = -i\omega\dot{\mathbf{A}}_e$ , но и потенциальной  $\dot{\mathbf{E}}_{eP} = -\text{grad } \phi$  составляющей напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_{eV} + \dot{\mathbf{E}}_{eP}$  [10].

Теперь условие калибровки Лоренца в диэлектрической среде вместо (1.21) необходимо записывать в общем виде (1.4) с учетом токов смещения:

$$z > 0: \text{div } \dot{\mathbf{A}}_e + i\omega\mu_0\varepsilon_e\varepsilon_0\dot{\phi}_e = 0. \quad (1.56)$$

В качестве граничного условия также вместо (1.23), (1.24) необходимо использовать общее граничное условие из (1.6) непрерывности нормальных компонент плотности тока или аналогичное условие для нормальных вектора электрического смещения:

$$\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{j}_D^+ - \mathbf{j}^-) = 0. \quad (1.57)$$

Здесь учтено, что в диэлектрической области протекают только токи смещения  $\mathbf{j}_I^+ = \mathbf{j}_D^+$ , а в электропроводной среде – только токи проводимости  $\mathbf{j}_I^- = \mathbf{j}^-$ .

Из (1.56) следует, что если в диэлектрической области учитывать ток смещения, то, как и в электропроводной области, для решения задачи достаточно найти распределение векторного потенциала.

На основании граничного условия (1.57) сравним значения нормальных компонент напряженностей полей по

разные стороны от границы раздела сред. Отношение этих компонент удовлетворяют следующему условию:

$$|\mathbf{e}_z \cdot E^+| / |\mathbf{e}_z \cdot E^-| = |\tilde{\gamma}_e| / |\tilde{\gamma}_i| = \frac{\omega \epsilon \epsilon_0}{\gamma} \ll 1. \quad (1.58)$$

Ранее при пренебрежении токами смещения в диэлектрической области отношение нормальных компонент напряженности электрического поля принималось равным нулю. Теперь при учете токов смещения в квазистационарной постановке – это малый параметр.

Члены, содержащие множителем отношение комплексных электропроводностей  $\tilde{\gamma}_e / \tilde{\gamma}_i$ , необходимо учитывать только при нахождении напряженности трехмерного электрического поля в диэлектрической среде. Действительно, из (1.56) следует, что если  $\operatorname{div} \dot{A}_e$  пропорционально малому параметру (1.58)  $\operatorname{div} \dot{A}_e \sim \tilde{\gamma}_e / \tilde{\gamma}_i$ , то скалярный потенциал  $\phi_e = i\omega \operatorname{div} \dot{A}_e / k_e^2 \sim 1/\mu_0 \gamma$  такого множителя уже не содержит. В противоположность этому в электропроводной среде, если  $\operatorname{div} \dot{A}_i$  содержит слагаемое с малым параметром (1.58), то соответствующее слагаемое скалярного потенциала  $\phi_i$  по-прежнему будет содержать множителем малый параметр. Поэтому в электропроводной среде члены с малым параметром (1.58) в квазистационарной постановке можно не учитывать и полученные результаты для области  $z < 0$  останутся справедливыми.

Рассмотрим подробнее векторный потенциал в диэлектрической области  $z > 0$ . В подынтегральных функциях Фурье-образа векторного потенциала (1.17) сохраним члены, содержащие малый параметр  $\tilde{\gamma}_e / \tilde{\gamma}_i$  в первой степени. В этом случае имеем

$$\dot{Y}_{e1}^* = \dot{V}_{e1}^* = \frac{e^{-9(z-z_{M1})}}{w(\vartheta)},$$

$$\dot{Y}_{e1}^* = \dot{V}_{e1}^* - \frac{\tilde{\gamma}_e}{\tilde{\gamma}_i} \dot{P}_{e1}^* = i \cos \psi \frac{e^{-9(z-z_{M1})}}{w(\vartheta)} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_e}{\tilde{\gamma}_i} \frac{\vartheta + \mu q_i}{\mu \vartheta} \right), \quad (1.59)$$

$$Y_{e2}^* = -\frac{\tilde{\gamma}_e}{\tilde{\gamma}_i} \dot{P}_{e2}^* = -\frac{\tilde{\gamma}_e}{\tilde{\gamma}_i} \frac{q_i e^{-9(z-z_{M1})}}{\vartheta^2}.$$

Учитывая члены с малым параметром, дополним выражение для векторного потенциала (1.33) еще одним слагаемым

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_{eV} + \dot{\mathbf{A}}_{eP} = (\dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2) + \dot{\mathbf{A}}_{eP}, \quad (1.60)$$

где  $\dot{\mathbf{A}}_{eV}$  – значение векторного потенциала без учета токов смещения,  $\dot{\mathbf{A}}_{eP}$  – величина, которая пропорциональна малому параметру (1.58) и определяется функциями  $P_{e1}^*$  и  $P_{e2}^*$  в (1.59).

В квазистационарном приближении в суммарной величине векторного потенциала слагаемое  $\dot{\mathbf{A}}_{eP}$  может не учитываться, однако его необходимо учитывать для определения скалярного потенциала  $\dot{\phi}_e$ .

Слагаемое  $\dot{\mathbf{A}}_{eV}$  в (1.60), как было показано ранее, удовлетворяет условию  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_{eV} = 0$ . Поэтому в области  $z > 0$  скалярный потенциал  $\dot{\phi}_e$  и составляющая напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_{eP}$  определяются слагаемым  $\dot{\mathbf{A}}_{eP}$ , который содержит малый параметр (1.58).

Из (1.15) и (1.59) видно, что  $\dot{\mathbf{A}}_{eP}$  имеет единственную компоненту, которая перпендикулярна границе раздела сред. Поэтому Фурье-образ скалярного потенциала  $\dot{\phi}_e^*$  можно записать как

$$\dot{\phi}_e^* = \frac{I_0}{4\pi^2\gamma} \oint_l \left[ \frac{\partial \dot{P}_{e1}^*}{\partial z} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) + \frac{\partial \dot{P}_{e2}^*}{\partial z} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \right] dl. \quad (1.61)$$

Обратное преобразование Фурье (1.19) дает следующие выражения для функций в (1.61):

$$\frac{\partial \dot{P}_{e1}}{\partial z} = \frac{2\pi}{\mu} \cos\theta \int_0^{\infty} \frac{\vartheta + \mu q_i}{w(\vartheta)} \exp(-\vartheta(z - z_{M1})) J_1(\vartheta\rho) \vartheta d\vartheta, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial \dot{P}_{e2}}{\partial z} = -2\pi \int_0^{\infty} q_i \exp(-\vartheta(z - z_{M1})) J_0(\vartheta\rho) d\vartheta.$$

Используем условие замкнутости исходного контура с током. Для этого введем вспомогательную функцию

$$\dot{G}_{e1} = \frac{2\pi}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{\vartheta + \mu q_i}{w(\vartheta)} \exp(-\vartheta(z - z_{M1})) J_0(\vartheta\rho) d\vartheta, \quad \text{для которой}$$

справедливо равенство  $\frac{\partial \dot{P}_{e1}}{\partial z} = \frac{\partial \dot{G}_{e1}}{\partial x_{M1}}$ , и представим скалярный

потенциал в виде

$$\dot{\phi}_e = \frac{I_0}{4\pi^2\gamma} \oint_l \left\{ \left[ \frac{\partial \dot{G}_{e1}}{\partial x_{M1}} (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) + \frac{\partial \dot{G}_{e1}}{\partial z_{M1}} (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \right] - \left[ \left( \frac{\partial \dot{G}_{e1}}{\partial z_{M1}} + \frac{\partial \dot{P}_{e2}}{\partial z} \right) (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \right] \right\} dl. \quad (1.63)$$

В (1.63) учтено, что  $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}) = (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_{\parallel})$  и  $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) = -(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z)$ .

Интеграл по замкнутому контуру от выражения в квадратных скобках равен нулю. В результате после преобразований окончательно получим выражение для скалярного потенциала:

$$\dot{\phi}_e = i\omega \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint_l (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \dot{G}_e dl. \quad (1.64)$$

Видно, что скалярный потенциал отличен от нуля только, если контур с током не содержит участков, направленных перпендикулярно граничной поверхности.



Найденные векторный (1.33) и скалярный (1.64) потенциалы вполне определяют напряженность трехмерного электрического поля в произвольной точке верхнего полупространства:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{E}}_e &= -i\omega\dot{\mathbf{A}}_e - \text{grad}\dot{\varphi}_e = -i\omega\frac{\mu_0\dot{I}_0}{4\pi} \int_l \left\{ \frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_1}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \left[ \mathbf{t}_1 \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} - (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \nabla \dot{G}_e \right] \right\} dl = \\
 &= -i\omega\frac{\mu_0\dot{I}_0}{4\pi} \int_l \left\{ \frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_1}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \left[ \mathbf{t}_{\parallel} \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} - (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_p \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial p} \right] \right\} dl = \quad (1.65) \\
 &= -i\omega\frac{\mu_0\dot{I}_0}{4\pi} \int_l \left( \frac{\mathbf{t} - \mathbf{t}_1}{r} - \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{G}_e] \right) dl
 \end{aligned}$$

Отметим, что в последнем выражении третье слагаемое подынтегральной функции, которое зависит от свойств электропроводной среды и частоты поля, не имеет компоненты, перпендикулярной к границе раздела сред при любых конфигурациях и ориентациях исходного контура с током.

Как и для других векторов поля, выражение для напряженности электрического поля представлено в виде трех слагаемых:  $\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2$ . Первые два не зависят от свойств электропроводной среды и дают индуцированное электрическое поле исходного переменного тока и его зеркального отражения от границы раздела сред. Третье слагаемое зависит от свойств электропроводной среды и частоты поля, но не имеет компоненты, перпендикулярной к границе раздела сред при любых конфигурациях и ориентациях исходного контура с током.

Сравнение тангенциальных компонент напряженности электрического поля в (1.44) в электропроводной и (1.65) в диэлектрической областях на границе раздела сред при  $z = 0$  показывает их одинаковые значения. Тем самым подтверждается, что найденное решение с учетом плотности тока смещения в диэлектрической области удовлетворяет

необходимым условиям задачи сопряжения для диэлектрической и электропроводной сред.

### 1.5. Выводы к главе 1

1. На основе известного решения задачи о поле излучающего гармонического токового диполя и использования условия замкнутости контуров с током представлено аналитическое решение задачи расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля переменного тока, протекающего вдоль контура, расположенного вблизи плоской поверхности электропроводного намагничивающегося тела, без ограничений на геометрию контура, электрофизические свойства среды и частоту поля. Получены выражения в виде квадратур для определения векторного и скалярного потенциалов, индукции магнитного и напряженности электрического полей в диэлектрической (1.33), (1.34), (1.64), (1.65) и электропроводной (1.39), (1.43), (1.44) областях.

2. В квазистационарном приближении в случае плоской границы раздела диэлектрической и электропроводной сред в электропроводном полупространстве напряженность электрического поля и плотность тока не содержат составляющей, перпендикулярной граничной поверхности, что справедливо для любого распределения системы исходных токов в диэлектрической среде и произвольной зависимости токов от времени.

3. Физической причиной отсутствия вертикальных компонент плотности тока и напряженности электрического поля в электропроводном полупространстве является то, что на электропроводной поверхности формируется распределение электрического заряда, поле которого в электропроводном полупространстве полностью компенсирует вертикальную компоненту внешнего индуцированного электрического поля. Соответственно на поверхности в диэлектрической области вертикальная компонента

напряженности электрического поля вдвое превышает вертикальную компоненту индуцированного поля источников. Поверхностный заряд создает дополнительную составляющую электрического поля в электропроводной области в направлениях, параллельных границе раздела сред.

4. Перпендикулярная компонента напряженности электрического поля на поверхности диэлектрической среды и поверхностная плотность электрического заряда не зависят от свойств электропроводной среды. Они определяются только вертикальной компонентой индуцированного электрического поля исходной системы токов в диэлектрической среде при их произвольной зависимости от времени.

## **ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ**

В предыдущей главе представлено общее аналитическое решение задачи об определении трехмерного квазистационарного поля тока произвольного контура, протекающего вблизи электропроводного полупространства. При этом не накладывались ограничения на электрофизические свойства среды и частоту поля. Вместе с тем использование более простых приближенных математических моделей решают ряд важных вопросов. В методическом отношении существенным является определение места используемой приближенной модели в рамках точного решения. Появляется возможность определить действительную погрешность приближенных моделей. В ряде случаев приближенные модели дают возможность получить наглядное физическое представление о протекающих электромагнитных процессах. Разрабатываемые на основе полученного точного решения приближенные модели позволяют использовать обоснованные допущения. Наконец, приближенные модели являются более экономичными с точки зрения необходимого объема вычислений.

Все эти обстоятельства свидетельствуют о важности анализа и разработки приближенных математических моделей для расчета трехмерных электромагнитных полей. Перечисленные вопросы присутствуют в настоящей главе при исследовании приближенных математических моделей трехмерных синусоидальных электромагнитных полей. Определяется место наиболее простой модели идеального

скин-эффекта в общем точном решении задачи. Развивается метод разложения точных выражений в асимптотические ряды на основе введения малого параметра, который расширяет понятие сильного скин-эффекта на явления проникновения неоднородного электромагнитного поля в электропроводное полупространство. Решается методический вопрос о более сильном затухании в электропроводной среде неоднородного поля по сравнению с однородным. На основе разложения в асимптотические ряды обосновывается возможность дальнейшего упрощения расчетов с использованием модели локально двумерного поля.

### **2.1. Электромагнитное поле пространственного контура с током над плоской поверхностью проводящего тела с идеальным скин-эффектом**

Рассмотрим вначале некоторые вопросы формирования электромагнитного поля и методов его расчета в случае очень сильного (идеального) скин-эффекта, при котором можно считать, что глубина проникновения поля  $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\gamma)}$  ничтожно мала по сравнению с любыми характерными размерами  $L$  электромагнитной системы, в том числе и с минимальным расстоянием токового контура до поверхности электропроводного тела. Это имеет место при быстропотекающих импульсных или высокочастотных процессах в электропроводных телах. В этом случае электромагнитное поле в объеме тела отсутствует, а ток в нем протекает в тонком поверхностном слое. Формулировка задач расчета поля при выполнении условия  $\delta/L \rightarrow 0$  является наиболее простой и проблема разработки методов расчета поля в этом случае достаточно хорошо исследована [6, 28]. Вместе с тем здесь математические модели являются определенным эталоном для более сложных моделей. Одновременно практические потребности разработки

устройств с конкретными условиями распределения полей при сильном скин-эффекте по-прежнему вызывают интерес к этому вопросу [29].

Если длина электромагнитной волны значительно превышает характерные размеры системы, то процесс в расчетах поля можно считать квазистационарным. В этом случае при сильном скин-эффекте для нахождения поля вне проводящего тела необходимо решать соответствующую стационарную задачу для идеально проводящего тела той же формы [30, 31]. При заданном распределении плотности тока источников  $\mathbf{j}_0$  или магнитного поля этих источников  $\mathbf{H}_0$  формулировка краевой задачи сводится к заданию уравнений Максвелла для напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  и условию отсутствия нормальной составляющей поля на поверхности [23]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль к поверхности электропроводного тела.

Краевая задача (2.1) вполне определяет существование единственного решения. В квазистационарной постановке плотность тока источников, как следует из первого уравнения (2.1), должна удовлетворять условию непрерывности  $\operatorname{div}\mathbf{j}_0 = 0$ , что в случае линейного тока соответствует условию замкнутости контура с током. Рассмотрение незамкнутых исходных контуров с током в квазистационарной постановке, как показано в [23], является некорректным. Это приводит, в частности, к нарушению условия непрерывности поверхностной плотности тока и неверному определению его величины. Как следствие, неверными оказываются и такие характеристики, как магнитное давление и поверхностная плотность джоулевых потерь.

Для анализа электромагнитного поля в тонком поверхностном слое проводящего тела справедливой обычно

является известная модель диффузии плоского поля в проводящее полупространство [8]. В такой модели исходной величиной выступает тангенциальная составляющая напряженности поля на границе  $\mathbf{H}_\tau$  (рис. 2.1, а), локальное значение которой для тела произвольной формы находится из решения внешней задачи (2.1).

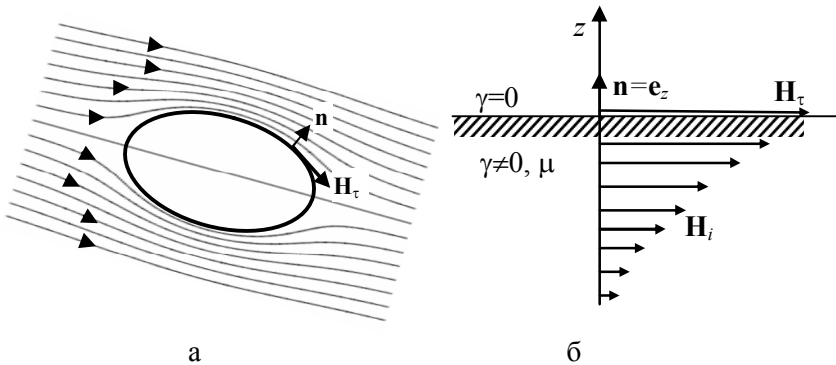


Рис. 2.1. Модель идеального скин-эффекта для учета проникновения поля в электропроводное тело

Проникновение однородного электромагнитного поля в электропроводное полупространство (рис. 2.1, б) описывается известным распределением напряженностей электрического  $\dot{\mathbf{E}}_i$  и магнитного  $\dot{\mathbf{H}}_i$  полей: [8]

$$\dot{\mathbf{E}}_i = \dot{\mathbf{E}}_\tau e^{-pz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_i = \dot{\mathbf{H}}_\tau e^{-pz}, \quad (2.2)$$

причем векторы поля связаны импедансным граничным условием Леонтовича

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = \zeta [\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_\tau]. \quad (2.3)$$

Здесь  $p = \sqrt{i\omega\mu_0\gamma}$  – постоянная распространения, обратная величина действительного значения которой  $\delta = 1/\text{Re}(p)$  дает глубину проникновения поля. Поверхностный импеданс

$\zeta = \sqrt{i\omega\mu\gamma} / \gamma$  в данном случае связывает значения касательных компонент поля  $\dot{\mathbf{E}}_\tau, \dot{\mathbf{H}}_\tau$  не только на поверхности раздела диэлектрической и электропроводной сред, но и во всем полупространстве.

Протекание тока в тонком поверхностном слое позволяет ввести поверхностную плотность тока  $\dot{\mathbf{j}}_S$ :

$$\dot{\mathbf{j}}_S = \int_{-\infty}^0 \dot{\mathbf{j}} dz = \int_{-\infty}^0 \gamma \dot{\mathbf{E}}_\tau e^{-\rho z} dz = \frac{\dot{\mathbf{E}}_\tau}{\zeta}, \quad (2.4)$$

которая в силу граничного условия в (1.7) связана с величиной тангенциальной составляющей поля  $\mathbf{H}_\tau$  и удовлетворяет условию непрерывности

$$\dot{\mathbf{j}}_S = \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_\tau, \quad \text{div} \dot{\mathbf{j}}_S = 0. \quad (2.5)$$

В настоящей работе предметом изучения является, в первую очередь, система с плоской границей раздела сред и замкнутым контуром с током в качестве исходного источника поля. Для такой системы решением задачи (2.1) в области над поверхностью электропроводного тела  $z > 0$  будет магнитное поле, созданное током  $I_0$  исходного контура и током зеркально отраженного контура [5, 23] (рис. 2.2).

Выражение для напряженности поля  $\dot{\mathbf{H}}$  в произвольной точке  $Q$  ( $z > 0$ ), созданная двумя контурами с током, записывается в виде

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{I_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl, \quad (2.6)$$

где  $\dot{\mathbf{A}}$  – векторный потенциал.

Учитывая, что в точках наблюдения  $Q$  на плоской поверхности раздела сред векторами, соединяющими произвольную точку  $Q$  с элементами контуров  $t dl$  и  $t_1 dl$ , являются  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + h \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\rho} - h \mathbf{e}_z$ , напряженность поля может



быть представлена через координаты только исходного контура в виде

$$\dot{\mathbf{H}}(z=0) = \frac{\dot{I}_0}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \oint_l \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{t} \times \mathbf{r})}{r^3} dl = \frac{\dot{I}_0}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \oint_l \frac{h \mathbf{t}_{\parallel} - \boldsymbol{\rho} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)}{r^3} dl. \quad (2.7)$$

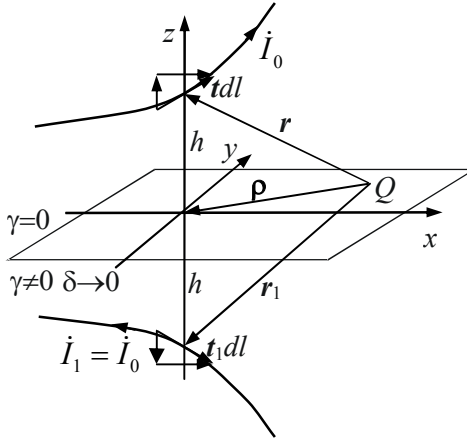


Рис. 2.2. Исходный и зеркально отраженный от границы раздела сред контуры с током

Из (2.7) непосредственно следует, что нормальная компонента напряженности поля отсутствует  $\dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{e}_z = 0$  и это свидетельствует, что (2.6) действительно является решением сформулированной задачи (2.1) для плоской границы раздела сред.

Отметим, что выражение (2.6) является частным случаем представленного в предыдущей главе решения квазистационарной задачи (для идеального скин-эффекта в (1.33), (1.34) необходимо оставить только два первых слагаемых).

Из (2.7) находим поверхностную плотность тока:

$$\mathbf{j}_S = \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}(z=0) = \mathbf{e}_z \times \left[ -\frac{\dot{I}_0}{2\pi} \oint_l \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \right] = \frac{2}{\mu_0} \mathbf{e}_z \times \text{rot} \dot{\mathbf{A}}_0, \quad (2.8)$$

где  $\dot{\mathbf{A}}_0$  – векторный потенциал поля исходного тока.

В рамках представлений о вторичных источниках [5] на границе раздела сред не только протекает поверхностный электрический ток, но может быть распределен свободный электрический заряд с поверхностной плотностью  $\dot{\sigma}$  и связанный с ним поляризационный заряд с поверхностной плотностью  $\dot{\sigma}_p = -\dot{\sigma}(\epsilon_e - 1)/\epsilon_e$ . В поверхностном слое протекает ток проводимости  $\dot{\mathbf{j}}$ , а намагничивание среды учитывается плотностью тока намагничивания  $(\mu - 1)\dot{\mathbf{j}}$ . Поверхностной плотностью тока для этих составляющих являются  $\dot{\mathbf{j}}_S$  и  $(\mu - 1)\dot{\mathbf{j}}_S$ . Кроме того, изменение скачком вектора намагниченности от  $(\mu - 1)\dot{\mathbf{H}}_\tau$  в нижнем до нуля в верхнем полупространствах обуславливает введение поверхностной плотности тока намагничивания  $\dot{\mathbf{j}}_{Sm} = -(\mu - 1)\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_\tau$ . Из (2.5) следует, что  $(\mu - 1)\dot{\mathbf{j}}_S = (\mu - 1)\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_\tau = -\dot{\mathbf{j}}_{Sm}$ , т.е. поверхностная плотность распределенного тока намагничивания противоположна по знаку другой составляющей поверхностной плотности тока намагничивания  $\dot{\mathbf{j}}_{Sm}$ . Поэтому в модели с вторичными источниками остается только одна составляющая  $\dot{\mathbf{j}}_S$ .

Все источники: исходный контур с током  $\dot{I}_0$ , поверхностный ток с плотностью  $\dot{\mathbf{j}}_S$  и распределенный поверхностный заряд  $\dot{\sigma} + \dot{\sigma}_p$  – вместе в вакууме во всем пространстве, включая и область  $z < 0$ , где суммарное поле равно нулю, создают электромагнитное поле, эквивалентное полю в системе с реальными средами.

Простое аналитическое решение рассматриваемой задачи позволяет получить ясное представление о формировании поля всех источников.

До сих пор рассматривалось только магнитное поле в ограниченной области пространства над поверхностью электропроводного тела при  $z > 0$ , для определения которого достаточно было ввести «фиктивный» ток зеркального отраженного контура. В этом случае векторный потенциал записывается как

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) dl. \quad (2.9)$$

В действительности ток, помимо исходного контура, протекает только по поверхности электропроводного тела. Поверхностная плотность тока не содержит компоненты, перпендикулярной границе раздела сред. В результате векторный магнитный потенциал всей такой системы токов во всем пространстве, включая и область  $z < 0$ , будет

$$\dot{\mathbf{A}}' = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_S = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_l \frac{\mathbf{t}}{r} dl + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j}_S}{r} dS. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) видно, что каждое из слагаемых  $\dot{\mathbf{A}}_k$  удовлетворяет условию непрерывности  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}_k = 0$ , а сами же векторные потенциалы  $\dot{\mathbf{A}}$  и  $\dot{\mathbf{A}}'$  отличаются друг от друга как по величине, так и по области определения. Потенциал  $\dot{\mathbf{A}}$  справедлив в верхнем полупространстве  $z > 0$ , а потенциал  $\dot{\mathbf{A}}'$  – во всем пространстве. Так как оба векторных потенциала определяют одно и то же магнитное поле  $\text{rot } \dot{\mathbf{A}}' = \text{rot } \dot{\mathbf{A}} = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}$ , то потенциалы могут отличаться на градиент скалярной функции:  $\dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{A}}' = \text{grad } \psi$ .

Из (2.10) вытекает очевидное равенство  $\dot{\mathbf{A}}_S \cdot \mathbf{e}_z = 0$ , откуда следует, что вертикальная компонента суммарного векторного потенциала определяется только током исходного контура  $\dot{A}'_z = \dot{\mathbf{A}}' \cdot \mathbf{e}_z = \dot{A}_{0z}$  и будет отлична от нуля, если исходный контур имеет участки, направленные перпендикулярно границе раздела сред. При этом в силу

условия непрерывности нормальная составляющая  $\dot{A}_{0z}$  не изменяется при переходе через границу раздела сред  $\dot{A}_{0z}^+ = \dot{A}_{0z}^-$ .

В области проводящей среды  $z < 0$  напряженность магнитного поля равна нулю  $\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}' = 0$ . Отсюда

вытекает, что в этой области векторное поле  $\dot{\mathbf{A}}'$  является потенциальным, и для него может быть введен скалярный потенциал  $\dot{\mathbf{A}}' = -\text{grad } \phi'$ . Из условия  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}' = 0$  скалярный потенциал  $\phi'$  удовлетворяет уравнению Лапласа, а его нормальная производная на границе раздела сред  $z = 0 - 0$  определяется нормальной компонентой векторного потенциала. Отсюда следует, что для скалярного потенциала  $\phi'$  при  $z < 0$  справедлива задача Неймана, решение которой существует и определяется с точностью до произвольной постоянной:

$$\begin{cases} z < 0: \Delta \phi' = 0, \\ z = 0 - 0: \frac{\partial \phi'}{\partial z} = -\dot{A}_{0z}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Электромагнитное поле, помимо напряженности магнитного поля  $\dot{\mathbf{H}}$ , характеризуется также напряженностью электрического поля  $\dot{\mathbf{E}} = -i\omega \dot{\mathbf{A}} - \text{grad } \phi$ , где  $\phi$  – скалярный потенциал, который в данном случае определяется электрическими зарядами на поверхности.

Напряженность электрического поля, как и напряженность магнитного поля, в области  $z < 0$  равна нулю  $\dot{\mathbf{E}} = -i\omega \dot{\mathbf{A}}' - \text{grad } \phi = 0$ . Выполняя для последнего выражения операцию  $\text{div}$  и опять учитывая  $\text{div } \dot{\mathbf{A}}' = 0$ , находим, что скалярный потенциал  $\phi$  тоже удовлетворяет уравнению Лапласа. Последнее утверждение следует также из представления, что скалярный потенциал  $\phi$  является

потенциалом электрических зарядов, сосредоточенных на граничной поверхности. Отсутствие электрического поля позволяет аналогично предыдущему случаю сформулировать краевую задачу для скалярного потенциала  $\dot{\phi}$ :

$$\begin{cases} z < 0: \Delta\dot{\phi} = 0, \\ z = 0 - 0: \frac{\partial\dot{\phi}}{\partial z} = -i\omega\dot{A}_{0z}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Из сравнения (2.11) и (2.12) следует, что скалярные потенциалы связаны простым соотношением:

$$\dot{\phi}' = i\omega\dot{\phi}. \quad (2.13)$$

Одинаковое пространственное распределение потенциалов, выраженное равенством (2.13), по сути, является следствием отсутствия напряженности как электрического, так и магнитного полей в электропроводной среде при  $z < 0$ .

В частном случае для плоского исходного контура с током, который лежит в плоскости, компланарной граничной поверхности, вертикальная компонента векторного потенциала равна нулю  $A_{0z} = 0$ . Отсюда решения краевых задач (2.11) и (2.12), регулярных на бесконечности, дают  $\dot{\phi}' = 0$ ,  $\dot{\phi} = 0$ . Первое равенство означает, что при  $z < 0$  векторный потенциал поверхностной плотности токов равен по величине и противоположен по направлению векторному потенциалу исходного тока ( $z < 0: \dot{\mathbf{A}}_0 = -\dot{\mathbf{A}}_S$ ). Равенство нулю скалярного потенциала  $\dot{\phi}$  свидетельствует об отсутствии в данном случае зарядов на поверхности раздела сред.

Рассмотрим теперь с позиции вторичных источников векторный и скалярный потенциалы в области над границей раздела сред  $z > 0$ , где протекает исходный ток  $\dot{I}_0$  по контуру в общем случае пространственной конфигурации.

В области  $z > 0$  для слагаемого векторного потенциала в (2.10), связанного с поверхностным током  $\dot{\mathbf{j}}_S$ , справедливо условие симметрии  $\dot{\mathbf{A}}_S(x, y, z) = \dot{\mathbf{A}}_S(x, y, -z)$ . Тогда с учетом, что  $\mathbf{A}'(x, y, -z) = -\text{grad}\phi' \big|_{x, y, -z}$ , векторный потенциал над проводящей поверхностью можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{A}}' = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_S = \dot{\mathbf{A}}_0(x, y, z) - \dot{\mathbf{A}}_0(x, y, -z) - \text{grad}\phi' \big|_{x, y, -z}, \quad (2.14)$$

где каждое из слагаемых считается известным. Из (2.14) видно, что  $\text{grad}\phi'$  представляет собой ту потенциальную функцию, на которую отличаются векторные потенциалы  $\dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{A}}' = \text{grad}\phi'$ .

Так как скалярный потенциал  $\phi$  обусловлен электрическими зарядами, распределенными на граничной поверхности, то он удовлетворяет уравнению Лапласа не только в области проводящего тела, но и при  $z > 0$ . В этой области нормальная к границе раздела сред компонента напряженности электрического поля, созданного поверхностным зарядом  $\dot{E}_{\sigma z}^+ = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$ , равна и противоположна по знаку вертикальной компоненте поля электрических зарядов на границе под поверхностью, где она компенсируется напряженностью внешнего индуцированного электрического поля:

$$\dot{E}_{\sigma z}^+ = -\dot{E}_{\sigma z}^- = -i\omega\dot{A}_{0z}. \quad (2.15)$$

Отсюда в области  $z > 0$  для скалярного потенциала электрических зарядов имеем краевую задачу Неймана:

$$\begin{cases} z > 0: & \Delta\phi = 0, \\ z = 0+0: & \frac{\partial\phi}{\partial z} = i\omega\dot{A}_{0z}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Наконец, последней характеристикой электромагнитного поля, которая с позиций вторичных

источников характеризует рассматриваемую систему, является поверхностная плотность электрического заряда  $\dot{\sigma}$ . Ее величина легко определяется из граничного условия  $\dot{\sigma} + \dot{\sigma}_p = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}(\varepsilon_e - 1)/\varepsilon_e = \varepsilon_0(\dot{E}_{\sigma z}^+ - \dot{E}_{\sigma z}^-)$ . В свою очередь, вертикальная компонента напряженности электрического поля на поверхности раздела сред определяется как сумма поля электрических зарядов и внешнего индуцированного электрического поля  $\dot{E}_z^+ = \dot{E}_{\sigma z}^+ - i\omega\dot{A}_{0z}$ . С учетом (2.15) имеем

$$\frac{\dot{\sigma}}{\varepsilon_e \varepsilon_0} = \dot{E}_z^+ = -2i\omega\dot{A}_{0z}. \quad (2.17)$$

Полученное выражение (2.17) полностью повторяет найденное в предыдущем разделе выражение (1.51). Однако там результат был получен с использованием решения волновой задачи и его следствия в квазистационарном приближении о нулевом значении вертикальной компоненты плотности тока в электропроводном полупространстве. Здесь приведено полное решение задачи идеального скин-эффекта, где индуцированный ток протекает только по поверхности тела и вертикальная компонента плотности тока в принципе отсутствует. Совпадение выражений подтверждает также и вывод о том, что (2.17) справедливо независимо от удельной электропроводности и относительной магнитной проницаемости среды.

## 2.2. Метод асимптотического разложения в задаче расчета трехмерного квазистационарного электромагнитного поля

Рассмотрим случай тоже достаточно сильного скин-эффекта в электропроводном теле с плоской границей раздела сред. Однако в отличие от предыдущего подраздела, где анализировался идеальный скин-эффект, считается, что глубина проникновения поля является ограниченной величиной по сравнению с характерными расстояниями в

электромагнитной системе. При этом под сильным скин-эффектом понимается его расширенное определение, когда не только глубина проникновения переменного поля мала по сравнению с характерными размерами электропроводного тела, но малой величиной является также отношение глубины проникновения к характерным размерам всей электромагнитной системы, включая размеры контура с током и расстояния от контура до границы раздела сред.

В основу положим точное решение задачи об электромагнитном поле гармонического тока произвольного контура с учетом вихревых токов в электропроводном полупространстве.

Основанием к разработке специализированного метода служит довольно значительный объем необходимых вычислений по полученным аналитическим выражениям, что связано с определением контурных интегралов от функций, содержащих несобственные интегралы от специальных функций. Расчет становится особенно трудоемким для обратных задач теории поля и решения задач оптимизации электромагнитных систем. Кроме того, наличие приближенного асимптотического решения позволяет проанализировать особенности затухания неоднородного внешнего поля в электропроводной среде.

### 2.2.1. Разложение в асимптотический ряд функции $\dot{G}_e$

В диэлектрической области, где протекает переменный ток контура (рис.1.1), векторный потенциал в калибровке Лоренца  $\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2$  (1.33), индукция магнитного поля  $\dot{\mathbf{B}}_e = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{B}}_0 + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2$  (1.34) и напряженность электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2$  (1.65) представлены суммой трех слагаемых. Первые два слагаемых не зависят от свойств электропроводной среды и определяются переменным током исходного контура и током



контура, зеркально отраженного от границы раздела сред. Третьи слагаемые во всех векторных полях, как и скалярный потенциал  $\dot{\phi}_e$  (1.64), полностью определяются единственной функцией  $G_e$  (1.29) следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}_2 &= -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \mathbf{t}_1 \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} dl, \\ \dot{\mathbf{B}}_2 &= \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \mathbf{t}_1 \times \nabla \left( \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) dl, \\ \dot{\mathbf{E}}_2 &= i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{G}_e] dl, \\ \dot{\phi}_e &= i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \dot{G}_e dl.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Функция  $\dot{G}_e$  зависит от глубины проникновения поля

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu \gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{|k|}$  и ее можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{G}_e &= 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M_1})} J_0(\vartheta \rho_{QM})}{\vartheta + \frac{1}{\mu} \sqrt{\vartheta^2 + i\omega \mu \mu_0 \gamma}} d\vartheta = \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M_1})} J_0(\vartheta \rho_{QM})}{\vartheta + \sqrt{\left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^2 + i\left(\frac{\sqrt{2}}{\mu \delta}\right)^2}} d\vartheta.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Из (2.19) видно, что подынтегральное выражение и сама функция  $\dot{G}_e$  зависят от компонент вектора  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{M_1} - \mathbf{r}_Q$ , который соединяет точку наблюдения  $Q$  с точкой  $M_1$  на зеркально отраженном контуре. В знаменатель функции  $\dot{G}_e$  входят отдельно произведение глубины проникновения поля

на относительную магнитную проницаемость  $\mu$  и относительная магнитная проницаемость  $\mu$ .

Так как рассматривается сильный поверхностный эффект, то малым параметром, который характеризует влияние конечной глубины проникновения поля на распределение поля, определим как отношение двух размерных величин  $\mu\delta$  и расстояние  $r_1$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}r_1} = \frac{\mu}{|k|r_1} \quad (2.20)$$

Для немагнитной среды ( $\mu = 1$ ) этот параметр совпадает с отношением глубины проникновения поля к расстоянию  $r_1$ . Для ферромагнитных материалов величина параметра  $\varepsilon_1$  оказывается значительно больше. Однако и в этом случае будем рассматривать ситуацию, когда  $\varepsilon_1$  является малым параметром, что будет иметь место при больших частотах поля.

При интегрировании вдоль контура в (2.18)  $\varepsilon_1$  является переменной величиной, зависящей от текущего положения точки истока. Поэтому будем использовать также единый параметр  $\varepsilon$ , для которого глубина проникновения поля нормирована на общий характерный размер  $\lambda$ , например, на наименьшее расстояние между точкой наблюдения в диэлектрической области и точками истока на зеркально отраженном контуре:

$$\varepsilon = \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}\lambda} = \frac{\mu}{\lambda\sqrt{\omega\mu_0\mu\gamma}}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\lambda}{r_1}. \quad (2.21)$$

Для проведения анализа функции  $G_e$  введем безразмерную переменную

$$\chi = \frac{\mu}{\sqrt{\omega\mu_0\mu\gamma}} \vartheta = \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}} \vartheta \quad (2.22)$$

и представим выражение для  $G_e$  следующим образом:

$$\dot{G}_e = \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\cos\beta_1}{\varepsilon_1} \chi\right) J_0\left(\frac{\sin\beta_1}{\varepsilon_1} \chi\right)}{w_1(\chi)} d\chi . \quad (2.23)$$

Здесь безразмерной функцией  $w_1(\chi)$  в знаменателе подынтегрального выражения является

$$w_1(\chi) = \frac{\chi}{\sqrt{i}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2} . \quad (2.24)$$

Геометрический смысл величины  $\beta$ , которая входит в сомножители числителя в (2.24), показан на рис. 2.3 – это угол между вертикальной осью и направлением вектора, идущего от точки истока  $M_1$  к точке наблюдения  $Q$ .

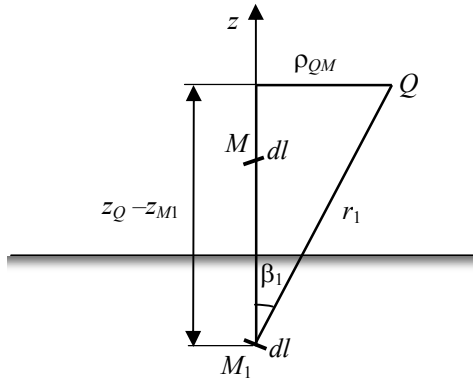


Рис. 2.3. Взаимное расположение точек истока и наблюдения

Рассмотрим сильный скин-эффект при конечной глубине проникновения поля, когда параметр (2.20) или (2.21) является малым ( $\varepsilon < 1$ ), но не обязательно равной нулю величиной. Такое ограничение рассматриваемых электромагнитных явлений позволяет использовать метод асимптотических разложений [32], тем самым упростить анализ основных электрофизических процессов.

## Глава 2

---

Остановимся вначале на особенностях несобственного интеграла (2.23) и его подынтегральной функции, которые, исходя из подхода Лапласа к оценке функций вида (2.23), позволяют обосновать использование асимптотического разложения для функции  $\dot{G}_\varepsilon$ .

Переменная  $\chi$ , по которой проводится интегрирование, изменяется в пределах от 0 до  $\infty$ , причем множитель  $1/w_1(\chi)$  в пределах радиуса сходимости  $\chi \leq \chi_c$  может быть разложен в степенной ряд. При этом, как будет показано, величина  $\chi_c$  оказывается не меньше единицы

$\chi_c \geq 1$ . Вместе с тем при  $\frac{\chi}{\varepsilon_1} \geq 1$  числитель подынтегральной

функции быстро падает и при больших значениях  $\chi$  изменяется быстрее, чем любая степенная функция. Интеграл для каждого члена степенного ряда даже за пределами области сходимости существует. Это означает, что величина несобственного интеграла (2.23) при малых  $\varepsilon_1$  определяется в основном поведением подынтегральной функции вблизи начала координат.

Несмотря на то, что интеграл для каждого члена ряда существует, ряд, составленный из интегралов от членов разложения подынтегральной функции, является расходящимся при любых  $\varepsilon_1$  [32]. Для того чтобы можно было воспользоваться получившимся рядом, нужно ограничить его фиксированным числом членов  $N$ . В этом случае  $\dot{G}_\varepsilon$  заменяется функцией с ошибкой, которая может быть сделана произвольно малой с помощью выбора достаточно малого значения  $\varepsilon_1$ . Такой ряд с разложением подынтегральной функции в нашем случае по степеням  $\chi$  носит название асимптотического ряда типа Пуанкаре [33]. Полезность таких асимптотических рядов определяется тем, что ошибка усеченного ряда не превышает первого

отброшенного члена ряда и, следовательно, быстро стремится к нулю при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ .

Необходимо отметить, что каждый член асимптотического ряда определяется с ошибкой, величина которой зависит от значения малого параметра и номера члена ряда. Поэтому оценка точности разложения по величине первого отброшенного члена тоже является приближенной и это требует выполнить также оценку погрешности каждого члена ряда.

Для получения асимптотического ряда представим множитель  $w_1^{-1}$  в (2.24) следующим образом:

$$\frac{1}{w_1} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2} - \frac{\chi}{\sqrt{i}}}{1 - \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^2}. \quad (2.25)$$

Раскладывая числитель и знаменатель (2.25) в ряд Тейлора, функцию  $w_1^{-1}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n b_{2k} c_{2(n-k)} \right] \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь  $b_{2n}, c_{2n}$  – коэффициенты разложения в ряды Фурье по параметру  $\frac{\chi}{\sqrt{i}}$  следующих функций, которые входят в числитель и знаменатель выражения (2.25):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n} = \quad (2.27)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n},$$

$$\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)^m \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2m}, \quad (2.28)$$

где считается, что  $(-1)!! = 1$ .

Ряд (1.26) сходится в пределах определенного радиуса сходимости  $\chi_c$ , который определяется как меньшее из значений радиуса сходимости  $\chi_{c1}$  функции (2.27) в числителе и  $\chi_{c2}$  функции (2.28) в знаменателе. Их можно определить, исходя из того, что радиус сходимости функций  $\sqrt{1+x}$  и  $(1+x)^{-1}$  равен единице [12]. Отсюда радиус сходимости числителя будет  $\chi_{c1} = \mu \geq 1$ , а знаменателя –  $\chi_{c2} = 1/\sqrt{1-1/\mu^2} \geq 1$ . Сравнение показывает, что радиус сходимости лежит в пределах  $1 \leq \chi_c \leq \sqrt{2}$ . Для немагнитных сред  $\mu = 1$  знаменатель в (1.25) принимает постоянное значение, равное единице. Ряд будет содержать только члены разложения числителя и  $\chi_c = 1$ .

За пределами радиуса сходимости ряд для функции  $w_1^{-1}$  расходится. Однако, если подставим члены ряда в (2.23) и проинтегрируем в пределах от 0 до  $\infty$ , то для каждого слагаемого получим конечное значение [9]. Интегралы для членов ряда являются табличными [12], и в результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{G}_{e1}^{(n)} &= \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^\infty a_n(\mu) \left( \frac{\chi}{\sqrt{i}} \right)^n \exp\left( -\frac{\cos\beta_1}{\varepsilon_1} \chi \right) J_0\left( \frac{\sin\beta_1}{\varepsilon_1} \chi \right) d\chi = \\ &= 2(-1)^n a_n(\mu) \left( \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{i}} \right)^{n+1} r_1^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Используя выражения для каждого члена асимптотического ряда, функцию  $\dot{G}_e$ , через которую выражаются все составляющие электромагнитного поля в диэлектрической области, приближенно можно представить следующим образом:

$$\dot{G}_e \approx \dot{G}_{eN} = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)} = \sum_{n=0}^N 2(-1)^n a_n(\mu) \left( \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{i}} \right)^{n+1} r_1^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right), \quad (2.30)$$

где множитель, содержащий локальный малый параметр  $\varepsilon_1$  связан с единым для контура малым параметром  $\varepsilon$  (2.21) и постоянной распространения  $p = \sqrt{i\omega\mu_0\gamma}$  соотношением

$$\frac{\varepsilon_1 r_1}{\sqrt{i}} = \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{i}} = \frac{\mu}{p}.$$

### 2.2.2. Решение в виде разложения в асимптотический ряд для трехмерного квазистационарного электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве

Функция  $\dot{G}_e$  является единой функцией, с помощью которой определяются все векторные поля и потенциалы в диэлектрическом полупространстве. В предыдущей главе были получены выражения для трехмерного квазистационарного электромагнитного поля для тока, протекающего в общем случае по произвольному пространственному контуру вблизи электропроводного намагничивающегося полупространства без ограничений на электрофизические свойства среды и частоту поля.

Теперь при использовании асимптотического разложения функции  $\dot{G}_e$  на характеристики системы наложено ограничение – в точке наблюдения в диэлектрической области параметр  $\varepsilon_1 = \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}r_1} = \frac{\mu}{r_1\sqrt{\omega\mu_0\mu\gamma}}$

должен быть малым для любой точки контура с током. Вопросы, связанные с возможностью получения результатов, точностью расчетов, связи малого параметра со свойствами неоднородного внешнего поля рассматриваются в ходе дальнейшего изложения. Здесь воспользуемся приведенным асимптотическим разложением функции  $\dot{G}_e$  и запишем окончательные выражения для векторного потенциала, индукции магнитного поля, а также скалярного потенциала и напряженности электрического поля в диэлектрическом полупространстве, заменив в соответствующих слагаемых (1.33), (1.34), (1.64) и (1.65) функцию  $\dot{G}_e$  (2.19) ее приближенным значением в виде асимптотического ряда

$$\dot{G}_{eN} = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)} \quad (2.29), (2.30):$$

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \left[ \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) dl - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{p} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} dl \right], \quad (2.31)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \left[ \oint_l \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{p} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} dl \right], \quad (2.32)$$



$$\phi_e = -\frac{\dot{I}_0}{4\pi} \zeta \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^n \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \oint \frac{(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z)}{r_1} dl, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_e = & -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) dl + \\ & + \frac{\dot{I}_0}{4\pi} \zeta \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^n \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \oint \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} dl. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь  $\zeta = \frac{p}{\gamma}$  – поверхностный импеданс, коэффициенты

$a_n(\mu)$  определены в (2.26) – (2.28).

Таким образом, в отличие от исходных выражений, которые в качестве подынтегральных функций содержат несобственные интегралы от специальных функций, найденные выражения в (2.31) – (2.34) представляют собой ограниченные ряды, где каждый член находится вычислением лишь одномерного контурного интеграла. Одномерные интегралы аналогичны соответствующим интегралам для расчета поля линейного тока контура, вычисление и анализ которого может быть легко выполнен с использованием известных методов.

Такое представление решений удобно не только для определения характеристик поля, но и может быть использовано для нахождения распределения плотности потока энергии в диэлектрической среде  $\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}$ , где комплексный вектор Пойнтинга  $\tilde{\mathbf{P}}$  определяется комплексной амплитудой напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}$  и комплексно сопряженной амплитудой напряженности магнитного поля  $\bar{\mathbf{H}}$ .

Во многих технологических устройствах протекание электрофизических процессов связано с выделяющейся в

металле тепловой энергией, источником которой является электромагнитное поле. При сильном скин-эффекте можно говорить о поверхностной плотности мощности выделяющегося тепла, величина которой определяется плотностью потока электромагнитной энергии из диэлектрической среды в электропроводное тело через границу раздела сред. Как известно, действительная часть вертикальной компоненты вектора Пойнтинга на поверхности раздела сред, взятая со знаком “-”, дает плотность потока средней за период мощности  $p_z$  внутрь электропроводного тела, которая в виде джоулева тепла выделяется в поверхностном слое и определяет поверхностную плотность выделяющейся тепловой мощности в теле:

$$p_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-\tilde{\mathbf{P}}(z=0) \cdot \mathbf{e}_z). \quad (2.35)$$

В последнем выражении комплексный вектор Пойнтинга на поверхности раздела сред определяется значениями напряженностей электрического и магнитного полей при  $z=0$ , причем для нахождения величины  $p_z$  достаточно вычислить векторное произведение проекций напряженностей полей  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{e}\parallel} = \dot{\mathbf{E}}_e - (\dot{\mathbf{E}}_e \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z$  и  $\bar{\mathbf{H}}_{\text{e}\parallel} = \bar{\mathbf{H}}_e - (\bar{\mathbf{H}}_e \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z$  на плоскую поверхность раздела сред:

$$\begin{aligned} p_z &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{e}_z \cdot [\dot{\mathbf{E}}_e(z=0) \times \bar{\mathbf{H}}_e(z=0)]) = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{e}_z \cdot [\dot{\mathbf{E}}_{\text{e}\parallel}(z=0) \times \bar{\mathbf{H}}_{\text{e}\parallel}(z=0)]) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Учтем, что сумма первых двух слагаемых в (1.65) электрического поля на поверхности раздела сред дает только вертикальную компоненту

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{E}}_1 &= -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r(z=0)} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1(z=0)} \right) dl = \\ &= -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2 \oint_l \frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z}{r(z=0)} dl.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Напротив, третье слагаемое напряженности электрического поля не имеет компоненты, перпендикулярной границе раздела сред.

Введя обозначение  $\dot{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{P}}$ , где

$$\dot{\mathbf{P}} = -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l [\mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{G}_e] dl, \quad (2.38)$$

и подставив (2.38) в (2.36), действительная часть вертикальной компоненты комплексного вектора Пойнтинга  $p_z$  принимает вид

$$p_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{H}}_{\text{ell}}) = -\omega \frac{\mu_0 |\dot{I}_0|^2}{16\pi^2} \operatorname{Im} \left\{ \oint_l [\mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{G}_e] dl \cdot \bar{\mathbf{H}}_{\text{ell}} \right\}, \quad (2.39)$$

где векторы в (2.39) соответствуют точке наблюдения на поверхности раздела сред  $z = 0$ .

Если выполняются условия, позволяющие применить асимптотическое разложение, то в (2.39) могут быть использованы выражения (2.30), (2.32).

Примеры применения асимптотического метода расчета в области высокочастотного индукционного нагрева металлических лент, в том числе решения обратных задач поиска геометрии индукторов, представлены в [34, 35], а также в монографии [26].

### 2.2.3. Оценка погрешности разложения в асимптотический ряд

Асимптотический ряд (2.30), составленный из функций  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$ , является расходящимся рядом с той

особенностью, что при увеличении числа членов ряда ошибка замены исходного интеграла рядом вначале падает и достигает такого значения, за которым добавление новых членов лишь увеличивает ошибку.

Представим функцию  $\dot{G}_e$  суммой конечного числа ее первых  $N$  членов и остатка  $R_N$ :

$$\dot{G}_e = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)} + R_N(\mu, \varepsilon, r_1) = \dot{G}_{eN} + R_N(\mu, \varepsilon, r_1). \quad (2.40)$$

Здесь  $\dot{G}_{eN}$  – приближенное значение функции  $\dot{G}_e$ , остаток  $R_N$  зависит как от числа  $N$ , так и от величин  $\mu, \varepsilon, r_1$  [36].

Погрешность  $R_N(\mu, \varepsilon, r_1)$  связана не только с ограниченностью ряда, но и с тем, что каждый член асимптотического ряда (2.30) определяется с ошибкой, наличие которой обусловлено интегрированием, в том числе и за пределами области сходимости подынтегральной функции. Эта погрешность зависит от величины малого параметра  $\varepsilon_1$  и возрастает с увеличением номера члена ряда.

Проанализируем влияние количества членов ряда в зависимости от величины малого параметра  $\varepsilon_1$  на приближенное значение модуля функции  $|\dot{G}_{eN}|$  по сравнению с точным значением  $|\dot{G}_e|$ . В точках наблюдения, расположенных на вертикальной оси, проходящей через элемент контура, когда  $\rho_{Q_{M1}} = \rho = 0$  ( $r_1 = z + h$ ), в выражениях (2.19) и (2.23) множитель  $J_0(\vartheta\rho) = J_0(0) = 1$  принимает наибольшее значение. В этих точках несобственный интеграл для немагнитной среды ( $\mu = 1$ ) удастся представить в аналитическом виде [12]. В этом случае функция  $\dot{G}_e$  записывается в виде [37]

$$\dot{G}_e = \frac{\pi \varepsilon_1}{2\sqrt{i}} \left[ H_1 \left( \frac{\sqrt{i}}{\varepsilon_1} \right) - N_1 \left( \frac{\sqrt{i}}{\varepsilon_1} \right) \right] - \frac{\varepsilon_1^2}{i}, \quad (2.41)$$

где  $H_1$  и  $N_1$  – функции Струве и Неймана соответственно. В более общем случае  $\mu \neq 1$  и  $\rho \neq 0$  для вычисления значений функции  $\dot{G}_e$  необходимо использовать методы численного интегрирования.

При  $\rho = 0$  сомножитель  $\frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right)$  в (2.29) принимает

значение, равное

$$\frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right) = \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{z+h} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(z+h)^{n+1}}. \quad (2.42)$$

Тогда членами асимптотического ряда оказываются

$$G_{e1}^{(n)} = 2n! a_n(\mu) \left( \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{i}} \right)^{n+1}. \quad (2.43)$$

Для выбранных точек наблюдения  $r_1 = z+h$  имеем  $\varepsilon_1 = \mu / \left[ (z+h) \sqrt{\omega \mu_0 \mu \gamma} \right]$ .

Подставляя (2.43) в ограниченную сумму слагаемых (2.30), находим приближенное значение в виде асимптотического разложения  $\dot{G}_{eN} = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)}$  в рассматриваемой точке ( $\rho = 0, z$ ). Это значение необходимо сравнить с точным результатом (2.41).

На рис. 2.4 приведены зависимости от  $\varepsilon_1$  модулей точного  $|\dot{G}_e|$  и приближенных  $|\dot{G}_N|$  величин функций для разного числа учитываемых членов ряда. Относительные погрешности вычисления приближенного значения функции  $\dot{G}_e$  в виде  $\Delta_N = \left| \left| \dot{G}_{eN} \right| - \left| \dot{G}_e \right| \right| / \left| \dot{G}_e \right|$  показаны на рис. 2.5.

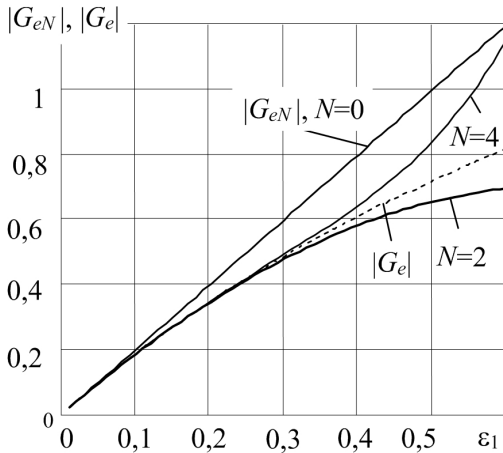


Рис. 2.4. Приближенное и точное значения модуля функции  $\dot{G}_e$  для разного числа членов ряда  $N$  при  $\mu = 1$  в точке  $\rho = 0, z = 0$

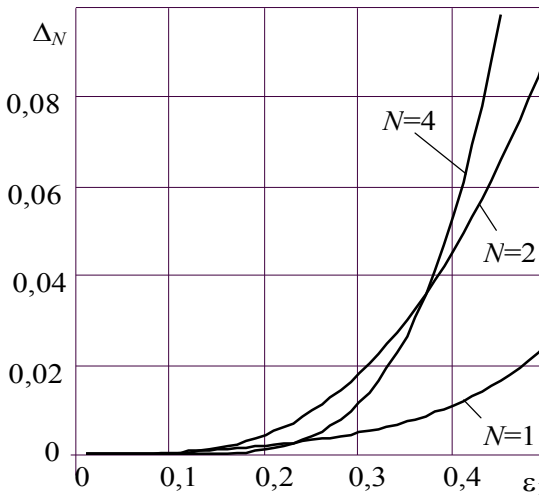


Рис. 2.5. Влияние числа членов ряда  $N$  на относительную ошибку приближенного значения функции  $\dot{G}_e$  при  $\mu = 1$  в точке  $\rho = 0, z = 0$

Видно, что при малых  $\varepsilon_1$  наиболее точные результаты достигаются при учете большего числа членов ряда. С увеличением  $\varepsilon_1$  ошибка вычисления растет быстрее в случае учета большего количества членов ряда. Начиная с определенного значения  $\varepsilon_1$ , более точными, хотя и с большей погрешностью, оказываются расчеты при  $N=2$ . Наконец, при еще больших значениях  $\varepsilon_1$  меньшая погрешность будет уже при проведении расчетов с  $N=1$ . То есть оказывается, что чем меньше величина малого параметра  $\varepsilon_1$ , тем большее количество членов асимптотического ряда может быть использовано. Иными словами для каждого  $\varepsilon_1$  существует оптимальное значение числа членов ряда, для которого погрешность будет минимальна. Наглядное представление о влиянии величины малого параметра  $\varepsilon_1$  и числа членов асимптотического ряда на погрешность расчета дают зависимости, показанные на рис. 2.6. Кривые отражают общую особенность асимптотических рядов, которая заключается в наличии минимума погрешности при определенных значениях числа членов ряда. С уменьшением  $\varepsilon_1$  (например, с ростом частоты поля или для материалов с большей проводимостью, или в точках, более удаленных от поверхности раздела сред) минимальная погрешность уменьшается и достигается при большем числе членов асимптотического ряда. При достаточно малых значениях  $\varepsilon_1$  минимальная погрешность реализуется при больших номерах  $N$  и является крайне незначительной, поэтому зачастую отпадает необходимость учитывать столь большое количество членов асимптотического ряда.

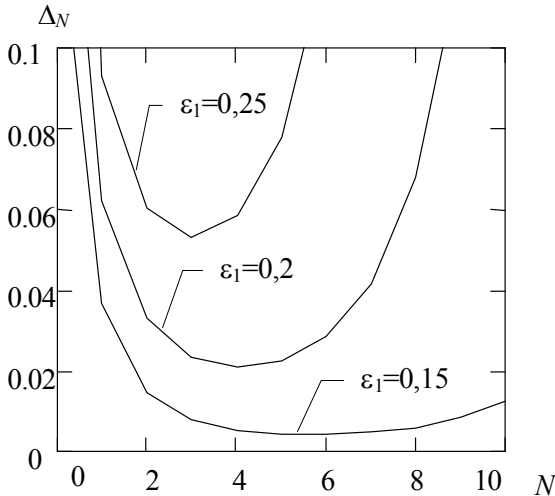


Рис. 2.6. Относительная погрешность  $\Delta_N = \left| \frac{\dot{G}_{eN}}{\dot{G}_e} - 1 \right|$  в зависимости от числа членов ряда  $N$  ( $\mu = 5$ ;  $\rho = 0$ )

### 2.2.4. Выбор числа членов асимптотического ряда

При использовании асимптотического метода важной практической задачей является оптимальный выбор числа членов асимптотического ряда в зависимости от величины малого параметра  $\varepsilon_1$ . Выбор может быть основан на анализе остатка  $R_N$ . Здесь могут использоваться два подхода: один основан на оценке последнего учитываемого члена ряда, другой – непосредственно на оценке остатка  $R_N$  при задании допустимой погрешности.

Возможность применения первого способа связана с тем, что  $R_N(\mu, \varepsilon_1, r_1)$  в (2.30) не превышает последнего отброшенного члена ряда, который, однако, сам определяется с определенной погрешностью [9]. При этом, если некоторый член ряда вычисляется с погрешностью,



превышающей допустимое значение, например, если погрешность становится сравнимой с величиной самого члена разложения, то учет такого члена ряда не увеличивает точность расчета. Если учесть, кроме того, что относительная погрешность определения величины членов ряда растет с увеличением их номера, то оценка достижения каким-либо членом предельного значения относительной погрешности определит и предельное значение числа членов ряда, за пределами которого рост их числа только увеличит общую погрешность.

Как и прежде, оценку проведем для случая  $\rho = 0$  и соответственно  $r_1 = z + h$ , когда малый параметр при выбранной высоте расположения точки наблюдения принимает наибольшее значение. Для получения оценки погрешности членов ряда разобьем интервал интегрирования в (2.29) на два интервала:  $(0 \div 1)$  и  $(1 \div \infty)$ . При этом в пределах первого интервала соответствующий ряд (2.26) для множителя в подынтегральной функции является сходящимся, а интегралы (2.29) от каждого члена ряда известны [12]. В пределах второго интервала  $(1 \div \infty)$  справедливо общее выражение (2.23). В результате запишем

$$\begin{aligned} \dot{G}_e &= \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^1 a_n(\mu) \left( \frac{\chi}{\sqrt{i}} \right)^n \exp\left(-\frac{\chi}{\varepsilon_1}\right) d\chi + \frac{2}{\sqrt{i}} \int_1^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\chi}{\varepsilon_1}\right)}{w_1(\chi)} d\chi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n n!}{(\sqrt{i})^{n+1}} \varepsilon_1^{n+1} \left( 1 - e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k} \right) + \frac{2\delta_1}{\sqrt{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{G}_e^{(n)} + \frac{2\delta_1}{\sqrt{i}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Результат интегрирования каждого члена ряда в пределах всего диапазона  $(0 \div \infty)$ , включая и область вне

радиуса сходимости, представлен значениями  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$  (2.43). Сравнивая (2.43) и  $\dot{G}_e^{(n)}$  из (2.44), имеем

$$\dot{G}_{e1}^{(n)} - \dot{G}_e^{(n)} = \frac{2a_n n!}{(\sqrt{i})^{n+1}} \varepsilon_1^{n+1} e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}. \quad (2.45)$$

Отсюда оценка относительной погрешности  $\Delta_n$  для каждого отдельного члена ряда будет

$$\Delta_n = \frac{|\dot{G}_{e1}^{(n)} - \dot{G}_e^{(n)}|}{|\dot{G}_e^{(n)}|} = \frac{e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}}{1 - e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}}. \quad (2.46)$$

Заметим, что сумма  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}$  в (2.45) и (2.46)

представляет собой частичную сумму разложения в ряд функции  $e^{-1/\varepsilon_1}$  и в пределе  $n \rightarrow \infty$  выражение (2.45) стремится не к нулю, а к  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$  и, наоборот, с ростом  $n$  величина  $|\dot{G}_e^{(n)}|$  убывает. В результате относительная погрешность расчета каждого члена разложения при  $n \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности. Величина относительной погрешности для первых десяти членов ряда при различных значениях параметра  $\varepsilon_1$  показана на рис. 2.7.

Видно, что с увеличением номера члена ряда  $n$  растет и погрешность его определения, хотя при этом уменьшается его относительный вклад в общую сумму.

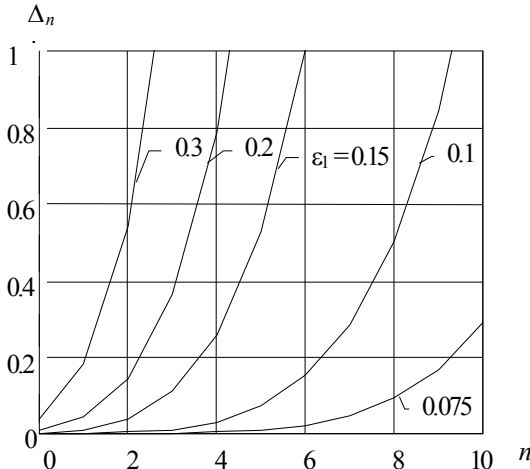


Рис. 2.7. Значения относительной погрешности для первых десяти членов ряда при различных значениях параметра  $\varepsilon_1$

Оценим еще и остаток  $|\delta_1|$  в (2.44):

$$|\delta_1| = \int_1^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\chi}{\varepsilon_1}\right)}{\left|\frac{\chi}{\sqrt{i}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}\right|} d\chi < \int_1^{\infty} \exp\left(-\frac{\chi}{\varepsilon_1}\right) d\chi = \varepsilon e^{-1/\varepsilon} \approx \varepsilon \Delta_0. \quad (2.47)$$

Видно, что  $|\delta_1|$  вносит погрешность, меньшую, чем замена основного члена  $\dot{G}_e^{(0)}$  на  $\dot{G}_{e1}^{(0)}$ , относительная погрешность которого наименьшая. По этой причине величиной  $|\delta_1|$  можно пренебречь, и это подтверждает, что оценку относительной погрешности можно проводить по (2.46).

Число членов ряда должно быть ограничено тем значением  $N$ , при котором дальнейшее их увеличение ведет уже только к росту общей погрешности. Отсюда можно заключить, что число членов ряда в любом случае не должно превышать то значение, при котором относительная

погрешность последнего члена ряда не превышает заданного значения  $C_N$ , например, равного единице. В этом случае условие определения числа членов ряда  $n = N$  можно записать в виде

$$\Delta_n(\varepsilon_1) \leq C_N. \quad (2.48)$$

Из сравнения данных, представленных на рис. 2.7, с зависимостями на рис. 2.6 видно, что минимальная погрешность приближенного расчета достигается при количестве членов ряда  $n = N$ , которые соответствуют условию  $C_N \approx 1$ . Это подтверждает допущение о том, что оценка числа членов ряда может быть выполнена на основании оценки погрешности последнего учитываемого члена.

Величина малого параметра  $\varepsilon_1 = \frac{1}{r_1} \left( \frac{\mu}{\omega \mu_0 \gamma} \right)^{1/2}$  зависит

как от электрофизических свойств среды, так и от расстояния между точками на зеркально отраженном контуре и точкой наблюдения  $r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z + h)^2}$ . Наибольшее значение параметр  $\varepsilon_1$  принимает в том случае, если точки наблюдения располагаются непосредственно под контуром на границе раздела сред, т.е. при  $\rho = 0, z = 0$ . Приведем в качестве примера выбор числа членов асимптотического ряда по условию (2.47) для конкретных металлических материалов, когда точка наблюдения располагается на поверхности раздела сред.

Рис 2.8 и 2.9 соответствуют значениям числа членов ряда при выборе  $C_N = 1$  для немагнитных сред: латуни ( $\mu = 1, \gamma = 1,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ) и алюминия ( $\mu = 1, \gamma = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ). Показаны значения в диапазоне частот  $f = 100 \div 1900 \text{ Гц}$  и расстояниях от контура до проводящей среды  $h = 0,015 \div 0,05 \text{ м}$ . Выбранные диапазоны являются

типичными для эксплуатации устройств индукционного нагрева металлических изделий. Приведенные данные позволяют оценить возможность использования приближенного метода для таких случаев [26].

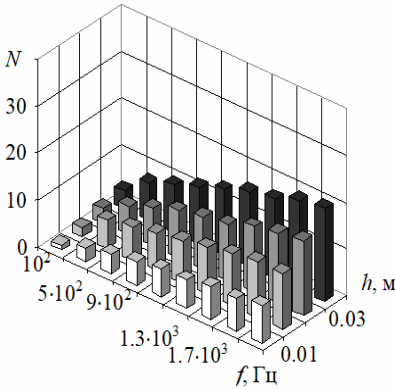


Рис. 2.8. Число членов ряда при  $C_N=1$  для латуни

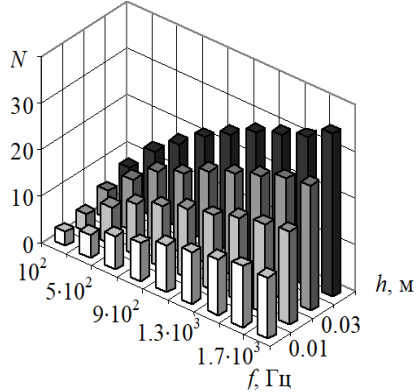


Рис. 2.9. Число членов ряда при  $C_N=1$  для алюминия

Как видно из представленных значений, с повышением частоты поля и увеличением расстояния от контура с током до поверхности проводника число членов ряда  $N$  при выборе по условию (2.47) может быть достаточно велико. При этом точность расчета может значительно превышать необходимый уровень. В связи с этим оправданным может оказаться другой подход к определению числа членов ряда. Он заключается в оценке погрешности всего асимптотического ряда  $\Delta_N(N, \varepsilon_1)$ .

Будем считать, что расчет достаточно выполнить с точностью, при которой погрешность не обязательно должна быть меньше чем  $\Delta_{\min}$ . Кроме того, так как применяется приближенный метод расчета, точность которого зависит от величины малого параметра  $\varepsilon$ , то установим предел погрешности  $\Delta_{\max} > \Delta_{\min}$ , превышение которого

свидетельствует о недопустимости использования этого метода.

Рассмотрим в качестве примера немагнитную среду  $\mu = 1$ , для которой построим ряд зависимостей  $\Delta_N(N, \varepsilon_1) = \left| \dot{G}_{eN} - \dot{G}_e \right| / \left| \dot{G}_e \right|$  как функций числа учитываемых членов ряда  $N$  для разных величин малого параметра  $\varepsilon_1$ . При этом выберем конкретные предельные значения погрешностей, например,  $\Delta_{\min} = 10^{-3}$  и  $\Delta_{\max} = 10^{-1}$ . Зависимости  $\Delta_N(N, \varepsilon_1)$  показаны на рис. 2.10.

На рисунке выделены две кривые. Одна кривая, показанная сплошной жирной линией при  $\varepsilon_{\min} = 0,18$ , соответствует зависимости, для которой минимальное значение погрешности равно предельному значению  $\Delta_N(N, \varepsilon_{\min}) = \Delta_{\min}$  и реализуется для числа членов ряда  $N = 6$ . При меньших значениях малого параметра  $\varepsilon_1 < \varepsilon_{\min}$  предельное значение погрешности  $\Delta_{\min}$  будет реализовано при числе членов ряда, не превышающем установленного значения  $N \leq 6$ . На рисунке показаны также зависимости, когда можно ограничиться меньшим количеством членов ряда:  $\varepsilon_1 = 0,15$   $N = 4$ ;  $\varepsilon_1 = 0,1$   $N = 2$ .

Другая выделенная кривая на рис. 2.10, показанная жирной пунктирной линией при  $\varepsilon_{\max} = 0,5$ , соответствует зависимости, для которой минимальное значение погрешности равно другому предельному значению  $\Delta_N(N, \varepsilon_{\max}) = \Delta_{\max}$  и которое реализуется для числа членов ряда  $N = 2$ . При значениях малого параметра  $\varepsilon_1 > \varepsilon_{\max}$  для любого числа членов ряда погрешность расчета превышает  $\Delta_{\max}$  и это свидетельствует о недопустимости использования приближенного метода при выбранном предельном значении ошибки  $\Delta_{\max}$ .

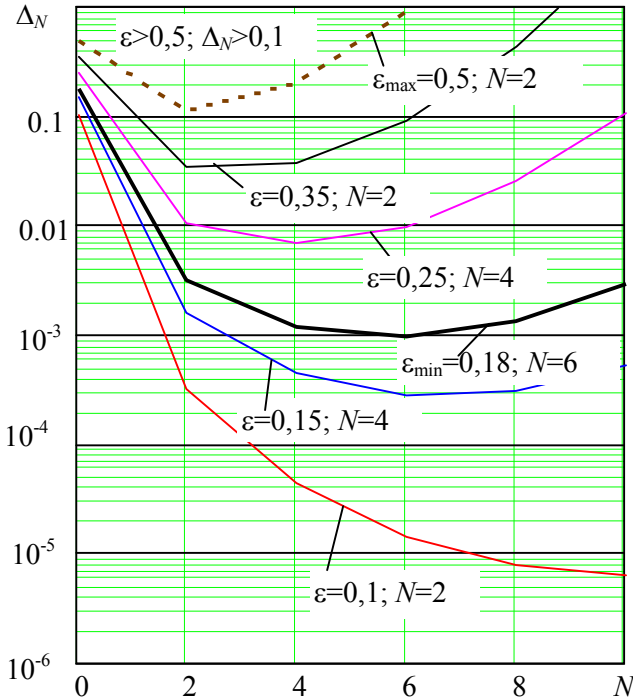


Рис. 2.10. Выбор числа членов ряда для  $\Delta_{\min} = 10^{-3}$ ,  $\Delta_{\max} = 10^{-1}$

В промежуточной области значений малого параметра  $\varepsilon_{\min} < \varepsilon_1 < \varepsilon_{\max}$  минимально достижимые погрешности расчета лежат уже в пределах  $\Delta_{\min} < \Delta_N < \Delta_{\max}$ . При этом указанные минимальные погрешности реализуются для числа членов ряда, которые также не превышают максимальное число  $N = 6$ , соответствующее значению числа членов ряда при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\min}$ .

Основной результат приведенного анализа заключается в том, что при использовании метода асимптотического разложения число членов ряда может быть ограничено относительно небольшим количеством, которое

определяется задаваемой точностью (относительной погрешностью) расчета.

Число членов разложения определялось величиной малого параметра  $\varepsilon_1 = \frac{\mu}{h\sqrt{2\pi f\mu\mu_0\gamma}}$ , который зависит от электрофизических параметров проводящей среды  $\mu, \gamma$ , частоты поля  $f$  и минимального расстояния токового контура до границы раздела сред  $h$ . Для конкретного электропроводного материала полученные результаты позволяют указать необходимое количество членов разложения в зависимости от частоты поля и минимального расстояния проводника с током от поверхности тела.

Рассмотрим пример, когда электропроводной средой является алюминий с электрофизическими параметрами  $\mu = 1, \gamma = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Задавая конкретные значения малого параметра  $\varepsilon_1$ , в том числе и установленные  $\varepsilon_{\min} = 0,18$  и  $\varepsilon_{\max} = 0,5$ , найдем зависимость частоты поля от минимальной высоты расположения проводника с током при  $\varepsilon_1 = \text{const}$  и соответственно для конкретного числа членов ряда, при котором реализуется минимальная для выбранного  $\varepsilon_1$  погрешность. Такие зависимости показаны на рис. 2.11.

При выполнении практических расчетов приведенные зависимости позволяют выбрать необходимое число членов асимптотического ряда и указать оценку точности расчета. Обычно материал и частота воздействующего поля являются известными. Тогда по геометрической конфигурации необходимо определить только минимальное расстояние от контура до проводящей поверхности и по представленным зависимостям найти параметры для расчета. В том случае, если зависимость тока от времени отличается от синусоидальной, можно использовать частотный спектр тока и для каждой частоты (или для характерных частот) применить описанный подход.



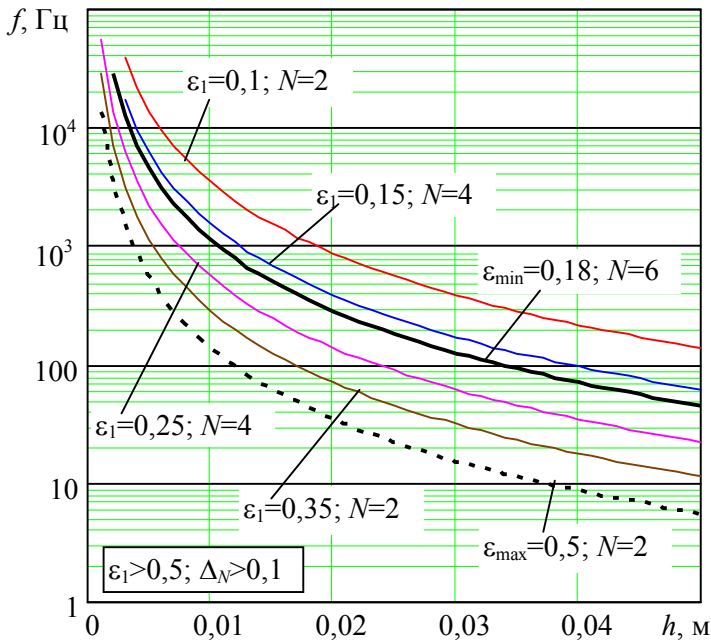


Рис. 2.11. Зависимость частоты поля от минимальной высоты расположения токового контура при заданном числе членов ряда для алюминия ( $\Delta_{\min} = 10^{-3}$ ,  $\Delta_{\max} = 10^{-1}$ )

### 2.3. Математическая модель локально двумерного электромагнитного поля вблизи контура с током

Несмотря на существенное упрощение общей трехмерной задачи при использовании асимптотического разложения расчет по найденным выражениям все же требует вычисления одномерных контурных интегралов. Это не создает принципиальных вычислительных затруднений, однако при решении ряда задач, особенно задач оптимизации и синтеза систем сложной пространственной конфигурации, объем вычислений резко возрастает и проведение

## Глава 2

---

многопараметрического поиска становится достаточно трудоемким. Вместе с тем в том случае, когда необходимо обеспечить интенсивное взаимодействие токовых контуров с электропроводной средой, требуется определить электромагнитное поле в ограниченной области пространства, где расстояния до проводника с током являются малыми по сравнению с характерными размерами контура.

Здесь появляется возможность дальнейшего упрощения вычислений, которое заключается в локальной замене трехмерного электромагнитного поля двумерным [38 – 40], т.е. моделью локально двумерного электромагнитного поля, в которой контурные интегралы в диэлектрической области заменяются интегралами вдоль бесконечной прямой, параллельной плоской границе раздела сред. Такие интегралы вычисляются отдельно и в результате вместо асимптотического ряда, содержащего контурные интегралы, получают ряд, члены которого представляют собой простые алгебраические выражения.

Замену криволинейного токового контура прямолинейной токовой нитью можно выполнить для конкретной точки реального контура, в которой направление токовой нити совпадает с проекцией касательной на плоскую границу раздела сред  $\mathbf{t}_{\parallel}$  и характеризуется единичным

вектором  $\mathbf{e}_{\parallel} = \frac{\mathbf{t}_{\parallel}}{|\mathbf{t}_{\parallel}|}$  (рис. 2.12).

В нормальной плоскости введем локальные координаты  $z, \xi$  в направлениях, определяемых единичными векторами  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_{\xi}$ : перпендикулярному к плоской поверхности раздела сред  $\mathbf{e}_z$  и перпендикулярному к криволинейному контуру  $\mathbf{e}_{\xi} = \mathbf{t} \times \mathbf{e}_z / |\mathbf{t} \times \mathbf{e}_z|$  (рис. 2.12, а и рис. 2.13).

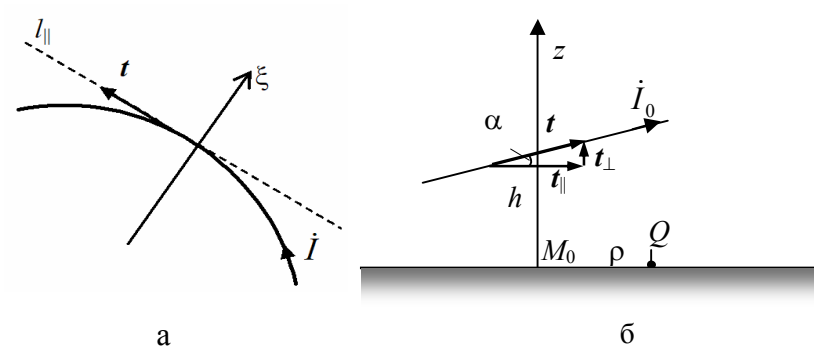


Рис. 2.12. Замена элемента контура прямолинейным участком и его ориентация относительно границы раздела сред

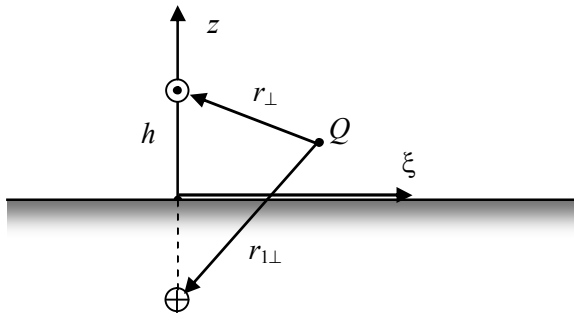


Рис. 2.13. Локальные координаты в плоскости, нормальной к контуру с током

Замена токового контура реальной геометрии прямолинейным проводником бесконечной длины возможна при выполнении определенных условий. Для уединенных контуров точки наблюдения, в которых определяется поле, должны находиться на таких расстояниях  $r_{\perp}$  от контура, для которых следующие параметры оказываются малыми [1]:

$$\varepsilon_{d1} = \frac{r_{\perp}}{R}, \quad \varepsilon_{d2} = \frac{r_{\perp}}{T}, \quad \varepsilon_{d3} = \frac{r_{\perp}}{r_l}, \quad (2.49)$$

## Глава 2

---

где  $R, T$  – соответственно радиусы кривизны и кручения линии контура,  $r_l$  – характерный размер самого контура, под которым понимается минимальное расстояние между данной точкой контура и любой другой его точкой при условии, что внутреннее расстояние  $l$  вдоль кривой имеет порядок, равный или превышающий  $R$  либо  $T$ . В том случае, если условия малости выполнены для всех параметров (2.49), достаточно использовать единое обозначение  $\varepsilon_d$ . Как показано в [1], влияние параметра  $\varepsilon_d$  на распределение поля вблизи линии контура проявляется уже в членах первого порядка по  $\varepsilon_d$ .

В отличие от уединенных контуров, в анализируемой задаче присутствует электропроводное тело с плоской границей раздела сред. В этом случае должны быть учтены еще два обстоятельства.

Первое связано с тем, что решение представлено суммой, где участвует сам контур и его зеркальное отражение от плоской границы, и соответственно два расстояния:  $r_{\perp}$  и  $r_{\perp\perp}$  (рис. 2.13). Координаты зеркально отраженного контура присутствуют как в выражениях для общего решения задачи (1.33), (1.34), (1.64), (1.65), так и в выражениях приближенного решения в виде асимптотического ряда (2.31) – (2.34). Условие малости параметра  $\varepsilon_d$  должно выполняться для обоих расстояний.

Вторая особенность связана с тем, что касательная к контуру может иметь перпендикулярную к поверхности составляющую  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp}$ , т.е. ток на определенных участках протекает и в перпендикулярном к поверхности направлении (рис. 2.12, б). Эти участки также участвуют в создании поля, однако участок контура заменяется здесь только параллельной поверхности нитью. Вносимая ошибка обусловлена двумя причинами: во-первых, тем, что для

наклонного проводника полная длина касательного к контуру вектора  $\mathbf{t}$  или  $\mathbf{t}_1$ , которые входят в соответствующие выражения, заменяется его горизонтальной проекцией на поверхность раздела сред  $\mathbf{t}_\parallel$ ; во-вторых, пренебрежением составляющей электромагнитного поля, связанной с протеканием тока в вертикальном направлении.

Ошибку, связанную с заменой вектора  $\mathbf{t}$  его проекцией  $\mathbf{t}_\parallel$ , оценим по изменению длины векторов. Для малых углов наклона  $\alpha$  относительная ошибка просто будет

$$\delta_\parallel = 1 - \cos \alpha \approx \alpha^2/2. \quad (2.50)$$

Заметим, что значение  $\delta_\parallel$  не зависит от величины параметра  $\varepsilon_1$ .

Рассмотрим теперь вопрос об оценке погрешности расчета, которая обусловлена пренебрежением величиной поля, связанного с протеканием тока в вертикальном направлении. Оценку выполним по величине отношения соответствующих составляющих тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на поверхности раздела сред. Такой выбор связан с тем, что тангенциальная компонента на поверхности одинакова для диэлектрической и электропроводной областей. Эта компонента используется в расчетах многих практических задач при исследовании силового воздействия на электропроводное тело и передачи энергии поля в электропроводную среду.

Подставляя в (1.65) выражение для функции  $\dot{G}_e$ , тангенциальную компоненту напряженности электрического поля при ( $z = 0$ ) можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_e(z=0) &= \dot{\mathbf{E}}_{1\parallel} + \dot{\mathbf{E}}_{2\parallel} = -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left[ \mathbf{t}_{\parallel} \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \Big|_{z=0} + (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial \rho} \right] dl = \\ &= -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2 \frac{P}{\mu} \oint_l \left[ \mathbf{t}_{\parallel} f_{e1}(\varepsilon, \rho/h) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_\rho f_{e2}(\varepsilon, \rho/h) \right] dl. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь выбрано  $\varepsilon = \mu/h\sqrt{\omega\mu_0\gamma}$ ,  $h$  – высота расположения элемента контура, как показано на рис. 2.12, б,  $\rho$  – радиальная цилиндрическая координата точки наблюдения  $Q$  на поверхности раздела сред. Функциями, входящими в контурный интеграл, являются

$$f_{e1}(\varepsilon, \rho/h) = \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\chi}{\varepsilon}\right) J_0\left(\frac{\rho \chi}{h \varepsilon}\right)}{w_1(\chi)} \chi d\chi, \quad (2.52)$$

$$f_{e2}(\varepsilon, \rho/h) = \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\chi}{\varepsilon}\right) J_1\left(\frac{\rho \chi}{h \varepsilon}\right)}{w_1(\chi)} \chi d\chi. \quad (2.53)$$

Параметр  $\varepsilon$  существенным образом влияет на поведение подынтегральных функций. Поэтому будем рассматривать случай, когда этот параметр является малым. Рассмотрим характер изменения функций  $f_{e1}(\varepsilon, \rho/h)$  и  $f_{e2}(\varepsilon, \rho/h)$  в зависимости от положения точки  $Q$  на поверхности раздела сред ( $z=0$ ). Эти функции определяют вклад в величину контурного интеграла участков контура с направлением тока, параллельным и перпендикулярным поверхности раздела сред.

На рис. 2.14 показаны зависимости от относительного расстояния  $\rho/h$  модулей функций  $|f_{e1}(\varepsilon, \rho/h)|$  и  $f_{e2}(\varepsilon, \rho/h)$  при разных значениях малого параметра  $\varepsilon$  и  $\mu=1$ .

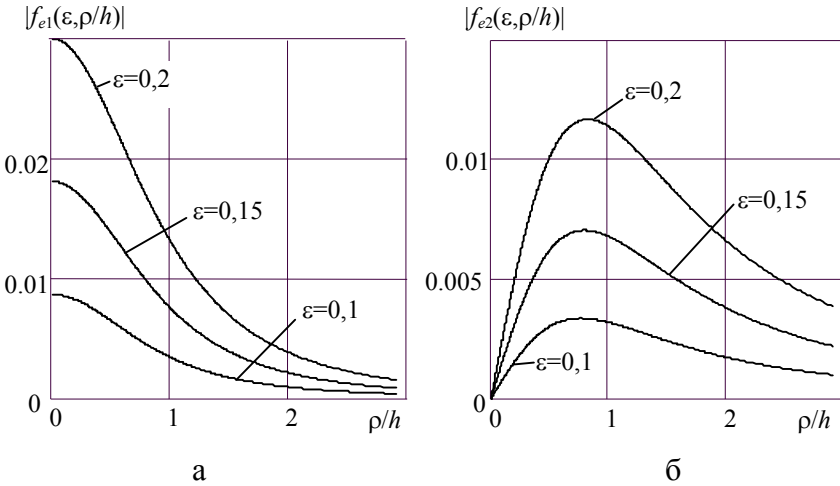


Рис. 2.14. Величина модулей функций  $|f_{e1}(\epsilon, \rho/h)|$  и  $f_{e2}(\epsilon, \rho/h)$  на поверхности раздела сред

Как видно из представленных зависимостей, участки с различным направлением тока по-разному участвуют в создании тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на поверхности тела. Горизонтальная компонента тока дает наибольший вклад непосредственно под элементом тока в направлении, совпадающем с направлением тока. Вклад в общую величину поля быстро уменьшается при увеличении расстояния от точки  $M_0$  — наименьшего расстояния от элемента тока до поверхности.

Второе слагаемое в (2.51) по-другому влияет на создание напряженности электрического поля на поверхности. Наибольший вклад от вертикальной компоненты тока реализуется на определенном расстоянии от точки  $M_0$  в радиальном направлении при расстоянии  $\rho$ , несколько меньшем высоты расположения элемента контура. Такая зависимость объясняется тем, что данное слагаемое напряженности электрического поля связано с полем

поверхностного электрического заряда, вертикальная компонента поля которого компенсирует вертикальную компоненту индуцированного электрического поля переменного тока контура.

Располагая функциями  $f_{e1}(\varepsilon, \rho/h)$  и  $f_{e2}(\varepsilon, \rho/h)$ , оценку ошибки, вносимой пренебрежением величиной поля, можно выполнить по величине подынтегральной функции в контурном интеграле для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на границе раздела сред ( $z = 0$ ).

Относительную погрешность оценим исходя из отношения максимальных значений соответствующих слагаемых, которые, однако, достигаются в разных точках:

$$\delta_{\perp} = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}} \frac{|f_{e2}(\varepsilon, \rho = h)|}{|f_{e1}(\varepsilon, \rho = 0)|}, \quad (2.54)$$

где  $\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Рис. 2.15 иллюстрирует оценки величин относительных погрешностей  $\delta_{\parallel}$  и  $\delta_{\perp}$  при замене поля контура с током реальной геометрии прямолинейным бесконечно длинным проводником, параллельным плоской граничной поверхности.

Из рис. 2.15 видно, что большую ошибку дает пренебрежение составляющей поля, обусловленной протеканием тока в вертикальном направлении  $\delta_{\perp}$ . При этом величина относительной погрешности практически не зависит от значения малого параметра  $\varepsilon$ . Поэтому в диапазоне  $\varepsilon \leq 0,3$  для оценки при малых углах наклона  $\alpha$  можно использовать единую зависимость

$$\delta_{\perp} \approx 0,366 \alpha. \quad (2.55)$$



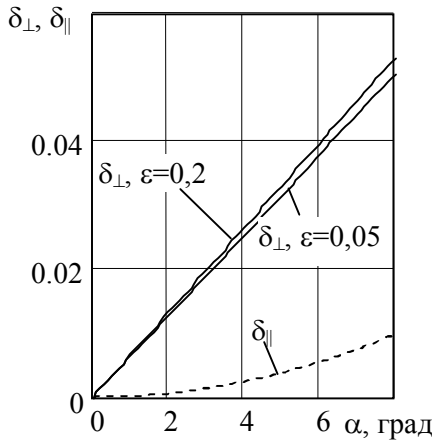


Рис. 2.15. Относительные погрешности замены поля токового контура реальной геометрии прямолинейным бесконечно длинным проводником, параллельным плоской граничной поверхности

Приведенные результаты позволяют оценить возможность использования модели локально двумерной модели в системах с пространственными контурами с током, расчет поля которых значительно более трудоемкий по сравнению с электромагнитными системами, в которых применяются плоские контуры с током. Примерами могут служить некоторые обратные задачи теории поля в индукционных системах, обеспечивающих равномерный нагрев движущихся металлических лент [26].

При проведении расчетов полезными могут оказаться конкретные выражения в рассматриваемой модели локально двумерного поля для расчета векторного потенциала и соответственно напряженности электрического поля, а также индукции магнитного поля в диэлектрической области.

Для прямолинейного бесконечно длинного проводника интегралы, входящие в формулы (2.31) и (2.32), легко вычисляются. Введя обозначение

$$u_n(\xi, z) = \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl_{\parallel}}{\sqrt{\xi^2 + (z+h)^2 + l_{\parallel}^2}}, \quad (2.56)$$

где  $l_{\parallel}$  — длина вдоль прямолинейного проводника, выражение для векторного потенциала вблизи проводника с током можно записать как

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \frac{\mu_0 \dot{I}_0 \mathbf{t}}{4\pi} \left[ \ln \frac{\xi^2 + (z+h)^2}{\xi^2 + (z-h)^2} - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^{n+1} u_n \right]. \quad (2.57)$$

Индукция магнитного поля  $\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}$  в локальных координатах будет иметь две составляющие, а именно:

$$\dot{\mathbf{B}}_e = -\frac{\partial \dot{\mathbf{A}}_e}{\partial z} \mathbf{e}_{\xi} + \frac{\partial \dot{\mathbf{A}}_e}{\partial \xi} \mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{B}}_{e\xi} + \dot{\mathbf{B}}_{ez} \quad (2.58)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_e = & -\frac{\mu_0 \dot{I}_0 \mathbf{t}}{2\pi} \left\{ \frac{(z+h)\mathbf{e}_{\xi} - \xi\mathbf{e}_z}{\xi^2 + (z+h)^2} - \frac{(z-h)\mathbf{e}_{\xi} - \xi\mathbf{e}_z}{\xi^2 + (z-h)^2} \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^{n+1} \left( \frac{\partial u_n}{\partial z} \mathbf{e}_{\xi} - \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \mathbf{e}_z \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Под  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}_{\parallel}}{|\mathbf{t}_{\parallel}|}$  понимается единичный вектор в направлении

прямой, параллельной плоскости раздела сред. Функции  $u_n(\xi, z)$  определяются последовательным

дифференцированием по координате  $z$  функции

$$u_0(\xi, z) = -\frac{2(z+h)}{\xi^2 + (z+h)^2}, \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned}
 n=0; u_0 &= -\frac{2(z+h)}{\xi^2 + (z+h)^2}; \\
 n=1; u_1 &= -\frac{2}{\xi^2 + (z+h)^2} + \frac{4(z+h)^2}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2}; \\
 n=2; u_2 &= \frac{12(z+h)}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2} - \frac{16(z+h)^3}{[\xi^2 + (z+h)^2]^3}; \\
 n=3; u_3 &= \frac{12}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2} - \frac{96(z+h)^2}{[\xi^2 + (z+h)^2]^3} + \frac{96(z+h)^4}{[\xi^2 + (z+h)^2]^4}
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

и т.д.

Поставляя (2.60) и их производные в (2.57) легко получить конкретные выражения для векторного потенциала и индукции магнитного поля. Эти выражения существенно упрощаются для точек на поверхности раздела сред непосредственно под проводником с током, когда  $z = \xi = 0$ , а  $r_1 = h$  принимает минимальное значение. В этом случае имеем

$$\dot{A}_{et} = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{\mu}{p} \right) - \frac{1}{h^2} \left( \frac{\mu}{p} \right)^2 - \frac{1}{h^3} \left( 2 - \frac{1}{\mu^2} \right) \left( \frac{\mu}{p} \right)^3 + \dots \right\}, \tag{2.61}$$

$$\dot{B}_{e\xi} = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{\pi h} \left\{ 1 - \frac{1}{h} \left( \frac{\mu}{p} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\mu}{p} \right)^2 + \dots \right\}. \tag{2.62}$$

Расчет средней за период плотности потока энергии электромагнитного поля через поверхность из диэлектрической в электропроводную среду  $p_z$  также существенно упрощается при использовании модели локально двумерного поля. Величина  $p_z$  определяется действительной частью вертикальной компоненты комплексного вектора Пойнтинга, взятой с обратным знаком:

$$\begin{aligned}
 p_z &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_z) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{i\omega}{\mu_0} A_t \bar{B}_\xi \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_0 i \omega I_0^2}{2\pi^2} \left[ \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot 2a_n \left( \frac{\mu}{p} \right)^{n+1} u_n(\xi, 0) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{4h}{\xi^2 + h^2} - \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot 2a_n \left( \frac{\mu}{p} \right)^{n+1} \frac{\partial u_n(\xi, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] \right\} = \quad (2.63) \\
 &= \frac{\mu_0 \omega I_0^2}{2\pi^2} \left( \frac{\sqrt{2}\mu}{2\sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma}} \cdot \frac{h^2}{(\xi^2 + h^2)^2} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

где обозначено  $I_0^2 = |\dot{I}_0|^2$ .

Отметим, что в выражениях для плотности потока энергии поля  $p_z$  непосредственно под контуром с током при  $\xi = 0$  (2.63) будут присутствовать лишь слагаемые, содержащие  $h$  в четной степени. Для хорошо проводящих немагнитных сред, когда  $\varepsilon \ll 1$ , плотность потока энергии под проводником контура с уменьшением высоты растет как  $\frac{1}{h^2}$ .

Рассмотрим пример расчета плотности потока энергии переменного электромагнитного поля для плоского контура, параллельного границе раздела сред. Считается, что поле создается плоским токовым контуром, форма которого представляет собой эллипс с полуосями  $a$ ,  $b$ , контур располагается на расстоянии  $h$  от границы раздела сред (рис. 2.16).

Расчет выполнен методом асимптотического разложения с использованием интегрирования по контуру эллиптической формы. Расстояние от контура до проводящей среды принято равным  $h = 0,025$  м. Электрофизические параметры проводящей среды соответствуют изделию из

латуни:  $\gamma = 1,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ,  $\mu = 1$ . Частота тока – 4000 Гц. При этой частоте величина малого параметра  $\varepsilon = 0,064$ . В этом случае число членов асимптотического ряда, при котором погрешность минимальна,  $N = 15$ . Однако при этом погрешность расчета очень мала и, исходя из данных рис. 2.10, можно ограничиться всего несколькими начальными членами ряда.

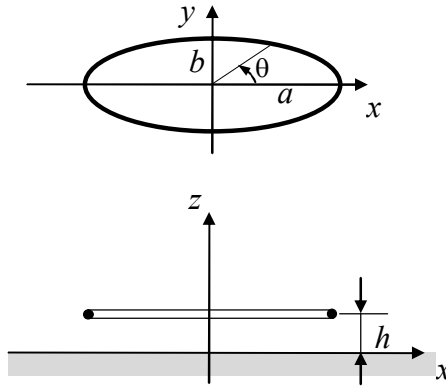


Рис. 2.16. Эллиптический контур над границей раздела сред

Радиус кривизны  $R_{кр}$  эллиптического контура изменяется вдоль его длины и определяется выражением [41]

$$R_{кр} = a^2 b^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right)^{3/2}. \quad (2.64)$$

На рис. 2.17 представлены результаты расчетов для контуров с отношением полуосей  $a/b = 2$  (кривые 1) и  $a/b = 4$  (кривые 2). На рис. 2.17, а показано изменение радиусов кривизны для этих двух случаев, а на рис. 2.17, б – плотности потока электромагнитной энергии в проводящую среду, нормированные на значение  $p_z^* = p_z / p_z(\theta = 0)$ , в

точках непосредственно под контурами в зависимости от полярного угла  $\theta$ .

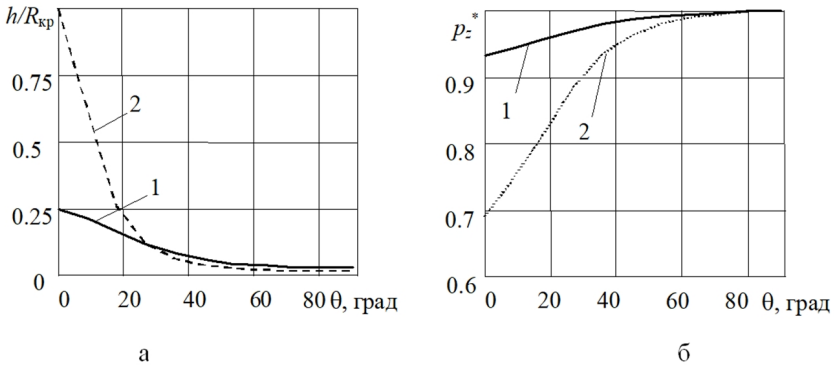


Рис. 2.17. Зависимости  $h/R_{кр}(\theta)$  (а) и  $p_z^*(\theta)$  (б)

Величина  $\varepsilon_{d1} = h/R_{кр}$  (2.49) – отношение расстояния точки наблюдения на поверхности до контура с током показывает возможность замены криволинейного проводника прямолинейной нитью тока. Видно, что по мере увеличения этого параметра величина  $p_z$  все больше отклоняется от значения вблизи  $\theta = 0$ , когда параметр  $\varepsilon_{d1}$  принимает наименьшее значение. Наибольшее отклонение  $p_z$  от его значения при  $\theta = 0$  имеет место, когда расстояние  $h$  становится сравнимым с радиусом кривизны. В этом случае использование модели локально двумерного поля неприменимо.

## 2.4. Выводы к главе 2

1. Для задач с сильным скин-эффектом, когда введенный параметр, пропорциональный отношению глубины проникновения электромагнитного поля к расстоянию между точками истока и наблюдения, является малым, решение для трехмерного квазистационарного

электромагнитного поля удастся представить в виде разложения в ограниченный асимптотический ряд. В отличие от исходных выражений, которые в качестве подынтегральных функций содержат несобственные интегралы от специальных функций, найденные выражения в (2.31) – (2.34) представляют собой ограниченные ряды, где каждый член находится вычислением лишь одномерного контурного интеграла. Одномерные интегралы аналогичны соответствующим интегралам для расчета поля линейного тока контура, вычисление и анализ которого может быть легко выполнен с использованием известных методов.

2. Анализ погрешности расчета при замене точных выражений приближенными показал, что необходимая точность достигается с использованием нескольких первых членов ряда, число которых зависит от величины малого параметра. При относительной погрешности расчета  $10^{-3}$  число членов ряда не превышает  $N = 6$ .

3. Дальнейшее упрощение расчетов возможно на основе математической модели локально двумерного электромагнитного поля путем локальной замены криволинейного проводника прямолинейной нитью тока и соответственно заменой контурных интегралов простыми алгебраическими выражениями. Математическая модель справедлива при определении величины поля в области, где отношение расстояний от точки наблюдения до точек истока на контуре и его зеркальном отражении от границы раздела сред является малой величиной. Анализ возможности использования математической модели для контуров пространственной конфигурации позволил получить оценку погрешности и показал, что вносимая ошибка обусловлена, прежде всего, пренебрежением составляющей электромагнитного поля, связанной с протеканием тока в направлении, перпендикулярном плоской границе раздела сред.

### ГЛАВА 3. ЗАТУХАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА КОНТУРА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Распределение квазистационарного электромагнитного поля в электропроводном теле зависит не только от частоты  $\omega$  и электрофизических свойств среды: удельной электропроводности  $\gamma$  и относительной магнитной проницаемости  $\mu$ , но и от геометрии тела и характера неоднородности внешнего поля.

При «резком» скин-эффекте на границе раздела сред справедливо приближенное импедансное граничное условие Леонтовича (2.3). Это условие соответствует предположению, что локально электромагнитное поле проникает в металлическое тело так же, как однородное поле, которое имеет не равными нулю только касательные компоненты напряженностей электрического и магнитного полей, проникает в электропроводное полупространство [42]. Для выполнения импедансного граничного условия, по определению автора этого условия, необходимо, чтобы источники внешнего поля располагались на расстояниях, значительно превышающих глубину проникновения поля [29]. В наших исследованиях о проникновении электромагнитного поля контура с током в электропроводную среду характеристикой удаленности источников по сравнению с глубиной проникновения поля служит введенный параметр  $\varepsilon$ , величина которого должна быть малой.

Исследованию скин-эффекта в массивных телах посвящено значительное количество работ. Концепция поверхностного импеданса, сформулированная М.А.Леонтовичем более 70 лет назад, по-прежнему вызывает интерес исследователей в связи с использованием этого подхода в решении краевых задач электродинамики. В



работе [43] С.М.Рытовым была построена теория падающей волны на тело с поверхностью, обладающей двойной кривизной. В дальнейшем такой же результат для импедансного граничного условия и величины эквивалентной глубины скин-слоя был получен в [43 – 46] и сформулированы соответствующие краевые задачи. Достаточно подробный обзор работ использования концепции поверхностного импеданса в задачах электродинамики, где учитываются геометрические и физические свойства реальных граничных поверхностей, приведен в [47].

Резкое уменьшение поля в электропроводном теле при сильном скин-эффекте позволило разработать математические модели, использующие условие ограниченности глубины проникновения. В этом отношении как одну из первых можно указать работу [43], где с самого начала в основу исследования поля при сильном скин-эффекте был положен метод возмущений и результат представлен в виде разложения в ряд по величине глубины проникновения поля как для плоской поверхности, так и для границы с двойной кривизной. В квазистационарном приближении для импульсного поля в [42] также использовано представление решения в виде суммы: поля при идеальном скин-эффекте и дополнительной составляющей, связанной с протеканием тока в тонком пограничном слое тела проводника. Как указано в этой работе, полученные в первом приближении формулы соответствуют результатам в [43] и распространяют их на импульсные поля. В [48] развит подход для расчета импульсных осесимметричных полей, в котором для определения распределения напряженности электрического поля на поверхности цилиндрического тела используется допущение о проникновении плоского поля в электропроводное тело.

Точное решение задачи о проникновении неоднородного электромагнитного поля в электропроводное полупространство представлено в [42] для частного случая поля, возбуждаемого тонким прямолинейным проводником переменного тока, параллельным границе раздела сред. Для рассмотренного неоднородного поля показаны ограничения, при которых справедливо импедансное граничное условие. В более общем случае криволинейной граничной поверхности и неоднородного электромагнитного поля задача решена, как и в большинстве исследований, при ограничениях на глубину проникновения поля.

Особенностью этого исследования является то, что оно основывается на точном аналитическом решении общей задачи трехмерного квазистационарного поля, что позволяет получить некоторые более общие обоснованные результаты.

В данной главе поверхность электропроводного тела считается плоской, но рассматривается неоднородное поле, созданное произвольным пространственным контуром с переменным током. Устанавливается общее свойство о более быстром затухании неоднородного поля по сравнению с затуханием однородного поля. Исследуется влияние малого параметра  $\varepsilon$  – количественной характеристики удаленности источников от поверхности раздела сред на справедливость для неоднородного поля приближенного граничного условия Леонтовича, а также на возможность применения модели проникновения одномерного поля, величиной которого служит локальное значение напряженности поля на границе. По результатам исследования влияния малого параметра предлагается расширенное определение понятия сильного скин-эффекта. Решается вопрос о распределении электромагнитного поля на границе раздела сред и получении соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей для неоднородного поля в замкнутом виде. В этом случае соотношение для членов асимптотического ряда обобщает приближенное

импедансное граничное условие на более широкую область неоднородного электромагнитного поля.

### 3.1. Общая особенность затухания неоднородного электромагнитного поля в электропроводном полупространстве

Наличие точного решения общей задачи позволяет вначале провести анализ особенностей проникновения поля в электропроводное полупространство без ограничений на значения электрофизических параметров и частоту поля. Получение упрощенных выражений в случае сильного скин-эффекта выполняется на следующем этапе исследования.

Рассмотрим распределение вектора напряженности электрического поля, которое в электропроводной среде имеет ненулевыми только компоненты, параллельные плоской границе раздела сред. Выражение для напряженности электрического поля приведено в (1.44). В нем распределение поля в поверхностном слое в зависимости от координаты  $z$ , перпендикулярной граничной поверхности, отражается наличием в подынтегральных функциях множителя  $e^{q_i z} = e^{-z\sqrt{\theta^2 + i\omega\mu_0\gamma}}$ .

Выделим отдельным множителем в аргументе экспоненциальной функции отношение положения точки наблюдения  $z$  к глубине проникновения однородного поля  $\delta$ :

$$e^{q_i z} = e^{-\frac{\sqrt{2i}}{\delta} z \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}}, \quad (3.1)$$

где, как и раньше, используется безразмерная переменная интегрирования  $\chi = \frac{\mu}{\sqrt{\omega\mu_0\gamma}} \vartheta$ ; учтено, что  $pz = \sqrt{2i} \frac{z}{\delta}$ .

Выражение (1.44) для расчета напряженности электрического поля в произвольной точке  $Q$  электропроводного полупространства (рис. 3.1) можно

записать в виде, аналогичном (2.51), но не на поверхности тела, а в произвольной точке пространства под поверхностью:

$$\dot{\mathbf{E}}_i = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \frac{p}{\mu} \oint_i \left[ \mathbf{t}_{\parallel} f_{i1} \left( \frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta \right) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_{\rho} f_{i2} \left( \frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta \right) \right] dl, \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon_1 = \mu\delta/\sqrt{2}r$ ,

$$f_{i1} \left( \frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta \right) = \int_0^{\infty} e^{\sqrt{2i} \frac{z}{\delta} \sqrt{1 + \left( \frac{\chi}{\mu\sqrt{i}} \right)^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\cos \beta}{\varepsilon} \chi} J_0 \left( \frac{\sin \beta}{\varepsilon_1} \chi \right)}{w_1(\chi)} \chi d\chi, \quad (3.3)$$

$$f_{i2} \left( \frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta \right) = \int_0^{\infty} e^{\sqrt{2i} \frac{z}{\delta} \sqrt{1 + \left( \frac{\chi}{\mu\sqrt{i}} \right)^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\cos \beta}{\varepsilon} \chi} J_1 \left( \frac{\sin \beta}{\varepsilon_1} \chi \right)}{w_1(\chi)} \chi d\chi.$$

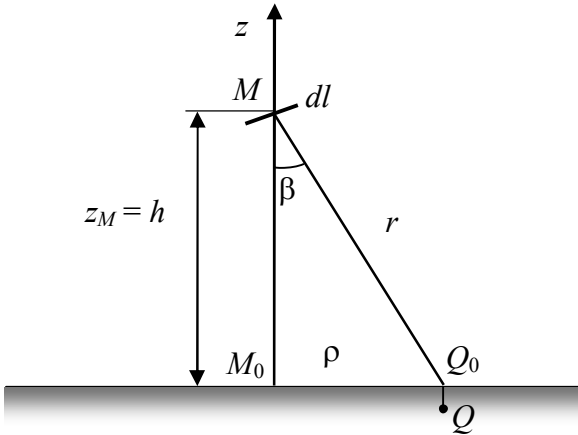


Рис. 3.1. К расчету электромагнитного поля в электропроводном полупространстве

Отметим, что при интегрировании вдоль контура необходимо учитывать, что  $\varepsilon_1$  и  $\beta$  зависят от положения точки  $M$ . Наибольшее значение параметр  $\varepsilon_1$  принимает,

когда точка  $M$  находится на наименьшем расстоянии от поверхности раздела сред.

Значение параметра  $\varepsilon_1$  существенным образом влияет на зависимости от координаты  $z$  в (3.3) функций  $f_{i1}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  и  $f_{i2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$ . Так, например, если  $\varepsilon_1$  значительно меньше единицы для всех точек контура,  $\varepsilon_1 \ll 1$ , то из-за наличия в знаменателях (3.3) экспоненциальных функций влияние множителя

$\sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}$  будет слабо отличаться от случая, когда этот множитель равен единице. Следовательно, в этом случае затухание поля от его локального значения на поверхности в точке  $Q_0$  будет близким к затуханию однородного поля.

Наоборот, в случае, если параметр  $\varepsilon_1$  не является малым, затухание будет происходить по другому закону. Однако, так как величина множителя по модулю больше единицы, то затухание неоднородного поля, созданного каким-либо токовым контуром, будет более сильным, чем в случае однородного поля. С учетом принципа суперпозиции утверждение о более быстром затухании с глубиной неоднородного электромагнитного поля по сравнению с однородным будет справедливым для любой системы исходных замкнутых контуров или, по-другому, утверждение будет справедливо для любого неоднородного электромагнитного поля.

Дополнительным аргументом может служить сравнение результатов расчета затухания неоднородного электромагнитного поля, выполненных по полученным аналитическим выражениям и с использованием численного метода [49].

Проиллюстрируем сделанный общий вывод на конкретном примере затухания поля в случае, когда глубина проникновения  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}}$  сравнима с размерами контура.

Расчет по аналитическим выражениям и с использованием численного метода в пакете Comsol выполнен для кругового контура радиуса  $R = 0,05$  м и минимального расстояния от контура до поверхности раздела сред  $h_0 = 0,02$  м при  $\mu = 1, \gamma = 10^5 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ . Контур расположен в плоскости, перпендикулярной к плоской поверхности раздела сред, как показано на рис. 1.4. Влияние глубины проникновения поля, когда она сравнима с размерами токового контура, отражено на рис. 3.2 по результатам расчета напряженности электрического поля в области  $z < 0$ . Расчеты для разных значений отношения  $\delta/R$  или  $\varepsilon = \mu\delta/\sqrt{2}h_0$  выполнены с учетом выбора соответствующих значений частоты поля.

На рисунках вверху стрелками показано распределение вектора плотности индуцированного тока в вертикальной плоскости, которая проходит через центр контура с током. Графики внизу показывают изменение модуля комплексной амплитуды напряженности поля, нормированного на значение поля у поверхности  $E_x^* = \left| \dot{E}_x \right| / \left| \dot{E}_x(z=0) \right|$ , в зависимости от координаты  $z$  в электропроводной среде, отнесенной к глубине проникновения поля  $-z/\delta$ . Пунктирные линии показывают затухание однородного поля в соответствие с выражением (2.2), сплошные линии соответствуют аналитическому расчету, отдельные точки, отмеченные квадратиками, – численному.

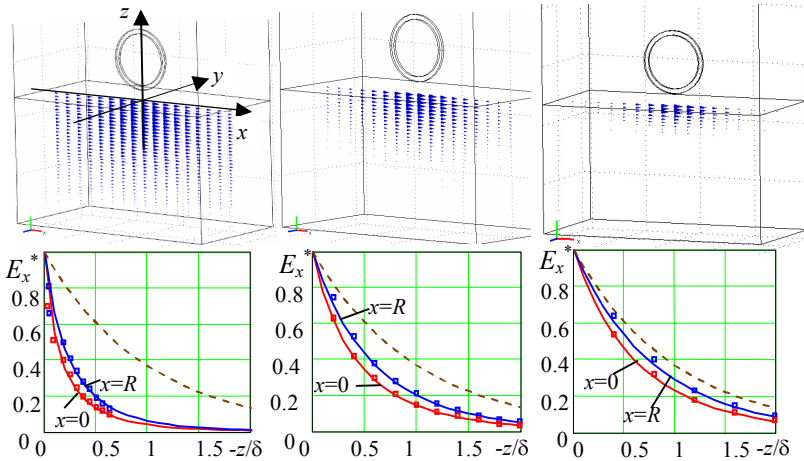
$\delta/R = 3,18; \varepsilon = 5,63$  $\delta/R = 1,0; \varepsilon = 1,78$  $\delta/R = 0,5; \varepsilon = 0,89$ 

Рис. 3.2. Затухание неоднородного электромагнитного поля в электропроводной среде

Видно, что с уменьшением глубины проникновения  $\delta$  по сравнению с радиусом контура  $R$  или с расстоянием  $h_0$  затухание поля приближается к максимально медленному затуханию однородного поля. Непосредственно под контуром при  $x=0$ , где контур наиболее близко приближается к поверхности раздела сред, затухание проявляется сильнее, чем при  $x=R$ . Это объясняется тем, что при  $x=R$  участки контура находятся на большем расстоянии от поверхности, и поэтому неравномерность распределения внешнего поля у поверхности меньше, чем в случае, когда  $x=0$ .

Отметим также, что соответствие результатов расчета в электропроводной области, выполненных разными методами, так же как и отмеченное ранее соответствие результатов в области диэлектрика, подтверждает корректность полученного аналитического решения и

вытекающие из него следствия для общей квазистационарной задачи.

### 3.2. Затухание неоднородного электромагнитного поля при глубине проникновения, малой по сравнению с характерными размерами контура

Как видно из представленных результатов расчета, с уменьшением глубины проникновения  $\delta$  по отношению к радиусу контура  $R$  или к расстоянию  $h_0$  затухание приближается к наиболее медленному затуханию, соответствующему однородному полю. Это обстоятельство является основанием для анализа затухания поля при сильном скин-эффекте, когда глубина проникновения является достаточно малой по сравнению с характерными размерами электромагнитной системы.

Анализ проведем для контура произвольной конфигурации, когда величина  $\varepsilon_1 = \mu\delta/\sqrt{2}r$  является малым параметром для любой точки контура, где  $r$  в соответствии с рис. 3.1 является расстоянием между точкой истока на контуре и точкой на поверхности раздела сред. Для подтверждения приближения закона затухания поля в этом случае к закону затухания однородного поля (2.2) проведем сравнение функций  $f_{i1}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  и  $f_{i2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  с учетом

множителя  $\sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}$  в показателе экспоненты и теми же

функциями  $f_{i10}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  и  $f_{i20}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$ , но при условии, что множитель принят равным единице, что соответствует случаю затухания однородного поля.

На рис. 3.3, а для функций, соответствующих влиянию направления тока на участках контура,



параллельных границе раздела сред, показаны изменения модулей функций в зависимости от относительной глубины  $-z/\delta$  при  $\mu = 1$ : сплошные линии соответствуют функции

$$\left| f_{i1} \left( \frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta \right) \right|, \quad \text{пунктирные} \quad - \quad \text{функции} \quad \left| f_{i10} \left( \frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta \right) \right|.$$

Результаты приведены для случая  $\beta = 0$ , то есть рассматриваются точки на поверхности непосредственно под элементом контура, для которых, как видно из рис. 2.14, функция  $|f_{i1}|$  принимает наибольшие значения. Изменение величины малого параметра  $\varepsilon_1$  связано с изменением высоты элемента контура над поверхностью.

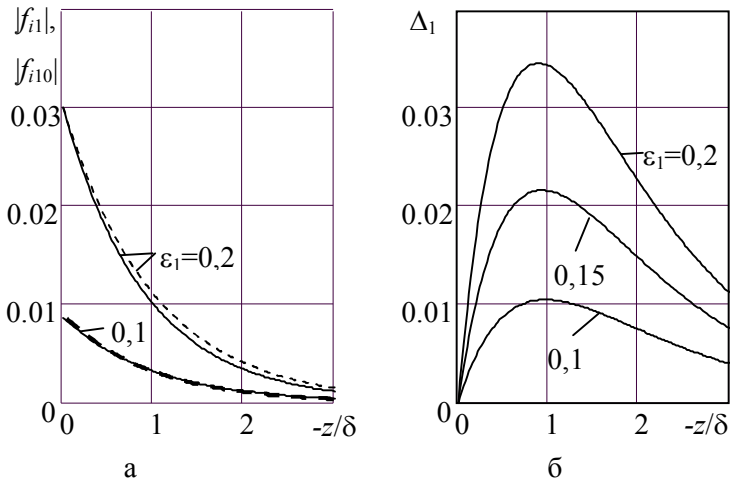


Рис. 3.3. Сравнение затухания неоднородного и однородного полей для функций  $f_{i1}$  и  $f_{i10}$

Качественное сравнение подтверждает утверждение о незначительном влиянии функциональной зависимости от переменной интегрирования множителя в аргументе экспоненциальной функции. Количественные значения отклонения, которые возникают при замене множителя

единицей, показаны на рис. 3.3, б в виде относительной величины отклонения  $\Delta_1 = \frac{\|f_{i1}\| - \|f_{i10}\|}{\|f_{i1}\|}$ .

Аналогичные результаты справедливы и для слагаемого подынтегральной функции в (3.2), связанного с вертикальной компонентой направления тока контура. Для этого слагаемого на рис. 3.4 представлены зависимости, с целью сравнить функции  $\left|f_{i2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)\right|$  и  $\left|f_{i20}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)\right|$ , а также показать величину относительного отклонения соответствующих значений. Отличие состоит в том, что точка наблюдения выбрана вблизи максимального значения  $|f_{i2}(0, \varepsilon_1, \beta)|$  на поверхности раздела сред при  $\rho = h$  ( $\beta = \pi/4$ ).

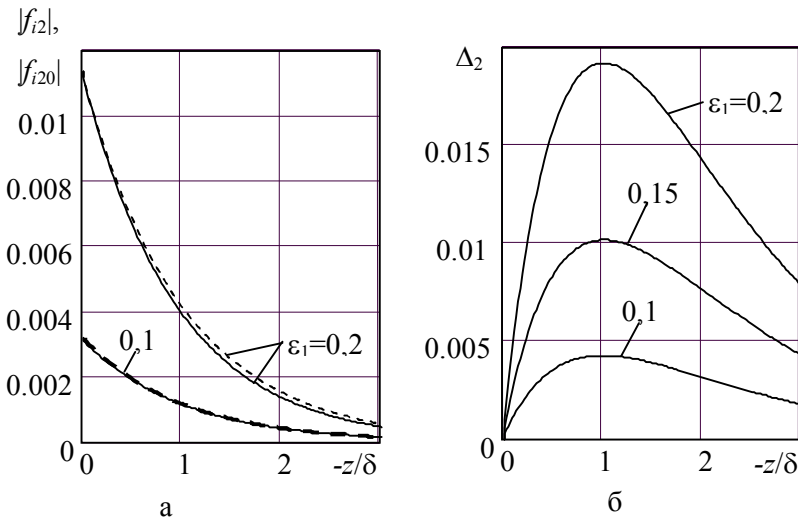


Рис. 3.4. Сравнение затухания неоднородного и однородного полей для функций  $f_{i2}$  и  $f_{i20}$

Из представленных зависимостей видно, что с уменьшением величины малого параметра  $\varepsilon_1$  ошибка от замены значения множителя быстро падает, примерно обратно пропорционально квадрату  $\varepsilon_1$ . В приведенном диапазоне значений малого параметра относительная ошибка не превышает нескольких процентов, причем в области, где величина поля составляет приблизительно треть от максимального значения на поверхности.

Отсюда можно сделать следующий вывод. В случае сильного скин-эффекта, когда максимальное значение параметра  $\varepsilon = \mu\delta/\sqrt{2}h_0$  (максимальное значение для точки на контуре с током, которая отстоит от плоскости на минимальное расстояние) является малой величиной, напряженность электрического поля затухает с глубиной от локального значения на поверхности по закону проникновения однородного поля в электропроводное полупространство независимо от положения точки на поверхности.

Если пренебрегать величиной ошибки, выражение для напряженности электрического поля (3.2) в электропроводной среде упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_i &\approx e^{pz} \dot{\mathbf{E}}_i(z=0) = e^{pz} \dot{\mathbf{E}}_{e\parallel}(z=0) = \\ &= e^{pz} i\omega \frac{\mu_0 \dot{J}_0}{4\pi} \oint_l \mathbf{e}_z \times \left[ \mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{G}_e \Big|_{z=0} \right] dl = \\ &= -e^{pz} 2i\omega \frac{\mu_0 \dot{J}_0}{4\pi} \frac{p}{\mu} \oint_l \left[ \mathbf{t}_\parallel f_1(0, \varepsilon_1, \beta) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_\rho f_2(0, \varepsilon_1, \beta) \right] dl.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Здесь учтено, что на границе раздела сред касательные компоненты напряженности поля  $\dot{\mathbf{E}}_i(z=0)$  и  $\dot{\mathbf{E}}_{e\parallel}(z=0)$  непрерывны. Поэтому на этой поверхности можно воспользоваться (1.65) или функциями  $f_1(0, \varepsilon_1, \beta)$  и  $f_2(0, \varepsilon_1, \beta)$  из (3.3), записанными без индекса, который бы

указывал на их принадлежность диэлектрической или электропроводной областям.

Электромагнитное поле контура с переменным током зависит от положения точки на поверхности раздела сред и является неоднородным полем. Полученный в (3.4) результат при условии малой величины параметра  $\varepsilon$  указывает на возможность использовать модель проникновения однородного электромагнитного поля. В этом отношении понятие сильного скин-эффекта можно расширить и считать сильным скин-эффект, при котором глубина проникновения поля является малой величиной по сравнению не только с характерными размерами электропроводного тела, но и с минимальным расстоянием от контура (источника поля) до граничной поверхности, когда справедливой является модель проникновения однородного поля в электропроводное тело.

### **3.3. Напряженности электрического и магнитного полей на границе раздела диэлектрической и электропроводной сред. Импедансное граничное условие.**

Приближенное соотношение (3.4), полученное на основании анализа аналитических выражений для точного решения задачи распределения трехмерного электромагнитного поля, принципиально ничем не отличается от распространенных моделей проникновения однородного поля. Соотношение содержит два множителя: закон затухания однородного поля и выражения для распределения поля на границе раздела сред. Рассмотрим вначале распределение электромагнитного поля по поверхности раздела сред (2.31) – (2.34), не ограничиваясь на данном этапе членами асимптотического ряда, для которых справедлив закон затухания однородного поля. Распределение поля на поверхности раздела сред важно в связи с его общим методическим значением и возможностью

обоснованного построения математических моделей электромагнитных систем, в элементах которых имеет место сильный скин-эффект.

На поверхности  $z = 0$  первое слагаемое в (2.34), справедливое в области диэлектрика, дает нулевое значение касательной к поверхности компоненты напряженности электрического поля. Наоборот, второе слагаемое

$$\dot{\mathbf{E}}_{e_2}(z=0) = \frac{I_0}{4\pi} \zeta \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl \right\} \Bigg|_{z=0} \quad (3.5)$$

содержит только касательную компоненту поля, которая в силу граничного условия имеет такое же значение и на поверхности со стороны электропроводной среды. Поэтому будем использовать общее обозначение  $\dot{\mathbf{E}}_{\parallel}(z=0)$ .

Члены разложения (3.5) содержат производные на границе раздела сред от выражения для напряженности магнитного поля, созданного контуром с током, зеркально отраженным от границы раздела сред. Преобразуем (3.5) таким образом, чтобы иметь напряженность магнитного поля исходного тока контура, протекающего в диэлектрической среде.

С учетом соотношений между величинами для исходного и зеркально отраженного контуров  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\parallel} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_{\parallel} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{r}(z=0) = \rho_{\parallel} + z_M \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{r}_1(z=0) = \rho_{\parallel} - z_M \mathbf{e}_z$ ,  $r_1(z=0) = r(z=0)$  для выражений в фигурных скобках (3.5) имеем

$$(-1)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \oint_l \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} dl \right\} \Bigg|_{z=0} = - \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \oint_l \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \right\} \Bigg|_{z=0} \quad (3.6)$$

Заметим, что выражение

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = - \frac{I_0}{4\pi} \oint_l \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl \quad (3.7)$$

представляет собой напряженность магнитного поля исходного контура с током. При этом касательной составляющей напряженности магнитного поля  $\dot{\mathbf{H}}_0$  является

$$\dot{\mathbf{H}}_{0\parallel} = -\mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_0]. \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.6) и (3.7) в (3.5), с учетом  $\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}$  касательную компоненту напряженности электрического поля на границе раздела сред можно записать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\parallel}(z=0) = \zeta \sum_{n=0}^N 2a_n (\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel} \right\} \Big|_{z=0}. \quad (3.9)$$

На основании принципа суперпозиции выражение (3.9) будет справедливым и в случае внешнего квазистационарного магнитного поля  $\dot{\mathbf{H}}_0$ , созданного системой источников, с ограничением, связанным с удаленностью источников от границы раздела сред, – малостью параметра  $\varepsilon$  для каждого из контуров с током.

Аналогичным образом, используя выражение для разложения в асимптотический ряд индукции магнитного поля  $\dot{\mathbf{V}}_e = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_e = \mu_0 (\dot{\mathbf{H}}_{e1} + \dot{\mathbf{H}}_{e2})$  (2.32), поле на поверхности раздела сред можно представить в виде ограниченной суммы, включающей внешнее магнитное поле и его производные по координате  $z$ .

Первое слагаемое  $\dot{\mathbf{H}}_{e1}$ , представляющее сумму магнитного поля исходного контура и контура с током, зеркально отраженного от плоской границы, дает магнитное поле в диэлектрическом полупространстве (2.7) при идеальном скин-эффекте, когда  $\delta \rightarrow 0$  и соответственно имеет нулевое значение перпендикулярной к поверхности компоненты напряженности магнитного поля на границе раздела сред:

$$\dot{\mathbf{H}}_{e1}(z=0) = \frac{\dot{I}_0}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \oint_l \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{t} \times \mathbf{r})}{r^3} dl = 2\dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}(z=0). \quad (3.10)$$

Второе слагаемое  $\dot{\mathbf{H}}_{e2}$  зависит от электрофизических свойств среды и частоты поля. Здесь каждый член ряда в качестве множителя содержит производную соответствующего порядка по вертикальной координате от индукции магнитного поля зеркально отраженного контура с током. В отличие от напряженности электрического поля, слагаемое  $\dot{\mathbf{H}}_{e2} = \dot{\mathbf{H}}_{2\parallel} + \dot{\mathbf{H}}_{2\perp}$  имеет ненулевые как параллельную  $\dot{\mathbf{H}}_{2\parallel} = -\mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{e2})$ , так и перпендикулярную  $\dot{\mathbf{H}}_{2\perp} = (\mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{H}}_{e2}) \mathbf{e}_z$  компоненты к плоской поверхности раздела сред:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{2\parallel}(z=0) &= -\frac{\dot{I}_0}{4\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^{n+1} \mathbf{e}_z \times \left\{ \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1)}{r_1^3} dl \right\} \Bigg|_{z=0}, \\ \dot{\mathbf{H}}_{e\perp}(z=0) &= -\frac{\dot{I}_0}{4\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^{n+1} \mathbf{e}_z \left\{ \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1)}{r_1^3} dl \right\} \Bigg|_{z=0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Во втором выражении (3.11) учтено, что перпендикулярная компонента определяется только вторым слагаемым в  $\dot{\mathbf{H}}_{e1} + \dot{\mathbf{H}}_{e2}$  и поэтому  $\dot{\mathbf{H}}_{2\perp} = \dot{\mathbf{H}}_{e\perp}$ .

Найдем выражения напряженности магнитного поля на границе раздела сред. При этом, как и прежде, перепишем (3.11) таким образом, чтобы вместо напряженности магнитного поля, созданного током зеркально отраженного контура, иметь напряженность магнитного поля исходного тока контура.

Преобразование выражения для касательной компоненты напряженности магнитного поля при  $z=0$  выполняется аналогично преобразованию выражения (3.5) для касательной компоненты электрического поля. Отличие заключается в том, что окончательные выражения содержат

производные непосредственно от касательной составляющей напряженности магнитного поля, а не от вектора, развернутого на  $\pi/2$  в плоскости раздела сред. В результате получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_{2\parallel}(z=0) = -\sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^{n+1} \left\{ \frac{\partial^{(n+1)} \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^{n+1}} \right\} \Big|_{z=0}. \quad (3.12)$$

Последнее выражение можно объединить с (3.10), справедливым для напряженности магнитного поля при идеальном скин-эффекте. В этом случае окончательно выражение для касательной к поверхности компоненты напряженности магнитного поля принимает вид

$$\dot{\mathbf{H}}_{\parallel}(z=0) = -\sum_{n=0}^{N+1} 2a_{n-1}(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)} \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^n} \right\} \Big|_{z=0}. \quad (3.13)$$

Здесь в обозначении  $\dot{\mathbf{H}}_{\parallel}(z=0)$  опущен индекс принадлежности к диэлектрическому полупространству, поскольку на границе раздела сред касательные компоненты напряженности магнитного поля непрерывны; номера членов ряда заменены  $n$  на  $n+1$ ; принято, что  $a_{-1} = -1$ .

Рассмотрим теперь перпендикулярную к поверхности раздела сред компоненту напряженности магнитного поля  $\dot{\mathbf{H}}_{e\perp} = (\mathbf{e}_z \cdot \dot{\mathbf{H}}_{e2}) \mathbf{e}_z$ . Для намагничивающейся электропроводной среды эта компонента на поверхности терпит разрыв – непрерывной является нормальная компонента индукции магнитного поля  $\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{e\perp} = \mu \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{i\perp}$ .

При преобразовании необходимо учесть, что выражения в фигурных скобках (3.11) для компоненты  $\dot{\mathbf{H}}_{e\perp}$  отличаются знаком от аналогичных преобразований (3.6) для компоненты  $\dot{\mathbf{H}}_{2\parallel}$ :



$$(-1)^n \left\{ \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1)}{r_1^3} dl \right\} \Big|_{z=0} = - \left\{ \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \frac{\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{r})}{r^3} dl \right\} \Big|_{z=0}. \quad (3.14)$$

В результате перпендикулярную компоненту напряженности поля можно представить в следующей форме:

$$\dot{\mathbf{H}}_{e\perp}(z=0) = - \sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{p} \right)^{n+1} \left\{ \frac{\partial^{(n+1)} \dot{\mathbf{H}}_{0\perp}}{\partial z^{n+1}} \right\} \Big|_{z=0}. \quad (3.15)$$

Оба соотношения (3.13) и (3.15) дают значения напряженности магнитного поля на границе раздела сред, выраженные через напряженность магнитного поля внешних источников  $\dot{\mathbf{H}}_0$  и ее производные по координате, перпендикулярной плоской границе.

Вместе выражения (3.9), (3.13) и (3.15) позволяют без решения дополнительных уравнений непосредственно найти электромагнитное поле на поверхности раздела сред, располагая только распределением поля внешних источников у границы. Наличие производных свидетельствует, что электромагнитное поле на поверхности определяется не только значением поля внешних источников, оно зависит также от степени неоднородности внешнего поля. Такая особенность объясняется, как было показано, зависимостью закона распределения индуцированного поля и токов в электропроводной среде от удаленности источников внешнего поля по сравнению с глубиной проникновения поля.

Используем теперь полученные результаты для оценки точности приближенного импедансного граничного условия, которым устанавливается соотношение между касательными компонентами напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела сред.

Выражения (3.9) и (3.13) дают связь не между касательными к границе компонентами напряженности

электрического и магнитного полей, а между соответствующими напряженностями полей и напряженностью магнитного поля внешних источников. Такая общая связь с внешним магнитным полем позволяет получить и соотношение, связывающее напряженности электрического и магнитного полей на границе диэлектрической и электропроводной областей.

Установим искомую связь между напряженностями полей для каждого члена разложения полей  $\dot{\mathbf{E}}_{\parallel}(z=0) = \sum_{n=0}^N \dot{\mathbf{E}}_{\parallel n}$

и  $\dot{\mathbf{H}}_{\parallel}(z=0) = \sum_{n=0}^{N+1} \dot{\mathbf{H}}_{\parallel n}$  в асимптотические ряды. При этом необходимо иметь в виду, что номер члена ряда  $n$  одновременно указывает на степень малого параметра  $\varepsilon^n = \left(\frac{\mu\delta}{\sqrt{2\lambda}}\right)^n = \left(\frac{\mu}{|p|\lambda}\right)^n$ , которым определяется величина

соответствующего члена ряда (здесь в качестве расстояния  $\lambda$  целесообразно выбрать минимальное расстояние от источников внешнего поля до поверхности раздела сред).

Сравнение членов рядов (3.9) и (3.13) с одинаковым номером  $n$  показывает, что они связаны между собой следующим соотношением:

$$a_{n-1}(\mu)\dot{\mathbf{E}}_{\parallel n} = -a_n(\mu)\zeta_e \times \dot{\mathbf{H}}_{\parallel n}. \quad (3.16)$$

Приведем конкретные выражения для нескольких первых членов ряда (3.16). Коэффициенты  $a_n$  определены в (2.26) – (2.28) и имеют значения

$$a_{-1} = -1, a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1 - \frac{1}{2\mu^2}, \dots$$

с учетом которых для первых трех членов ряда получаем

$$\begin{aligned}
 n = 0 \ (\varepsilon^0): \quad \dot{\mathbf{E}}_{\parallel 0} &= \zeta \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{\parallel 0}, \\
 n = 1 \ (\varepsilon^1): \quad \dot{\mathbf{E}}_{\parallel 1} &= \zeta \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{\parallel 1}, \\
 n = 2 \ (\varepsilon^2): \quad \dot{\mathbf{E}}_{\parallel 2} &= \left(1 - \frac{1}{2\mu^2}\right) \zeta \mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{H}}_{\parallel 2}, \dots
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Из (3.17) видно, что приближенное импедансное граничное условие Леонтовича справедливо с точностью до первых двух членов асимптотического ряда. Начиная с  $n = 2$  ( $\varepsilon^2$ ) соотношение изменяется, однако связь между членами ряда для касательных компонент напряженностей полей на границе раздела сред по-прежнему существует. В этом отношении можно утверждать, что выражение (3.16) обобщает импедансное граничное условие на более широкую область неоднородного электромагнитного поля, диффундирующего в электропроводное тело.

В приближенном импедансном граничном условии предполагается, что нормальная к поверхности компонента поля равна нулю. Как видно из (3.15), выполнение этого предположения является более жестким – оно выполняется только для нулевого члена разложения в асимптотический ряд и нарушается уже при  $\varepsilon^1$ .

### 3.4. Затухание электромагнитного поля: учет неоднородности поля

До сих пор возможность применения приближенного выражения (3.4) для затухающего в электропроводной среде электромагнитного поля основывалась на оценке величины функций  $f_{i1}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  и  $f_{i2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$ , которые вычислялись по общим выражениям (3.3) в виде несобственных интегралов. Было подтверждено, что изменение поля по закону затухания однородного поля справедливо, когда  $\varepsilon_1$

является малым параметром. Но при этом не исследовалось влияние различных членов разложения в асимптотический ряд. Такую оценку выполним, учитывая множитель

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2} \text{ в показателе экспоненциальной функции (3.1),}$$

имея в виду, что его влияние на результат увеличивается с увеличением параметра  $\varepsilon_1$ .

Будем рассматривать напряженность электрического поля в электропроводном полупространстве при условии, что параметр  $\varepsilon_1$  является малым. В этом случае выражение для поля в виде асимптотического ряда может быть записано не только на поверхности раздела сред, но также могут быть учтены дополнительные члены, связанные с отличием от единицы множителя в показателе экспоненциальной функции.

Действительно, как было показано, при малых значениях параметра  $\varepsilon_1$  на величину несобственных интегралов (3.3) в первую очередь влияет поведение подынтегральных функций вблизи нулевого значения переменной интегрирования  $\chi$ . Это позволяет в рамках представления об асимптотическом разложении использовать, как и прежде, не только разложение в степенной ряд функции  $w_1^{-1}(\chi)$ , но и разложение экспоненциальной функции (3.1). Удерживая кроме единицы еще один член разложения, запишем:

$$e^{qiz} = e^{\frac{\sqrt{2i}z}{\delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}} \approx \left[ 1 + \sqrt{2i} \frac{z}{\delta} \cdot \frac{1}{2\mu^2} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^2 \right] e^{\frac{\sqrt{2i}z}{\delta}}, \quad (3.18)$$

где считается, что отношение  $\frac{z}{\delta}$  не превышает нескольких единиц.

Подставляя (3.18) в (3.3), функции  $f_{i1}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  и

$f_{i2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right)$  можно приближенно представить в виде

$$f_{i1,2}\left(\frac{z}{\delta}, \varepsilon_1, \beta\right) \approx e^{\sqrt{2i} \frac{z}{\delta}} \left[ f_{1,2}(0, \varepsilon_1, \beta) + \sqrt{2i} \frac{z}{\delta} \cdot \frac{1}{2\mu^2} k_{1,2}(\varepsilon_1, \beta) \right]. \quad (3.19)$$

Здесь функции  $k_{1,2}(\varepsilon_1, \beta)$ , так же как и  $f_{1,2}(0, \varepsilon_1, \beta)$ , не зависят от глубины расположения точки наблюдения в электропроводном полупространстве. Зависимость от координаты  $z$  определяется только соответствующими множителями перед этими функциями.

Выражения для функций  $k_{1,2}(\varepsilon_1, \beta)$  и  $f_{1,2}(0, \varepsilon_1, \beta)$  в виде разложения в асимптотический ряд следуют из (3.3) при

$z = 0$  после подстановки  $\frac{1}{w_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^n$ , аналогично

тому, как это было выполнено для функции  $\dot{G}_e$  в (2.23):

$$\begin{cases} f_1(0, \varepsilon_1, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{1,n}, & f_2(0, \varepsilon_1, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{2,n}, \\ k_1(\varepsilon_1, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{1,n+2}, & k_2(\varepsilon_1, \beta) = \sqrt{i} \sum_{n=0}^N a_n f_{2,n+2}, \end{cases} \quad (3.20)$$

где обозначено

$$\begin{cases} f_{1,n} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{n+1} \exp\left(-\frac{\cos\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) J_0\left(\frac{\sin\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) d\chi, \\ f_{2,n} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{n+1} \exp\left(-\frac{\cos\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) J_1\left(\frac{\sin\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) d\chi. \end{cases} \quad (3.21)$$

Для получения окончательных выражений воспользуемся уже найденным разложением (3.9) в асимптотический ряд напряженности электрического поля на

границе раздела сред, которое, очевидно, является результатом подстановки (3.20) в (3.2) при  $z = 0$ . Однако вначале сделаем ряд замечаний.

Во-первых, как видно из (3.20), (3.21), подынтегральные функции в  $k_{1,2}(\varepsilon_1, \beta)$ , в отличие от  $f_{1,2}(0, \varepsilon_1, \beta)$ , содержат дополнительный множитель  $\left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^2$ .

Поэтому при подстановке функций  $k_{1,2}(\varepsilon_1, \beta)$  в то же выражение (3.2) при  $z = 0$  соответствующие значения степени функций и производных изменятся с  $n$  на  $n + 2$ . В результате, используя представление напряженности поля на границе раздела сред в виде (3.9), выражение (3.18), в котором учитывается отличие от единицы множителя в экспоненциальной функции, примет вид

$$\dot{\mathbf{E}}_i \approx e^{pz} \zeta \mathbf{e}_z \times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^n \left\{ \frac{\partial^{(n)} \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^n} \right\} \Big|_{z=0} + \\ & + \frac{pz}{2\mu^2} \sum_{n=0}^N 2a_n(\mu) \left(\frac{\mu}{p}\right)^{n+2} \left\{ \frac{\partial^{(n+2)} \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^{n+2}} \right\} \Big|_{z=0} \end{aligned} \right\}. \quad (3.22)$$

Во-вторых, так как в (3.18) в дополнение к единице учтен только один член ряда, то и функции  $k_{1,2}(\varepsilon_1, \beta)$  должны содержать только один член асимптотического разложения. С той же точностью по параметру  $\varepsilon_1$  функции  $f_{1,2}(0, \varepsilon_1, \beta)$  могут содержать не более трех членов ряда. С учетом трех значений коэффициентов  $a_n$  окончательное выражение для напряженности электрического поля в электропроводной среде с точностью до линейного члена разложения экспоненциальной функции (3.18) примет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{E}}_i \approx 2e^{pz} \mathbf{e}_z \times \left\{ \begin{aligned} & \left[ \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel} - \frac{\mu}{p} \frac{\partial \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z} \Big|_{z=0} + \left( \frac{\mu}{p} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{2\mu^2} \right) \frac{\partial^{(2)} \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\mu}{p} \right)^2 \frac{pz}{2\mu^2} \frac{\partial^{(2)} \dot{\mathbf{H}}_{0\parallel}}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (3.23)$$

Как следует из (3.23), отклонение закона затухания неоднородного электромагнитного поля в электропроводной среде от закона затухания однородного поля проявляется при учете малого параметра во второй степени  $\varepsilon^2$ . По этой причине величина отклонения пропорциональна значению малого параметра во второй степени  $\varepsilon^2$ , что уже отмечалось при анализе отклонений, показанных на рис. 3.3 и 3.4. Из (3.23) вытекает, что максимальное значение модуля дополнительного учитываемого слагаемого достигается при

максимальном значении функции  $|e^{pz} pz| = \left| e^{\sqrt{2i} \frac{z}{\delta}} \sqrt{2i} \frac{z}{\delta} \right|$ .

Максимум будет иметь место при  $-z = \delta$ . Такое значение также хорошо согласуется с координатой  $z$  максимального отклонения, рассчитанного по общим формулам и показанного на тех же рис. 3.3 и 3.4.

Таким образом, применение математической модели проникновения однородного поля в электропроводную среду для неоднородного поля справедливо с точностью до малого параметра в первой степени  $\varepsilon^1$  как для исследования затухания поля, так и при использовании приближенного импедансного граничного условия Леонтовича.

Вместе с тем, не ограничиваясь моделью проникновения однородного поля в электропроводную среду, к определению сильного скин-эффекта можно подойти и с более общей позиции и считать сильным скин-эффект, при котором отношение глубины проникновения электромагнитного поля в электропроводную среду к

расстоянию до источников поля является малым параметром. При этом допускается справедливость модели проникновения неоднородного электромагнитного поля, а наличие малого параметра указывает, в частности, на возможность использования разложения решения в ограниченный асимптотический ряд. В дальнейшем изложении используется именно такое понятие сильного скин-эффекта.

#### 3.5. Выводы к главе 3

1. Из точного аналитического решения трехмерной квазистационарной задачи проникновения электромагнитного поля в электропроводное полупространство следует, что неоднородное электромагнитное поле затухает в электропроводной среде всегда сильнее, чем однородное.

2. Применение приближенного метода разложения решения в асимптотический ряд позволило с учетом индуцированных токов в электропроводном полупространстве получить явные выражения для напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела сред. Члены асимптотического ряда являются функциями не только поля внешних источников в заданной точке поверхности, что имеет место при использовании модели проникновения однородного поля в электропроводное полупространство, но и производных внешнего поля по координате, перпендикулярной к граничной поверхности.

3. Показано, что применение для исследования проникновения в электропроводную среду неоднородного электромагнитного поля математической модели проникновения однородного поля справедливо с точностью до малого параметра, равного отношению глубины проникновения поля к минимальному расстоянию от источников до границы раздела сред, в первой степени  $\varepsilon^1$ . Данное ограничение справедливо как для исследования



затухания поля, так и при использовании приближенного импедансного граничного условия Леонтовича.

Получено соотношение для членов асимптотического ряда, которое обобщает импедансное граничное условие на более широкую область неоднородного электромагнитного поля, диффундирующего в электропроводное тело.

4. С позиции возможности применения для неоднородного электромагнитного поля математической модели проникновения в электропроводную среду однородного поля предложено расширить понятие сильного скин-эффекта и считать сильным такой скин-эффект, при котором глубина проникновения поля является малой по сравнению не только с характерными размерами электропроводного тела, но и с минимальным расстоянием от источников внешнего поля до граничной поверхности.

#### **ГЛАВА 4. ТРЕХМЕРНОЕ ИМПУЛЬСНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА, ПРОТЕКАЮЩЕГО ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

В этой главе в основу исследования импульсных электромагнитных полей с учетом индуцированных токов в электропроводном теле положено полученное для комплексных амплитуд точное аналитическое решение трехмерной квазистационарной задачи поля токового контура произвольной пространственной конфигурации, расположенного вблизи электропроводного намагничивающегося полупространства.

Выражения для комплексных амплитуд дают частотный спектр электромагнитного поля. При этом общее решение для импульсных полей находится с использованием обратного преобразования Фурье для магнитной и электрической составляющих поля. Аналитическое решение в таком виде приводит к необходимости вычисления тройных несобственных интегралов.

Для упрощения вычислительных процедур при условии сильного скин-эффекта развивается асимптотический метод расчета, в котором учитываются особенности импульсного процесса. Поскольку применяемое разложение в асимптотический ряд справедливо в высокочастотной области спектра, то для членов ряда определяются нижние границы частотного спектра и соответственно максимальные значения промежутков времени от начала действия импульса, для которых справедливо разложение в асимптотический ряд.

Внимание к изучению импульсных электромагнитных полей устройств, в элементах которых проявляется сильный скин-эффект, обусловлено, с одной стороны, широкой

областью использования таких устройств, а с другой, – необходимостью учета различных геометрических и электрофизических особенностей при моделировании физических процессов, а также поиска геометрии электромагнитных систем и оптимизации их параметров. В этом отношении достаточно указать, например, установки создания импульсных напряжений и токов, которые широко используются в электротехнических и электрофизических лабораториях в области диагностики и профилактики электротехнических устройств, установки по созданию сильных импульсных электромагнитных полей для электрофизических исследований [28, 31, 50-53]. В качестве примера приводятся некоторые результаты применения разработанных методов расчета в области технологии воздействия импульсных токов высокой плотности для изменения механических свойств и регулирования напряженно-деформированного состояния металлических изделий [54, 55].

#### **4.1. Общее аналитическое решение для трехмерного импульсного электромагнитного поля тока контура произвольной конфигурации**

Найденное общее решение для комплексных амплитуд трехмерной квазистационарной задачи электромагнитного поля системы «произвольный пространственный контур с синусоидальным током – электропроводное намагничивающееся полупространство» решает также в общей постановке и задачу для импульсного тока контура. В этом случае, рассматривая полученные выражения для потенциалов и векторов поля как их частотный спектр, достаточно при выполнении необходимых условий применить обратное преобразование Фурье для определения соответствующих величин.

Если исходный ток  $\dot{I}_0(i\omega)$  рассматривать как частотный спектр несинусоидального тока  $I_0(t)$ , то выражения (1.33), (1.34), (1.64), (1.65) в диэлектрической области и (1.39), (1.43), (1.44) в электропроводной среде для потенциалов и векторов поля общего аналитического решения дадут частотный спектр соответствующих характеристик поля.

Так, в диэлектрическом полупространстве потенциалы в калибровке Лоренца и векторы поля содержат слагаемые, которые по-разному зависят от частоты.

Частотный спектр первых двух слагаемых векторного потенциала (1.33)  $\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2$  и индукции магнитного поля (1.34)  $\dot{\mathbf{B}}_e = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{B}}_0 + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2$  определяется только частотным спектром тока контура  $\dot{I}_0(i\omega)$ , и поэтому для этих слагаемых зависимость от времени повторяет зависимость от времени импульса тока  $I_0(t)$ . В случае идеального скин-эффекта, когда  $\delta \rightarrow 0$  для всех частот спектра, первые два слагаемых полностью решают задачу распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля.

Если условие идеального скин-эффекта не выполняется, то необходимо учитывать слагаемые  $\dot{\mathbf{A}}_2$  и  $\dot{\mathbf{B}}_2$ , которые помимо тока  $\dot{I}_0(i\omega)$  определяются функцией

$$\dot{G}_e(i\omega) = 2 \int_0^\infty e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta\rho) \left[ \vartheta + \frac{1}{\mu} \sqrt{\vartheta^2 + i\omega\mu\mu_0\gamma} \right]^{-1} d\vartheta, \text{ зависящей}$$

от частоты. В этом случае частотный спектр векторного потенциала и индукции магнитного поля отличаются от частотного спектра тока контура [56]:

$$\dot{\mathbf{A}}_e(i\omega) = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi\gamma} \oint \left[ \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) \dot{I}_0(i\omega) - \mathbf{t}_1 \frac{\partial \dot{V}_A(i\omega)}{\partial z} \right] dl, \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_e(i\omega) = \dot{\mathbf{B}}_0 + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \left[ \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) \dot{I}_0(i\omega) - \mathbf{t}_1 \times \nabla \left( \frac{\partial \dot{V}_A(i\omega)}{\partial z} \right) \right] dl, \quad (4.2)$$

где

$$\dot{V}_A(i\omega) = \dot{I}_0(i\omega) \dot{G}_e(i\omega). \quad (4.3)$$

Располагая выражением для частотного спектра функции  $\dot{G}_e(i\omega)$  и выполняя обратное преобразование Фурье, зависимости векторного потенциала и индукции магнитного поля от времени можно найти в виде

$$\mathbf{A}_e(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \left[ \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) I_0(t) - \mathbf{t}_1 \frac{\partial V_A(t)}{\partial z} \right] dl, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}_e(t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \left[ \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) I_0(t) - \mathbf{t}_1 \times \nabla \left( \frac{\partial V_A(t)}{\partial z} \right) \right] dl, \quad (4.5)$$

где

$$V_A(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\omega t) \operatorname{Re}[\dot{V}_A(i\omega)] d\omega. \quad (4.6)$$

В выражениях для частотного спектра скалярного потенциала  $\dot{\phi}_e$  и напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2$  в отличие от (4.1) и (4.2) содержится общий множитель  $i\omega$ .

Для первых двух слагаемых напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{E}}_1$  наличие множителя  $i\omega$  связано с зависимостями этих слагаемых от производной тока контура по времени. Частотный спектр скалярного потенциала  $\dot{\phi}_e$  и слагаемого  $\dot{\mathbf{E}}_2$  напряженности электрического поля отличается от частотного спектра производной тока контура по времени. Выражения для этих характеристик электромагнитного поля имеют вид

$$\dot{\phi}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \dot{V}_\varphi(i\omega) dl, \quad (4.7)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_e(i\omega) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \left[ \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) i\omega \dot{I}_0(i\omega) - \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{V}_\varphi] \right] dl, \quad (4.8)$$

где

$$\dot{V}_\varphi(i\omega) = i\omega \dot{I}_0(i\omega) \dot{G}_e(i\omega). \quad (4.9)$$

Зависимости от времени скалярного потенциала  $\varphi_e(t)$  и слагаемого  $\mathbf{E}_2(t)$  находятся в результате обратного преобразования Фурье от функции  $\dot{V}_\varphi(i\omega)$ , которая, как видно, отличается от  $\dot{V}_A(i\omega)$ :

$$\varphi_e(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) V_\varphi(t) dl, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{E}_e(t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \left[ \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) \frac{\partial I_0(t)}{\partial t} - \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla V_\varphi(t)] \right] dl, \quad (4.11)$$

где

$$V_\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\omega t) \operatorname{Re}[\dot{V}_\varphi(i\omega)] d\omega. \quad (4.12)$$

Аналогичным образом, используя найденное решение в виде комплексных амплитуд, можно записать и общие выражения для потенциалов и векторов электромагнитного поля в электропроводном полупространстве.

Приведенные выражения представляют собой аналитические выражения в виде квадратур для расчета электромагнитных полей с учетом вихревых токов в электропроводной среде в достаточно общей постановке – контур произвольной пространственной конфигурации, по которому протекает произвольный импульсный ток. Вместе с тем решение выражено в виде тройных несобственных интегралов и, кроме того, наличие комплексной амплитуды частотного спектра тока предполагает дополнительную интегральную процедуру прямого преобразования Фурье. Отмеченные обстоятельства указывают на то, что для

эффективного использования приведенного аналитического подхода важной задачей является упрощение вычислений.

## **4.2. Метод асимптотического разложения для импульсного трехмерного квазистационарного поля**

Как показано в главе 2, применение метода разложения электромагнитного поля в асимптотический ряд по введенному малому параметру  $\varepsilon_1 = \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}r_1}$  позволяет не

только упростить вычисления в случае сильного скин-эффекта, но и сформулировать некоторые общие положения о формировании электромагнитного поля. Вместе с тем метод асимптотического разложения является приближенным методом исследования, поэтому для импульсного поля необходим анализ возможности его использования, поскольку условие малости параметра  $\varepsilon_1$  выполняются не для всего спектра частот. При этом точные аналитические выражения для электромагнитного поля могут служить эталоном для сравнения и нахождения погрешностей приближенного метода.

### **4.2.1. Решение для импульсного электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве в виде асимптотического ряда**

Рассмотрим применение метода асимптотического разложения для электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве  $z > 0$ . Здесь комплексные амплитуды потенциалов и векторов поля или, по другому, их частотные спектры для несинусоидальных величин целиком определяются через единственную функцию  $\dot{G}_e(i\omega)$ , которая входит в подынтегральные выражения линейных контурных интегралов.

Потенциалы и векторы поля были представлены в виде соответствующих асимптотических рядов (2.31) – (2.34) с использованием разложения функции  $\dot{G}_e(i\omega)$ :

$$\dot{G}_e(i\omega) \approx \dot{G}_{eN} = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)}(i\omega), \quad (4.13)$$

где каждый член разложения имеет простую зависимость от частоты, которую выделим отдельным множителем:

$$\dot{G}_{e1}^{(n)}(i\omega) = (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu_0\mu\gamma}} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right) = \frac{g_n}{(i\omega)^{(n+1)/2}}. \quad (4.14)$$

Здесь функции  $g_n$  каждого члена ряда не зависят от частоты:

$$g_n = g_n(\mu, \gamma, r_1) = (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu_0\mu\gamma}} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right). \quad (4.15)$$

Простой вид частотной зависимости каждого члена ряда позволяет легко перейти к нахождению поля импульсного тока.

Частотный спектр каждого члена асимптотического ряда для потенциалов и векторов поля определяется не только частотным спектром функции  $\dot{G}_{e1}^{(n)}(i\omega)$ , но и частотным спектром тока  $\dot{I}_0(i\omega)$ . В общих аналитических выражениях аналогично (4.6) и (4.12) для членов ряда введем следующие функции:

– для векторного потенциала и индукции магнитного поля

$$\dot{V}_{An}(i\omega) = \dot{I}_0(i\omega) \dot{G}_{e1}^{(n)}(i\omega); \quad (4.16)$$

– для скалярного потенциала и напряженности электрического поля

$$\dot{V}_{\varphi n}(i\omega) = i\omega \dot{I}_0(i\omega) \dot{G}_{e1}^{(n)}(i\omega). \quad (4.17)$$



Общая задача в обоих случаях заключается в том, чтобы при заданной зависимости тока от времени  $I_0(t)$  найти зависимость от времени составляющих  $V_{An}(t)$  и  $V_{\varphi n}(t)$ .

Эту задачу разобьем на два этапа. Сначала найдем зависимость от времени при влиянии единичного импульса тока  $T(t)$ :

$$T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

На следующем этапе функций  $V_{An}(t)$  и  $V_{\varphi n}(t)$  для произвольной зависимости от времени тока контура  $I_0(t)$  найдем, воспользовавшись интегралом Дюамеля.

Учитывая, что несобственный интеграл по частоте от функций типа (4.14) не удовлетворяет условию ограниченности, будем вместо оператора  $i\omega$  использовать оператор Лапласа  $p$ . Обратное преобразование Фурье для функций типа (4.14) в дальнейшем непосредственно не используется, и замена обозначения связана только с корректностью записи выражений в классе обычных функций.

Так как изображением Лапласа единичного импульса является  $T(t) \div T(p) = 1/p$ , то изображениями Лапласа произведений  $T(p)G_{el}^{(n)}(p)$  и  $pT(p)G_{el}^{(n)}(p)$  для каждого члена разложения в асимптотический ряд будут

$$\Lambda_{An}(p) = T(p) \cdot G_{el}^{(n)}(p) = \frac{\mathcal{G}_n}{p^{(n+3)/2}}, \quad (4.19)$$

$$\Lambda_{\varphi n}(p) = pT(p) \cdot G_{el}^{(n)}(p) = \frac{\mathcal{G}_n}{p^{(n+1)/2}}. \quad (4.20)$$

Обратное преобразование Лапласа для каждого  $\Lambda_{An}(p)$  и  $\Lambda_{\varphi n}(p)$  известно [41]. В результате зависимости от времени для приближенного значения функций  $\Lambda_A(t)$  и

$\Lambda_{\varphi}(t)$  при действии единичного импульса тока  $T(t)$  примут вид

$$\Lambda_A(t) = \sum_{n=0}^N \Lambda_{An}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{g_n}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} t^{(n+1)/2}, \quad (4.21)$$

$$\Lambda_{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^N \Lambda_{\varphi n}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{g_n}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} t^{(n-1)/2}. \quad (4.22)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция, причем

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \begin{cases} ((k-1)/2)! & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k/2}} (k-1)! & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots, \\ \sqrt{\pi} & \text{при } k = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Функции  $\Lambda_{An}(t)$  и  $\Lambda_{\varphi n}(t)$  для нулевого члена разложения ( $n=0$ ) существенным образом отличаются между собой. Функция  $\Lambda_{A0}(t) \sim t^{1/2}$  является ограниченной при  $t \rightarrow 0$ . Наоборот, функция  $\Lambda_{\varphi 0}(t) \sim t^{-1/2}$  неограниченно возрастает. Поэтому рассмотрим отдельно общие выражения: с одной стороны для векторного потенциала и индукции магнитного поля, с другой – выражения для скалярного потенциала и напряженности электрического поля.

Для получения функции  $V_A(t)$  при протекании по контуру произвольного тока  $I_0(t)$  применим интеграл Дюамеля в следующей форме [57, 58]:

$$V_A(t) = \Lambda_A(0)I_0(t) + \int_0^t \left[ \frac{d\Lambda_A(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t-\tau} I_0(\tau) \right] d\tau. \quad (4.24)$$

Учитывая, что функция  $\Lambda_A(t)$  для расчета векторного потенциала и индукции магнитного поля при  $t=0$  равняется нулю  $\Lambda_A(0)=0$ , получим окончательное выражение для определения зависимостей  $V_A(t)$  при протекании произвольного тока:

$$V_A(t) = \sum_{n=0}^N V_{An}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{n+1}{2\Gamma((n+3)/2)} g_n P_n(t), \quad (4.25)$$

где  $P_n(t) = \int_0^t (t-\tau)^{(n-1)/2} I_0(\tau) d\tau$ .

Выражение (4.25) представляет собой приближенное значение в виде асимптотического ряда подынтегральной функции (4.6) в контурных интегралах (4.4) и (4.5).

Рассмотрим возможность применения интеграла Дюамеля для расчета скалярного потенциала и напряженности электрического поля. В этом случае необходимо ограничить вид зависимости тока контура от времени таким образом, чтобы исключить неограниченный рост поля. Для проведения анализа будем использовать другую форму интеграла Дюамеля. Для нее производная применяется не для функции, связанной с действием единичного импульса, что приводит к особенности подынтегральной функции, а в форме, в которой используется производная тока от времени. Сначала проведем анализ лишь для нулевого члена асимптотического ряда  $n=0$ , поскольку именно для него возникают определенные трудности. Для этого члена ряда интеграл Дюамеля имеет вид

$$V_{\varphi 0}(t) = \Lambda_{\varphi 0}(t) I_0(0) + \int_0^t \left[ \frac{dI_0(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=t-\tau} \Lambda_{\varphi 0}(\tau) d\tau. \quad (4.26)$$

Первое слагаемое будет равно нулю, если отсутствует скачок тока, т.е.  $I_0(0)=0$ . В этом случае, не ограничивая общности, будем считать, что вблизи  $t=0$  ток контура

изменяется со временем по произвольному степенному закону  $I_0(t) \approx at^k$ , где  $k > 0$ . Тогда вблизи  $t = 0$  из (4.26) получаем

$$V_{\varphi 0}(t) = ak \frac{g_n}{\Gamma((n+1)/2)} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} \tau^{-1/2} d\tau. \quad (4.27)$$

По теореме о среднем (4.27) можно записать как

$$V_{\varphi 0}(t) = ak \frac{g_n}{\Gamma((n+1)/2)} \xi^{k-1} \int_0^t \tau^{-1/2} d\tau = 2k \frac{g_n}{\Gamma((n+1)/2)} \xi^{k-1} t^{1/2}, \quad (4.28)$$

где точка  $\xi$  находится в промежутке  $0 \div t$ . При малых значениях  $t$  имеем  $\lim_{t \rightarrow 0} V_{\varphi 0}(t) \sim t^{k-1+1/2} = t^{k-1/2}$ . Функция  $V_{\varphi 0}(t)$  и соответственно скалярный потенциал и напряженность электрического поля при  $t \rightarrow 0$  будут иметь ограниченное значение, в случае если ток изменяется в начальный момент по закону  $I_0(t) \approx at^k$ , когда  $k > 1/2$ .

Таким образом, функцию  $V_{\varphi}(t)$  можно определять следующим выражением с ограничением на рост  $I_0(t)$  в начальный момент времени:

$$V_{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^N V_{\varphi n}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{g_n}{2\Gamma((n+1)/2)} Q_n(t), \quad (4.29)$$

где  $Q_n(t) = \int_0^t \left[ \frac{dI_0(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t-\tau} \right] \tau^{(n-1)/2} d\tau.$

Выражение (4.29) дает разложение в асимптотический ряд подынтегральной функции (4.9) в контурных интегралах (4.7) и (4.8).

С использованием выражений (4.26) и (4.29) вместо зависимостей потенциалов и векторов поля в частотной области (2.31) – (2.34) получим выражения для асимптотического разложения соответствующих характеристик электромагнитного поля при протекании по контуру тока, который изменяется во времени произвольным образом. Для

этого в выражениях для векторного потенциала (4.4) и индукции магнитного поля (4.5) необходимо использовать функцию  $V_A(t)$  в виде асимптотического ряда (4.25). В выражениях для скалярного потенциала (4.7) и напряженности электрического поля и (4.8) нужно использовать функцию  $V_\varphi(t)$  в виде разложения в асимптотический ряд (4.29).

Простой пример применения использования первых двух членов асимптотического разложения для определения магнитного поля без анализа погрешностей приведен в [40].

Относительно напряженности электрического поля  $E_e(t)$  надо учесть, что с учетом выражения для первых двух слагаемых, ограниченное значение поля в начальный момент времени будет, если изменение исходного тока контура происходит не быстрее, чем по линейному закону, т.е.  $\lim_{t \rightarrow 0} I_0(t) \sim t^k$  с показателем степени  $k \geq 1$ . Такое ограничение является более жестким, чем ограничение для третьего слагаемого. Поэтому в этом случае третье слагаемое поля тем более не будет стремиться к бесконечности. Указанные ограничения скорости изменения исходного тока касаются не только начального момента времени, но и должны выполняться на любом промежуточном участке времени.

На некорректные физические следствия при использовании моделей со скачком поля в начальный момент времени указывает и Г. Кнопфель [31]. Поэтому в дальнейшем в связи со сделанными замечаниями при расчетах импульсного электрического поля будем считать, что его изменение во времени удовлетворяет указанным ограничениям.

Таким образом, вместо тройных несобственных интегралов в выражениях для потенциалов и векторов поля в диэлектрическом полупространстве присутствуют только контурные интегралы, но при этом подынтегральные

функции представлены ограниченными асимптотическими рядами, в каждом слагаемом которых зависимости от координат и времени рассчитываются отдельно с использованием известных простых выражений. Это позволяет значительно уменьшить необходимый объем вычислений при расчете трехмерных импульсных электромагнитных полей с учетом вихревых токов в электропроводном полупространстве.

#### **4.2.2. Граничные значения частоты и моментов времени в методе разложения в асимптотический ряд импульсного электромагнитного поля**

Особенностью импульсных процессов является то, что частотный спектр сигнала представлен всеми частотами. В то же время применение приближенного метода расчета с использованием ограниченных асимптотических рядов оказывается возможным, если выполняется условие малости параметра

$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{r_1 \sqrt{\omega \mu \gamma}} = \frac{\mu \delta}{\sqrt{2} r_1} < 1$ , который связывает

между собой глубину проникновения поля и расстояние между точками наблюдения и источника на зеркально отраженном контуре. Поэтому метод применим не для всего частотного диапазона, и это обстоятельство должно учитываться при разработке приближенного метода расчета импульсного электромагнитного поля.

Следующее ограничение связано с тем, что каждый член ряда вычисляется с определенной погрешностью, которая зависит не только от малого параметра  $\varepsilon_1$ , но и от номера члена ряда, возрастая с его увеличением, что также необходимо учитывать при разработке приближенного метода расчета.

Наконец, для импульсных систем заданной является зависимость тока исходного контура от времени, и поэтому ограничения по частоте для всего разложения и для каждого

члена ряда необходимо связать с ограничениями по времени для импульсного процесса.

Отмеченные обстоятельства указывают на необходимость анализа условий, при которых погрешность вычисления не превышает определенного заданного значения. Рассмотрим указанные ограничения с точки зрения возможности разложения в асимптотический ряд импульсного электромагнитного поля [37, 59].

Первое ограничение связано с возможностью разложения общего решения в ряд при условии малости параметра  $\varepsilon_1 < 1$ . Условие выполняется для частот, больших определенного нижнего значения  $f_m$  :

$$f > f_m = \frac{\mu}{2\pi\mu_0\gamma r_1^2 \varepsilon_m^2}, \quad (4.30)$$

где  $\varepsilon_m$  – выбранное допустимое значение малого параметра. Ограничение по частоте зависит от расстояния  $r_1$ . Наибольшее ограничение будет при минимальном  $r_1$ , когда точка наблюдения находится на поверхности раздела сред непосредственно под участком контура с током (рис. 2.3). В этом случае  $r_1 = h$ , где  $h$  – высота расположения участка контура над поверхностью.

Второе ограничение связано с тем, что каждый член асимптотического ряда определяется с погрешностью, которая возрастает с увеличением частоты и номера члена ряда. Именно этим обстоятельством обусловлено ограничение количества членов ряда. Для оценки относительной погрешности  $\Delta_n$  в частотной области каждого члена  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$  асимптотического ряда для функции  $\dot{G}_e$  будем использовать найденное выражение (2.46):

$$\Delta_n = \frac{|\dot{G}_{e1}^{(n)} - \dot{G}_e^{(n)}|}{|\dot{G}_e^{(n)}|} = \frac{e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}}{1 - e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}}. \quad (4.31)$$

Поскольку параметр  $\varepsilon_1$  зависит от частоты, то для получения минимального значения частоты поля, до которого необходимо учитывать  $n$ -й член ряда, выражение (4.31) можно рассматривать как уравнение относительно малого параметра при заданной допустимой погрешности  $\Delta_n$ . Будем обозначать через  $\varepsilon_n$ , в отличие от  $\varepsilon_m$ , значение малого параметра, которое связано с конкретным членом ряда, а предельную частоту, соответствующую найденному  $\varepsilon_n$ , – через  $f_n$ . Член ряда номера  $n$  может применяться в пределах частот, которые определяются аналогично (4.30):

$$f > f_n = \frac{\mu}{2\pi\mu_0\gamma r_1^2 \varepsilon_n^2}. \quad (4.32)$$

Проанализируем граничные частоты  $f_m$  и  $f_n$ , при которых возможно выполнить разложение в асимптотический ряд.

Предельные частоты будем нормировать на базисную частоту  $f_b = (\pi h^2 \mu \mu_0 \gamma)^{-1}$ , при которой глубина проникновения поля в электропроводную среду равняется высоте расположения элемента контура с током  $\delta = h$ . В этом случае величина нормированной частоты связана со значением малого параметра как

$$f^* = \frac{f}{f_b} = \frac{\mu^2}{2\varepsilon^2 (r_1/h)^2}. \quad (4.33)$$

Например, для выбранных значений малого параметра  $\varepsilon_m = 0,3$  и  $\varepsilon_n = 0,2$  при  $\mu = 1$  в точках на поверхности раздела сред непосредственно под элементом контура  $r_1 = h$



соответствующие нормированные частоты будут  $f_m^* = 5,56$  и  $f_m^* = 12,5$ .

На рис. 4.1 представлены нормированные значения предельных частот в зависимости от номера члена ряда  $n$  для трех значений допустимых относительных погрешностей  $\Delta_n$  определения членов асимптотического ряда. Предельные частоты получены при  $\mu = 1$  для точки  $\rho = 0, z = 0$ , для которой в связи с минимальным значением расстояния  $r_1 = h$  граничные частоты  $f_n^*$  принимают максимальные значения. Для этой точки доля частотного спектра импульса, который не учитывается, будет наибольшей.

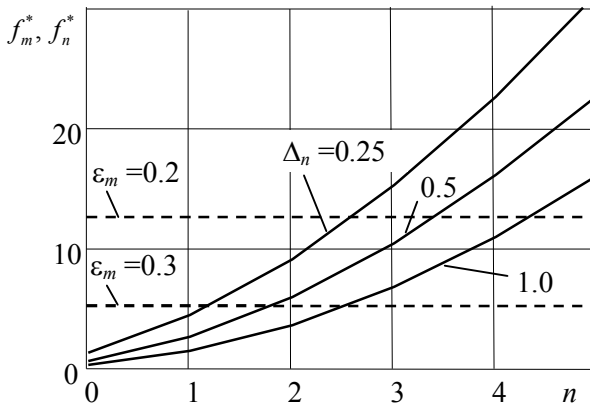


Рис. 4.1. Нормированные предельные частоты для членов асимптотического ряда в точке  $\rho = 0, z = 0$

Ограничение по частоте в методе асимптотического разложения означает, что не используется низкочастотная часть спектра сигнала. При этом высокочастотная его часть учитывается наиболее точно. Степень учета частотного спектра при приближенном расчете зависит от количества членов, которые можно учесть, т.е. от граничной частоты  $f_n^*$

## Глава 4

---

для последнего члена асимптотического ряда, величина которого зависит, в том числе, от необходимой точности  $\Delta_n$  для этого члена ряда. Поскольку частотный спектр ограничен еще и частотой  $f_m^*$ , то с уменьшением частоты расчет функции  $\dot{G}_e$  будет осуществляться все менее точно, вплоть до частоты  $f_m^*$ , которая является максимальной для асимптотического разложения при избранном максимальном значении малого параметра  $\varepsilon_m$ . Для максимальной частоты  $f_m^*$  число членов ряда  $N$  определяется из условия  $f_{n=N}^* < f_m^* < f_{n=N+1}^*$ . Из рис. 4.1 видно, что  $N$  – это ближайшее значение справа от пересечения зависимостей для  $f_m^*$  и  $f_n^*$ .

Ограничения частотного спектра определяют и условия ограниченности по времени для импульсов тока. Для пояснения перехода от частотного спектра к зависимости от времени, обратимся, например, к выражению (4.21) – зависимости от времени функции  $\Lambda_A(t)$ , которая определяет зависимость от времени векторного потенциала и индукции магнитного поля при действии единичного импульса тока в контуре.

Как следует из (4.21), при  $t \rightarrow \infty$  функция  $\Lambda_A(t)$  неограниченно возрастает, а поэтому в этом случае неограниченно возрастают векторный потенциал и индукция магнитного поля. Причем показатель степени функции  $t^{(n+1)/2}$ , определяющий рост отдельных слагаемых асимптотического ряда, возрастает с увеличением номера члена ряда. В действительности магнитное поле со временем должно стремиться к определенному постоянному значению. Возникшее противоречие связано с наложенным ранее ограничением на величину параметра  $\varepsilon_1 = \mu\delta/\sqrt{2}r_1 < 1$ , который содержит частоту  $\omega = 2\pi f$ . Для низких частот это условие нарушается. Если учесть, что Фурье-преобразование

единичного импульса содержит весь спектр частот  $T(t) \div 1/i\omega$ , то очевидно, что для низкочастотной области условие малости  $\varepsilon_1$  не выполняется. Поэтому из-за наличия низких частот, которые в первую очередь влияют на характер зависимости  $\Lambda_A(t)$  при больших  $t$ , возникает указанное противоречие. Выражение (4.21) будет справедливым до некоторого характерного момента времени  $t_c \approx 1/f_c$ , для которого выполняется условие малости, по сути, предыдущего параметра  $\varepsilon_1 = \frac{\mu\sqrt{t_c}}{2\pi r_1 \sqrt{\mu_0 \mu \gamma}}$ .

Ограничение спектра определенными граничными частотами для изменяющегося во времени импульса тока проявляется в том, что расчет проводится не во всем временном промежутке, а только на ограниченном временном интервале. При этом для каждого члена ряда существует свое максимальное граничное значение момента времени, до которого учитывается соответствующий член асимптотического ряда. Используя найденные нормированные значения частоты для отдельных членов ряда  $f_n^*$ , максимальные граничные моменты времени можно оценивать как  $t_n^* = 1/f_n^*$ , где  $t_n^* = t_n f_b$  – нормированное значение времени.

На рис. 4.2. для разных членов ряда показаны зависимости нормированных граничных значений моментов времени от допустимых относительных погрешностей определения членов асимптотического ряда. Пунктирные линии отвечают предельным величинам нормированных моментов времени  $t_m^*$ , которые определяются выбранным допустимым значением малого параметра  $\varepsilon_m$ . Для выбранных значений малого параметра  $\varepsilon_m = 0,3$  и  $\varepsilon_m = 0,2$  при  $\mu = 1$  в точках на поверхности раздела сред при  $r_1 = h$

## Глава 4

соответствующие нормированные максимальные моменты времени оказываются соответственно  $t_m^* = 0,18$  и  $t_m^* = 0,08$ .

Ранее, при исследовании количества членов ряда, которые обеспечивают необходимую точность расчета (рис. 2.10 и 2.11), было показано, что для обеспечения точности  $\Delta_{\min} = 10^{-3}$  количество членов ряда не превышает  $N = 6$ . Именно для такого количества членов ряда в табл. 4.1 представлены нормированные значения предельных частот и промежутков времени в зависимости от номера члена ряда  $n$  для трех допустимых погрешностей определения членов асимптотического ряда. Граничные моменты времени получены при  $\mu = 1$  для точки наблюдения с минимальным значением расстояния  $r_1 = h$ .

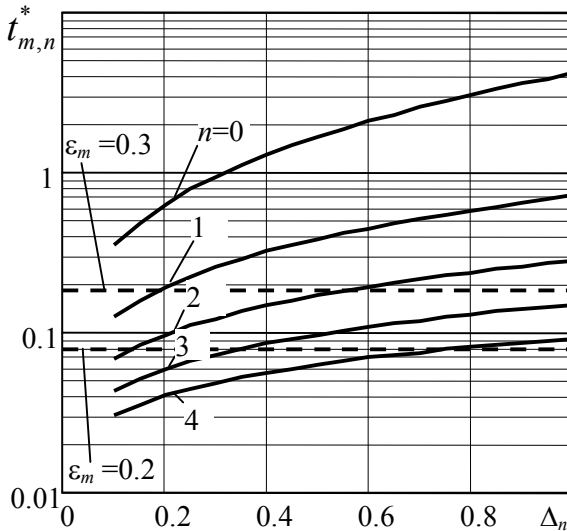


Рис.4.2. Нормированные максимальные моменты времени  $t_m^*$  для двух значений  $\varepsilon_m$  и времени  $t_n^*$  в зависимости от допустимой погрешности  $\Delta_n$  в точке  $\rho = 0, z = 0$

Из таблицы видно, что с ростом номера члена ряда предельные значения частоты быстро возрастают и соответственно быстро уменьшается промежуток времени, на протяжении которого может учитываться конкретный член асимптотического ряда. Это ограничивает область применения асимптотических рядов быстродействующими импульсами тока. Но, с другой стороны, поскольку обычно импульс тока быстро изменяется и достигает максимальных значений на протяжении малого времени, то именно на этом наиболее важном этапе и определяется электромагнитное поле.

Таблица 4.1  
Граничные значения частоты и времени для членов ряда при  $r_1 = h$

$n$	$\Delta_n = 1$		$\Delta_n = 0.5$		$\Delta_n = 0.25$	
	$f_n^*$	$t_n^*$	$f_n^*$	$t_n^*$	$f_n^*$	$t_n^*$
0	0.24	4.16	0.60	1.66	1.30	0.77
1	1.41	0.71	2.62	0.38	4.48	0.22
2	3.58	0.28	5.89	0.17	9.16	0.11
3	6.74	0.15	10.4	0.096	15.2	0.066
4	10.9	0.092	16.0	0.062	22.6	0.044
5	16.1	0.062	22.8	0.044	31.3	0.032
6	22.2	0.045	30.7	0.033	41.2	0.024

Однако на промежутке времени, в течение которого возможно получение результатов, точность расчета с использованием асимптотических рядов не является одинаковой. Достаточно сильная зависимость граничных моментов времени для членов ряда свидетельствует о том,

что чем ближе к началу импульса текущий момент времени, тем с большей точностью можно проводить расчеты трехмерного электромагнитного поля.

### 4.2.3. Интегральные показатели для учета ограничений по частоте и времени импульсов тока

Поскольку для импульсного электромагнитного поля при использовании метода асимптотического разложения учитывается не весь спектр сигнала или, с другой стороны, расчеты выполняются для ограниченного промежутка времени, то необходимо иметь показатели, которые отражают отмеченные обстоятельства.

Рассмотрим сначала интегральный показатель, основанный на ограничении использования частотного спектра тока контура.

Из представленного анализа вытекает, что степень учета частотного спектра зависит от количества членов ряда, которые можно учитывать, то есть от граничной частоты  $f_n^*$  для последнего члена асимптотического ряда. Поэтому для импульсного процесса необходимо формулировать показатель использования частот спектра для каждого члена ряда. Кроме того, возможность применения асимптотического разложения характеризуется выбранной величиной малого параметра  $\epsilon_m$ , которая связана с нормированным значением граничной частоты  $f_m^*$ .

Если задан частотный спектр импульса тока  $\dot{I}_0(i2\pi f)$ , то для количественной оценки степени учета спектра можно использовать энергетический показатель учета спектра – отношение среднеквадратичных значений амплитуды частотного спектра  $S_f$ :

$$S_f = \sqrt{\int_{f_{\min}}^{\infty} |\dot{I}_0(i2\pi f)|^2 df} / \sqrt{\int_0^{\infty} |\dot{I}_0(i2\pi f)|^2 df}, \quad (4.34)$$

где  $f_{\min}$  принимает или  $f_m$ , что отвечает выбранной допустимой величине малого параметра  $\varepsilon_m$ , или одно из значений минимальной частоты  $f_n$  для членов асимптотического ряда.

Так как для разных моментов времени учитывается разное количество членов – наибольшее в начальный момент времени и наименьшее в конце учитываемого промежутка времени, то наибольшие ограничения по использованию всего спектра частот импульса тока будут на начальном промежутке времени, где ограничения по частоте наибольшие. Это одновременно означает, что промежуток времени от начала импульса, в течение которого справедливо разложение с таким числом членов ряда, наименьшее.

Другим подходом являются выбор показателя, который учитывает то обстоятельство, что расчет может осуществляться на протяжении ограниченного промежутка времени. Соответствующий показатель может основываться на учитываемой части заряда, который переносится импульсом тока в течение учитываемого ограниченного промежутка времени, по отношению к полной величине перенесенного заряда импульса:

$$S_t = \sqrt{\int_0^{t_{\max}} |I_0(t)| dt} / \sqrt{\int_0^{\infty} |I_0(t)| dt}, \quad (4.35)$$

где аналогично (4.34) обозначение  $t_{\max}$  означает, что максимальный промежуток времени может принимать значение  $t_m$  или  $t_n$  для последнего учитываемого члена асимптотического ряда. В выражении (4.35), чтобы учесть процессы, в которых направление тока контура изменяется, используется модуль тока, т.е. заряд пересекший сечение проводника, независимо от его направления.

В дальнейшем интегральные показатели рассчитываются на примерах для конкретных зависимостей тока импульса от времени.

#### 4.2.4. Учет ограниченных промежутков времени для импульса тока

Приведенные в табл. 4.1 и на рис. 4.2 данные позволяют пояснить методику расчета зависимости от времени импульсного электромагнитного поля.

В начальный момент времени действия импульса ограничения на число членов асимптотического ряда отсутствуют. Целесообразность их ограничения может определяться лишь, например, выбранной минимальной погрешностью расчета  $\Delta_{\min}$ . Так, из рис. 2.10, как было отмечено, при  $\Delta_{\min} = 10^{-3}$  достаточно семи членов ( $N = 6$ ).

С течением времени действия импульса точность членов ряда уменьшается тем быстрее, чем больший номер члена ряда. Когда время достигает предельного значения для конкретного номера члена ряда (например, согласно табл. 4.1) этот член ряда должен быть исключен из расчета поля. Поскольку с течением времени точность расчета спадает и ее можно оценить аналогично кривым, представленным на рис. 3.6, для которых малый параметр  $\varepsilon$  определяется граничными моментами времени согласно

$$\varepsilon = \frac{\mu\sqrt{t}}{2\pi\lambda\sqrt{\mu_0\mu\gamma}}.$$

Наконец, когда время с начала действия импульса достигает значения  $t = t_m$ , расчет прекращается. В дальнейшем погрешность расчета приближенным методом превышает предельное значение, которое определяется избранным предельным значением малого параметра  $\varepsilon_m$ . Если выбрано  $\varepsilon_m = 0,3$ , то величина нормированного



значения момента времени будет  $t_m^* = 0,18$ . При этом согласно рис. 2.10 предельное число членов ряда будет  $N = 2$  или  $N = 3$ , а оценка точности расчета дает приблизительно  $\Delta_N \approx (2 \div 3) \cdot 10^{-2}$ . Необходимо, однако, сделать предостережение относительно того, что приведенная оценка точности касается соответствующей предельной частоты, а предельное значение времени только по порядку величины связано с частотой как  $t_m^* = 1/f_m^*$ . В дальнейшем на примерах это обстоятельство будет рассмотрено более детально.

Точность расчета можно существенно увеличить, если учесть, что интегралы Дюамеля в выражениях (4.25), (4.29) являются отражением принципа наложения. Например, в выражении

$$V(t) = \int_0^t \left[ \frac{dI_0(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t-\tau} \Lambda(\tau) \right] d\tau \quad (4.36)$$

малое приращение импульса  $\left[ \frac{dI_0(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t-\tau} \Lambda(\tau) \right] d\tau$  начинает

действовать в момент времени  $\tau$ , а не с начала действия импульса. Поэтому ограничение на максимальный промежуток времени для каждого члена ряда достаточно учитывать на интервале времени  $\tau \div t$ . Для определенности будем называть такой способ учета членов асимптотического ряда « $t - \tau$  приближением» [56, 59].

Такой алгоритм расчета, кроме увеличения точности расчета, позволяет учитывать, например, ситуацию, когда действие импульса начинается не с момента времени  $t = 0$ , а в более поздний момент.

Еще одно обстоятельство, которое должно быть учтено, касается того, что максимальные промежутки времени являются конкретными значениями и просто

исключение соответствующего члена ряда приведет к скачку в рассчитанных значениях поля. Чтобы избежать скачка, надо принять во внимание, что погрешность для каждого члена ряда возрастает постепенно от нуля до определенного максимального значения. Скачки будут отсутствовать, если каждый член ряда учитывается с определенной весовой функцией  $K(\varepsilon_1, n)$ , величина которой зависит от значения малого параметра для данного момента времени

$\varepsilon_1(t^*, \mu, r_1^*) = \frac{\mu}{r_1^*} \sqrt{t^*/2}$  таким образом, что при  $t^* \ll t_n^*$

величина  $K(\varepsilon_1, n) \rightarrow 1$  стремится к единице. Наоборот, в момент приближения к  $t^* \rightarrow t_n^*$  весовая функция стремится к нулю  $K(\varepsilon_1, n) \rightarrow 0$ . Наиболее простой является линейная зависимость относительно величины погрешности  $\Delta_n$  для  $n$ -го члена ряда. Например, если выбранная точность расчета членов ряда  $\Delta_n = 1$ , то зависимость будет следующей:

$$K(\varepsilon_1, n) = \begin{cases} 1 - \Delta_n(\varepsilon_1(t^*, \mu, r_1^*)), & \Delta_n \leq 1 \\ 0, & \Delta_n > 1. \end{cases} \quad (4.37)$$

Для « $t - \tau$  приближения» весовая функция, которая используется в интеграле Дюамеля, будет представлена в виде

$$K(\varepsilon_1, n) = \begin{cases} 1 - \Delta_n(\varepsilon_1(t^* - \tau^*, \mu, r_1^*)), & \Delta_n \leq 1 \\ 0, & \Delta_n > 1 \end{cases}. \quad (4.38)$$

Выбор линейной зависимости не обязательно является оптимальным. При оптимизации программ расчета может быть учтена реальная зависимость погрешности от величины малого параметра  $\varepsilon_1$ , который в свою очередь зависит от разности  $(t - \tau)$  в соответствии с выражением (4.31).

### 4.3. Разложение в асимптотический ряд для стандартных импульсов тока

Возможность применения метода асимптотического разложения в первую очередь связана с тем, что электромагнитное поле определяется только на протяжении ограниченного временного диапазона от начала действия импульса тока контура. Отсюда при решении вопроса о применении приближенного метода расчета вытекает необходимость учета продолжительности импульса тока по сравнению с допустимыми предельными значениями времени, которые ограничивают применение метода. Однако наиболее важные электромагнитные процессы могут происходить на протяжении относительно небольшого промежутка времени по сравнению с продолжительностью всего импульса, например, на его фронте. Отсюда следует, что кроме продолжительности импульса необходим анализ влияния зависимости импульса от времени на величину и пространственное распределение электромагнитного поля.

Полученные решения как общей задачи расчета электромагнитного поля, так и приближенного решения на основе метода асимптотического разложения позволяют использовать их для произвольных зависимостей тока контура от времени. Однако при проведении исследований часто используют математические модели для «стандартных» импульсов тока, в качестве которых будем рассматривать следующие зависимости от времени: экспоненциально затухающий импульс тока; импульс, представленный разностью двух затухающих экспонент; экспоненциально затухающий колебательный импульс. Для таких импульсов тока контура проанализируем основные особенности применения приближенного аналитического метода расчета электромагнитного поля.

Рассматриваемые зависимости тока от времени удобно анализировать, используя безразмерные параметры.

Базовое значение частоты  $f_b$  и соответственно времени  $t_b = 1/f_b$ , как и прежде, свяжем с глубиной проникновения поля, т.е. за базовую выберем частоту, при которой глубина проникновения поля в электропроводную среду равняется характерному размеру электромагнитной системы – расстоянию элемента контура с током от границы раздела сред  $f_b = (\pi h^2 \mu \mu_0 \gamma)^{-1}$ .

### 4.3.1. Импульс тока, затухающий по экспоненциальному закону

Для рассматриваемого импульса длительность фронта равна нулю, а зависимость от времени определяется одним значением коэффициента затухания  $\alpha$ :

$$I_0(t) = I_m \cdot I^*(t), \quad I^*(t) = \exp(-\alpha t) = \exp(-\alpha^* t^*), \quad (4.39)$$

где  $\alpha^* = \alpha/f_b$ ,  $t^* = t f_b$ .

Импульс типа (4.39) может использоваться для определения векторного потенциала и индукции магнитного поля. Однако из-за наличия скачка тока в начальный момент времени определение скалярного потенциала и напряженности электрического поля приводит к некорректным значениям – бесконечности в начальный момент времени. Поэтому для импульса типа (4.39) будем рассматривать его использование только для векторного потенциала и индукции магнитного поля.

Частотный спектр импульса тока (4.39) известен [58]:

$$\dot{I}^*(i\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{1}{f_b} \frac{1}{\alpha^* + i\omega^*}, \quad (4.40)$$

где  $\omega^* = 2\pi f^*$ .

Найдем значения показателей учета ограниченности по частоте и времени импульса тока для приближенного метода расчета.

Интегральный показатель  $S_f$ , учитывающий используемую часть спектра тока, найдем, подставив значение модуля  $|i^*(i\omega)|$  в выражение (4.34). В результате интегрирования получаем выражение

$$S_f = \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{2\pi f_{\min}^*}{\alpha^*}}. \quad (4.41)$$

Видно, что показатель  $S_f$  для каждого конкретного значения  $f_{\min}^*$  зависит от коэффициента затухания  $\alpha^*$ .

На рис 4.3 показаны зависимости величины интегрального показателя  $S_f$  от нормированной величины  $\alpha^*$  в случае ограничений, которые определяются последним учтенным членом ряда  $n = N$ , а также ограничений, обусловленных параметром  $\varepsilon_m$ .

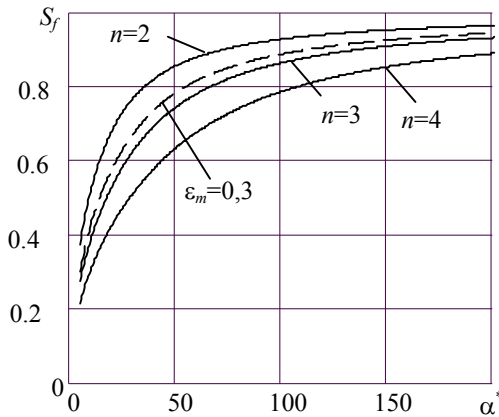


Рис. 4.3. Показатель учета ограничений на спектр импульса тока при  $\Delta_n = 1$ ,  $r_1 = h$ ,  $\mu = 1$

При выбранном  $\Delta_n = 1$  для последних членов ряда  $N = 0, 1, 2$  нижняя граница частоты определяется параметром

$\varepsilon_m$ . Для номеров  $N > 2$  предельные частоты имеют большие значения, и они определяются параметром  $\Delta_n$ .

При подстановке (4.39) в выражение (4.35) для другого показателя  $S_t$  получаем его значение:

$$S_t = 1 - \exp(-\alpha^* t_{\max}^*). \quad (4.42)$$

На рис. 4.4 показаны зависимости показателя  $S_t$  от коэффициента затухания  $\alpha^*$  для выбранного количества учетных членов ряда  $n = N$ , а также зависимость  $S_t$  для предыдущего значения малого параметра  $\varepsilon_m = 0,3$ .

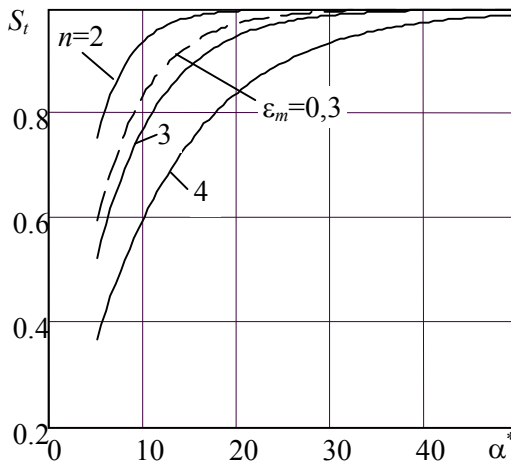


Рис. 4.4. – Показатель учета величины электрического заряда, перенесенного импульсом тока при  $\Delta_n = 1$ ,  $r_1 = h$ ,  $\mu = 1$

Видно, что качественно зависимости  $S_f$  и  $S_t$  подобны – они позволяют сравнить влияние ограничений при использовании асимптотического метода расчета для импульсного процесса. Однако количественные значения показателей существенно отличаются, поэтому в дальнейшем будем использовать только один показатель  $S_f$ ,

связанный с ограничениями на частотный спектр импульса тока.

Для импульса тока (4.39) в выражении (4.25) для функции  $V_A(t)$ , через которую определяются векторный потенциал и индукция магнитного поля, вместо интегралов по времени могут использоваться известные специальные функции. Для этого воспользуемся следующим табличным интегралом [12]:

$$\int_0^t (t-\tau)^{\nu} e^{-\alpha\tau} d\tau = (-\alpha)^{-\nu-1} e^{-\alpha t} \gamma(\nu+1, -\alpha t), \quad (4.43)$$

где  $\gamma(\beta_1, \beta_2)$  – неполная гамма-функция.

Используя это значение интеграла, из выражения (4.25) находим

$$V_A(t) = \sum_{n=0}^N V_{An}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{n+1}{2\Gamma((n+3)/2)} g_n P_n(t), \quad (4.44)$$

где  $P_n(t)$  оказывается

$$P_n(t) = \int_0^t (t-\tau)^{(n-1)/2} I_0(\tau) d\tau = I_m e^{-\alpha t} \left[ (-\alpha)^{-(n+1)/2} \gamma\left(\frac{n+1}{2}, -\alpha t\right) \right]. \quad (4.45)$$

Произведение в квадратных скобках может быть представлено в виде ряда

$$(-\alpha)^{-(n+1)/2} \gamma\left(\frac{n+1}{2}, -\alpha t\right) = t^{(n+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k! \left(k + \frac{n+1}{2}\right)}. \quad (4.46)$$

Соответственно функции  $P_n(t)$  окончательно примут вид

$$P_n(t) = I_m e^{-\alpha t} t^{(n+1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k! \left(k + \frac{n+1}{2}\right)}. \quad (4.47)$$

Отметим, что вычисление интегралов по времени в (4.25) не вызывает затруднений, однако преимущество

аналитических выражений заключается в возможности анализа влияния различных факторов на получаемый результат по распределению электромагнитного поля.

### 4.3.2. Импульс тока, представленный разностью двух затухающих экспонент

Рассматриваемые импульсы тока характеризуются конечным значением продолжительности фронта. Закон изменения во времени такого импульса будем описывать зависимостью

$$\begin{aligned} I_0(t) &= I_1(t) - I_2(t) = I_m [\exp(-\alpha_1 t) - \exp(-\alpha_2 t)] = \\ &= I_m [\exp(-\alpha_1^* t^*) - \exp(-\alpha_2^* t^*)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

или для нормированных величин

$$I_0(t^*) = I_m \cdot \frac{I^*(t^*)}{I_m^*}, \quad I^*(t^*) = I_m^* [\exp(-\alpha_1^* t^*) - \exp(-\alpha_2^* t^*)]. \quad (4.49)$$

Здесь и в дальнейшем считается, что  $\alpha_1^* < \alpha_2^*$ . Нормированная зависимость  $I^*(t^*)$  выбрана таким образом, чтобы ее максимальное значение равнялось единице. При этом  $1/I_m^*$  представляет собой максимальное значение разности экспонент, которое достигается в момент времени.

$$t_{\max}^* = \frac{\ln(\alpha_2^*/\alpha_1^*)}{\alpha_2^* - \alpha_1^*}.$$

Для импульса, который описывается зависимостью, пропорциональной разности двух затухающих экспонент, скачок тока отсутствует и при  $t^* \rightarrow 0$  ток изменяется пропорционально времени  $I^*(t^*) = I_m^*(\alpha_2^* - \alpha_1^*)t^*$ .

Рассмотрим показатель  $S_f$ , характеризующий учитываемую часть спектра тока, который рассчитывается согласно (4.34). На рис. 4.5 показана зависимость показателя  $S_f$  от постоянной затухания  $\alpha_1^*$ , который в первую очередь



определяет общую продолжительность импульса. Приведены зависимости при разных значениях величины  $\alpha_2^*$ , которая в основном влияет на продолжительность фронта импульса. Расчеты выполнены не для каждого члена ряда, как на рис. 4.3, а для зависимостей, связанных с выбором максимального значения малого параметра  $\varepsilon_m$ , по которому проводится разложение в асимптотический ряд. В данном случае выбрано значение  $\varepsilon_m = 0,3$ , для которого расчет ограничен моментом времени  $t_m^* = 0,18$  для точки на поверхности раздела сред непосредственно под точкой истока на контуре  $r_1 = h$  при  $\mu = 1$ .

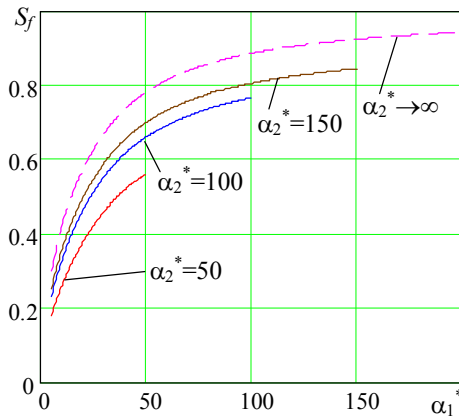


Рис. 4.5. Показатель степени учета спектра импульса  $I^*(t^*) = I_1^*(t^*) - I_2^*(t^*) = I_m^* [\exp(-\alpha_1^* t^*) - \exp(-\alpha_2^* t^*)]$  при  $\varepsilon_m = 0,3$

Из рис. 4.5 видно, что при учете конечной продолжительности фронта импульса показатель  $S_f$  оказывается тем меньше, чем более продолжительным является фронт по сравнению с общей продолжительностью всего импульса. Такая особенность объясняется тем, что в частотном спектре импульса

$$I^*(t^*) = I_1^*(t^*) - I_2^*(t^*) = I_m [\exp(-\alpha_1^* t^*) - \exp(-\alpha_2^* t^*)]$$

низкие частоты представлены в большей мере, чем для экспоненциально затухающего импульса с нулевой продолжительностью фронта, т.е. когда  $I_2^*(t^*) = 0$  ( $\alpha_2^* \rightarrow \infty$ ). Так, например, импульс тока  $I^*(t^*) = 4[\exp(-50t^*) - \exp(-100t^*)]$ , зависимость от времени которого показана на рис. 4.6, а, имеет частотный спектр, высокочастотная часть которого представлена в значительно меньшей мере, чем для каждой составляющей общего импульса (рис. 4.6, б).

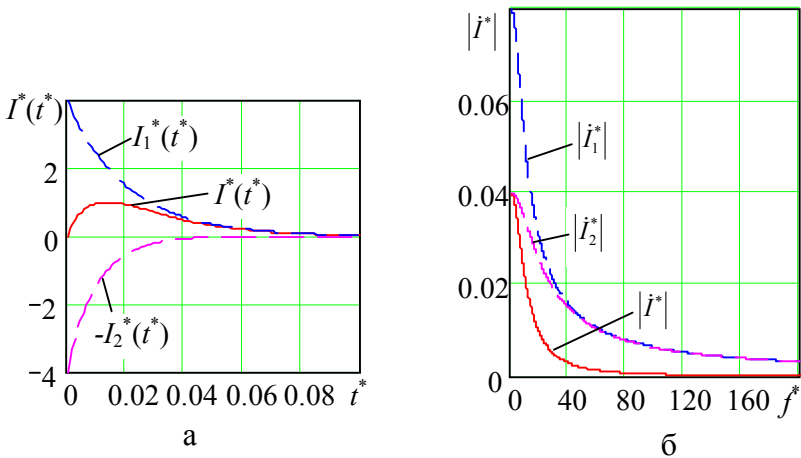


Рис. 4.6. Импульс тока

$$I^*(t^*) = I_1^*(t^*) - I_2^*(t^*) = 4[\exp(-50t^*) - \exp(-100t^*)]:$$

а) зависимости тока от времени; б) амплитудно-частотные характеристики

Для рассматриваемого импульса тока интегралы по времени могут быть представлены в виде специальных функций или в виде рядов, что обычно более удобно для исследования зависимостей от времени создаваемых электромагнитных полей.

В этом случае выражение (4.25) функции  $V_A(t)$  для определения векторного потенциала и индукция магнитного поля отличаются от рассмотренного экспоненциально затухающего импульса (4.39) только тем, что теперь необходимо записывать разность двух функций. Поэтому и представления  $V_A(t)$  через неполную гамма-функцию или ряды аналогичны (4.45) или (4.47) с добавлением слагаемых с другим коэффициентом затухания.

Поскольку импульс тока (4.48) в отличие от (4.39) в начальный момент времени не изменяется скачком, то для такого импульса расчет скалярного потенциала и напряженности электрического поля не приводит к особенностям при  $t \rightarrow 0$ . В этом случае члены ряда функции  $V_\varphi(t)$  (4.29)

$$V_\varphi(t) = \sum_{n=0}^N V_{\varphi n}(t) = \sum_{n=0}^N \frac{g_n}{2\Gamma((n+1)/2)} Q_n(t), \quad (4.50)$$

содержат зависимости от времени  $Q_n(t)$ , которые имеют вид

$$Q_n(t) = \int_0^t \frac{dI_0(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t-\tau} \tau^{(n-1)/2} d\tau = -I_m \int_0^t [\alpha_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)} - \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}] \tau^{(n-1)/2} d\tau. \quad (4.51)$$

Выполнив замену  $\xi = t - \tau$ , множители  $Q_n(t)$  оказываются следующими:

$$Q_n(t) = -I_m \int_0^t [\alpha_2 e^{-\alpha_2 \xi} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 \xi}] (t - \xi)^{(n-1)/2} d\xi. \quad (4.52)$$

В (4.52) каждое из слагаемых подынтегральной функции содержит выражение, аналогичное подынтегральной функции в (4.45). Поэтому, учитывая значение интеграла (4.43) и разложение в ряд (4.46), окончательно функции от времени для каждого члена асимптотического ряда в (4.50) можно записать как

$$Q_n(t) = -I_m \left[ e^{-\alpha_2 t} (-\alpha_2)^{-(n+1)/2} \gamma\left(\frac{n+1}{2}, -\alpha_2 t\right) - e^{-\alpha_1 t} (-\alpha_1)^{-(n+1)/2} \gamma\left(\frac{n+1}{2}, -\alpha_1 t\right) \right] =$$

$$= -I_m t^{(n+1)/2} \left[ \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_2 t)^k}{k! \left(k + \frac{n+1}{2}\right)} - \alpha_1 e^{-\alpha_1 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1 t)^k}{k! \left(k + \frac{n+1}{2}\right)} \right]. \quad (4.53)$$

### 4.3.3. Затухающий колебательный импульс тока

Рассмотрим еще один стандартный импульс тока, который в зависимости от времени изменяется по закону

$$I_0(t) = I_m \cdot I^*(t), \quad I^*(t) = \exp(-\alpha t) \sin \beta t = \exp(-\alpha^* t^*) \sin \beta^* t^*, \quad (4.54)$$

где  $\alpha^* = \alpha / f_b$ ,  $\beta^* = \beta / f_b$ ,  $t^* = t f_b$ .

В начальный момент времени скачок тока отсутствует. Поэтому для такого импульса корректные результаты могут быть получены как для расчета векторного потенциала и индукции магнитного поля, так и скалярного потенциала и напряженности электрического поля.

Выражение частотного спектра для нормированных величин имеет вид

$$\dot{I}^*(i\omega) = \frac{\beta}{(\alpha + i\omega)^2 + \beta^2} = \frac{1}{f_b} \frac{\beta^*}{(\alpha^* + i\omega^*)^2 + (\beta^*)^2}. \quad (4.55)$$

Для рассматриваемого импульса тока ограничения в случае применения приближенного метода разложения в асимптотический ряд, связанные с неполным учетом частотного спектра импульса тока, также можно характеризовать интегральным показателем  $S_f$  (4.34). Рассмотрим величину этого показателя при выбранном максимальном значении малого параметра  $\varepsilon_m = 0,3$ , по которому выполняется разложение в асимптотический ряд при  $r_1 = h$ ,  $\mu = 1$ .

Зависимости показателя  $S_f$  от постоянной затухания  $\alpha^*$  при разных значениях отношения частоты колебаний к постоянной затухания  $\beta/\alpha$  показаны на рис. 4.7.

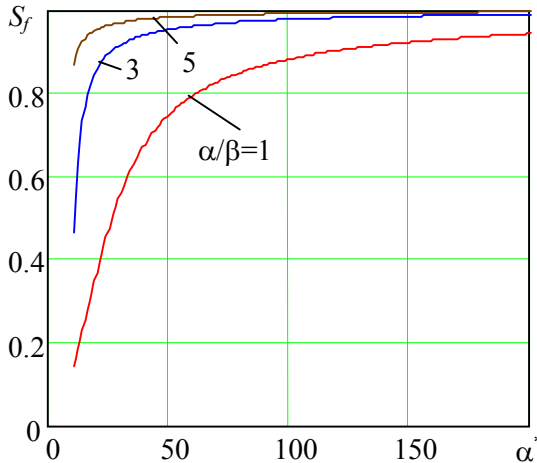


Рис. 4.7. Показатель учитываемой части спектра затухающего колебательного импульса тока при  $\Delta_n = 1$ ,  $r_1 = h$ ,  $\mu = 1$

Как видно из представленных на рис. 4.7 зависимостей, показатель степени использования спектра  $S_f$  оказывается тем больше, чем больше отношение  $\beta/\alpha$ . При этом для значений  $\beta/\alpha < 1$  импульс практически полностью затухает в течение периода колебаний. При  $\beta/\alpha > 1$  величина показателя  $S_f$  оказывается больше, чем значение показателя при отсутствии колебаний тока. Это объясняется тем, что при  $\beta/\alpha > 1$  в частотном спектре в большей мере представлены высокие частоты по сравнению с экспоненциально затухающим импульсом.

Рассмотрим для затухающего колебательного импульса тока (4.54) представление выражений для расчета

электромагнитного поля, в которых каждый член асимптотического ряда вместо интегралов по времени содержит специальные функции или ряды. В этом случае для импульса (4.54) удобно воспользоваться символической записью в комплексной форме [9]:

$$I_0(t) = I_m e^{-\alpha t} \sin \beta t \div I_m e^{-(\alpha - i\beta)t}. \quad (4.56)$$

Здесь зависимость от времени импульса (4.54) является мнимой частью комплексного выражения (4.56) для импульса тока. Комплексное представление позволяет учесть интеграл (4.43), имея в виду, что показателем экспоненциальной функции является комплексное число  $\alpha - i\beta$ .

В этом случае для определения векторного потенциала и индукции магнитного поля зависимости от времени  $P_n(t)$  (4.45) для членов ряда функции  $V_A(t)$  (4.25) найдем как мнимую часть соответствующего комплексного выражения  $\tilde{P}_n$ :

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \text{Im}(\tilde{P}_n) = \text{Im} \left\{ I_m \int_0^t (t - \tau)^{(n-1)/2} e^{-(\alpha - i\beta)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \text{Im} \left\{ I_m e^{-(\alpha - i\beta)t} \left[ (-\alpha - i\beta)^{-(n+1)/2} \gamma \left( \frac{n+1}{2}, -(\alpha - i\beta)t \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

На основании (4.46) последнее выражение можно представить и в виде ряда

$$P_n(t) = I_m t^{(n+1)/2} e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\alpha^2 + \beta^2)^{k/2} \sin(\beta t - k \arctg \beta/\alpha)}{k! \left( k + \frac{n+1}{2} \right)}. \quad (4.58)$$

Наконец, найдем зависимости от времени  $Q_n(t)$  (4.29), выраженные с использованием специальных функций и их разложения в ряд. Повторяя те же преобразования, которые были выполнены при получении выражения (4.53) для

действительных переменных, в данном случае, используя комплексную величину  $\tilde{Q}_n$ , найдем

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \text{Im}(\tilde{Q}_n) = \text{Im} \left\{ -I_m \eta \int_0^t e^{-\eta(t-\tau)} \tau^{(n-1)/2} d\tau \right\} = \\ &= \text{Im} \left\{ -I_m \eta e^{-\eta t} \left[ (-\eta)^{-(n+1)/2} \gamma \left( \frac{n+1}{2}, -\eta t \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где  $\eta = \alpha - i\beta$ .

Заменяя выражение в квадратных скобках рядом (4.46) и оставляя только мнимую часть выражения для  $\tilde{Q}_n$ , окончательно запишем

$$Q_n(t) = -I_m t^{(n+1)/2} e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\alpha^2 + \beta^2)^{(k+1)/2} \sin(\beta t - (k+1) \arctg \beta / \alpha)}{k! \left( k + \frac{n+1}{2} \right)}. \quad (4.60)$$

Рассмотренные конкретные импульсы тока не исчерпывают зависимости от времени, для которых можно получить удобные аналитические выражения, однако они позволяют выполнить анализ основных факторов, влияющих на распределение электромагнитных полей.

#### 4.4. Примеры использования метода асимптотического разложения для определения импульсного электромагнитного поля

Ряд предположений относительно возможности применения метода асимптотического разложения был сделан без достаточного теоретического обоснования. В первую очередь это относится к предположению, что ограничение для частотного спектра импульса тока частотами, которые превышают нижнюю границу  $f > f_m$ , одновременно ограничивает интервал времени от начала действия импульса  $t < t_m$ , где предполагается, что  $t_m$  можно

оценить как  $t_m = 1/f_m$ . Аналогичное предположение сделано и в отношении ограниченности времени для учета каждого члена асимптотического ряда. Справедливость таких допущений анализируется на основе сравнения приближенных и точных методов расчета.

Кроме того, на примерах подтверждается целесообразность использования « $t - \tau$  приближения», при котором в интегралах Дюамеля промежутки времени отсчитывается не от начала действия импульса тока, а от текущего значения переменной интегрирования.

Поскольку величина малого параметра  $\varepsilon_1$  является функцией точки интегрирования по контуру, то выполнено сравнение результатов расчета для контуров конкретной конфигурации. При этом показано, что ограничение определяется в основном максимальным значением малого параметра, когда расстояние между точками истока и наблюдения минимально.

#### **4.4.1. Сравнение результатов расчета подынтегральной функции в контурных интегралах**

Проиллюстрируем возможность применения приближенного метода асимптотического разложения для импульсного электромагнитного поля на основе сравнения временных зависимостей, рассчитанных с помощью точного и приближенного методов. Поскольку зависимость от времени определяется функциями  $V_A(t)$  и  $V_\phi(t)$ , которые одинаковым образом входят в контурные интегралы в точном и приближенном методах, то сравнение проведем именно для этих функций при определенных конкретных значениях локальных цилиндрических координат  $z = z_Q$ ,  $\rho = \rho_{QM}$ , как показано, например, на рис. 2.3.

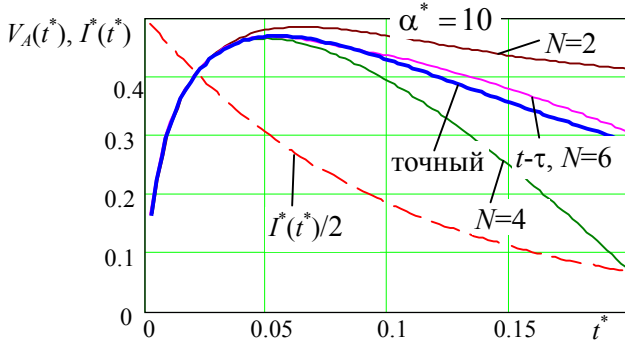
Рис. 4.8 иллюстрирует сравнение зависимостей подынтегральной функции  $V_A(t^*)$  от нормированного



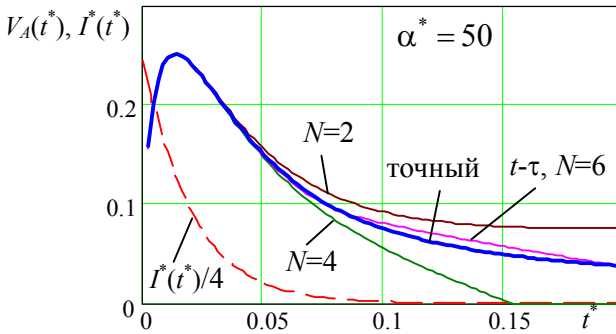
времени  $t^* = tf_b$ , где базовая частота  $f_b = (\pi h^2 \mu \mu_0 \gamma)^{-1}$  связана с наименьшим расстоянием  $h$  от элемента контура до поверхности раздела сред. Расчеты выполнены для импульсов тока контура, затухающих по экспоненциальному закону, который в начальный момент  $t=0$  скачком принимает максимальное значение. Приведены результаты расчетов для нескольких коэффициентов затухания в точке на поверхности раздела сред непосредственно под элементом контура по точной формуле и по приближенному выражению в виде разложения в асимптотический ряд.

Видно, что функции  $V_A(t^*)$  на поверхности раздела сред, а потому и векторный потенциал и индукция магнитного поля достигают максимального значения с определенным запаздыванием по отношению к максимуму импульса тока, причем это максимальное значение будет тем меньшим, чем быстрее уменьшается импульс тока.

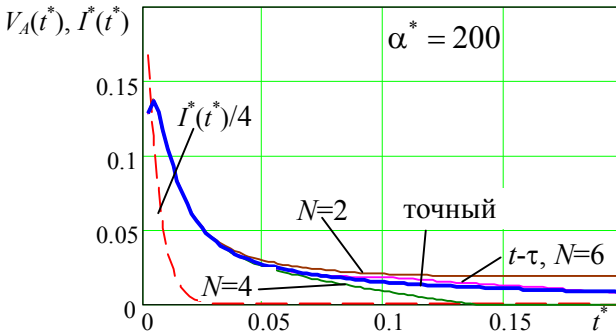
Чтобы показать необходимость выбора разных допустимых промежутков времени для разных членов асимптотического ряда, на рис. 4.8 приближенные зависимости рассчитаны с разным количеством членов ряда, которые не ограничены предельными значениями времени для каждого члена ряда. Видно, что в этом случае в зависимости от времени наблюдается та же тенденция изменения погрешности расчета, которая была отмечена для поля, которое изменяется во времени по гармоническому закону. Из приведенных зависимостей видно, что сначала более точными будут значения для числа членов ряда  $N = 4$ , с течением времени  $t^*$  погрешность при  $N = 4$  начинает расти значительно быстрее, чем при  $N = 2$ .



а



б



в

Рис. 4.8. Сравнение приближенного и точного расчетов функции  $V_A(t^*)$  для импульса тока  $I^*(t^*) = e^{-\alpha^* t^*}$  при  $\rho=0, z=0, \mu=1$

Кроме того, из зависимостей на рисунках видно, что заметное отклонение от точного значения наблюдается раньше значения времени, которое определено как  $t_n^* = 1/f_n^*$ . Так, при  $\varepsilon_m = 0,3$  ( $f_m = 5,56$ ,  $t_m = 1/f_m = 0,18$ ) расчет согласно рис. 4.1 с достаточной точностью можно выполнять, сохраняя члены ряда до  $n = 2$ . Однако из рис. 4.8 видно, что для  $N = 2$  существенные отклонения от точного значения наблюдаются уже при  $t^* \sim 0,1 < 1/f_m^*$ .

Ситуация меняется при использовании « $t - \tau$  приближения». В этом случае расчет выполняется с достаточной точностью до момента времени, которое соответствует оценке  $t_n^* = 1/f_n^*$ . Поэтому для конкретных расчетов, однако только с использованием « $t - \tau$  приближения», нет необходимости ограничивать расчет временем, меньшим, чем  $t_n^* = 1/f_n^*$ .

Учитывая изложенное, на рис. 4.9 показано сравнение уже с использованием только « $t - \tau$  приближение» для точек наблюдения, которые находятся на расстоянии  $r_1^* = r_1/h = \sqrt{(1+z/h)^2 + (\rho/h)^2}$  большем, чем минимальное расстояние  $r_1/h = 1$ .

На рис. 4.9, *a* точки наблюдения находятся на разной высоте относительно границы раздела сред. На рис. 4.6, *b*, наоборот, точки наблюдения находятся на границе раздела, но не под элементом контура, а на определенном расстоянии  $\rho$ . В обоих случаях расчет приближенным методом может проводиться до момента времени, большем, чем когда точка находится на наименьшем расстоянии. Это связано с тем, что с увеличением расстояния  $r_1$  между точками истока и наблюдения величина малого параметра  $\varepsilon_1$  уменьшается, что обуславливает смещение граничной частоты в сторону более низких частот и соответственно увеличение граничного момента времени.

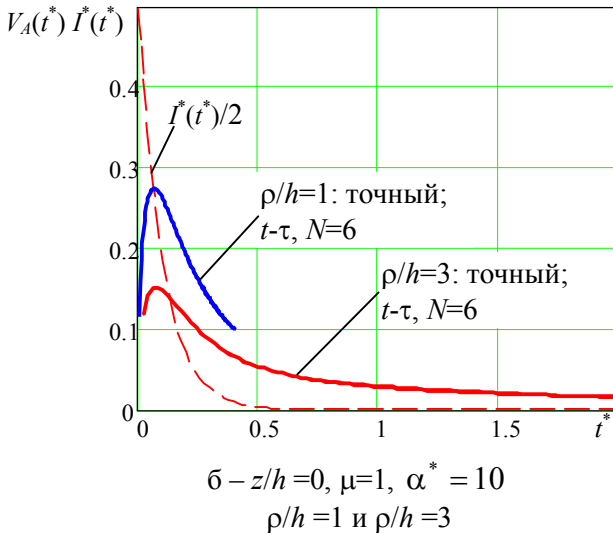
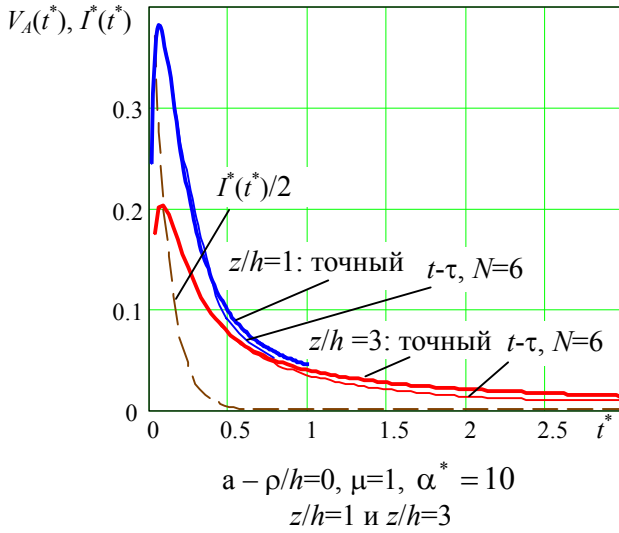


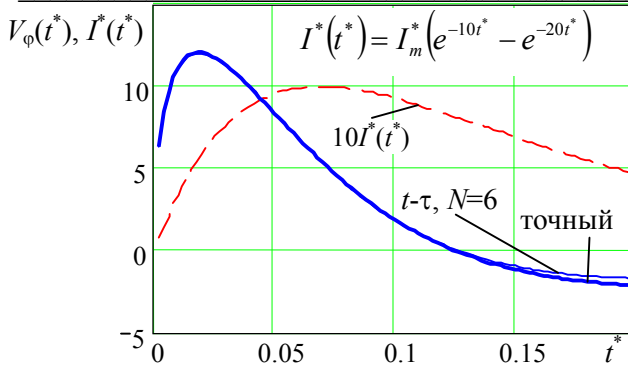
Рис. 4.9. Сравнение приближенного и точного расчетов функции  $V_A(t^*)$  для импульса тока  $I^*(t^*) = e^{-\alpha^* t^*}$  при  $\alpha=10, \mu=1$  в различных точках наблюдения

Учитывая смещение граничной частоты, результаты приведены для соответствующих интервалов времени, предельное значение которых определяется как  $t^* = t_m^* (r_1/h)^2$ , где  $t_m^*$  – граничное значение времени от начала действия импульса тока в случае наименьшего расстояния между точками наблюдения и истока. Как видно, в указанных границах погрешность приближенного метода является незначительной и меньшей, чем при  $r_1/h = 1$ .

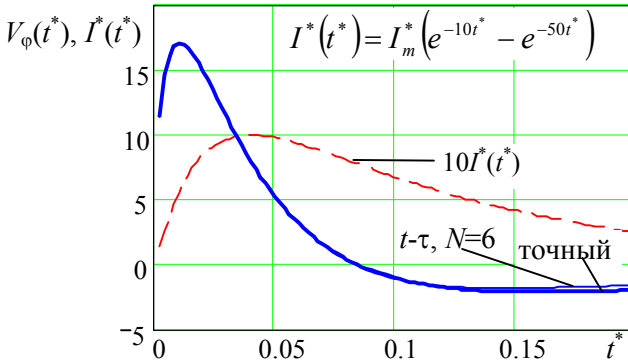
В отличие от функции  $V_A(t^*)$  для расчета функции  $V_\phi(t^*)$ , которая определяет зависимость от времени скалярного потенциала и напряженности электрического поля, необходимо, чтобы импульс тока не изменялся скачком, в противном случае напряженность поля будет принимать бесконечно большое значение. По этой причине для расчетов выбран импульс в виде разности двух экспоненциально затухающих функций  $I^*(t^*) = I_m^* (e^{-\alpha_1 t^*} - e^{-\alpha_2 t^*})$ , который при  $t^* \rightarrow 0$  изменяется пропорционально времени  $t^* \rightarrow 0$ :  $I^*(t^*) = I_m^* (\alpha_2^* - \alpha_1^*) t^*$ .

Результаты сравнения точных и приближенных расчетов функции  $V_\phi(t^*)$  в точке на поверхности  $z = 0, \rho = 0$  для разных импульсов тока представлены на рис. 4.10, где применялось только « $t - \tau$  приближение».

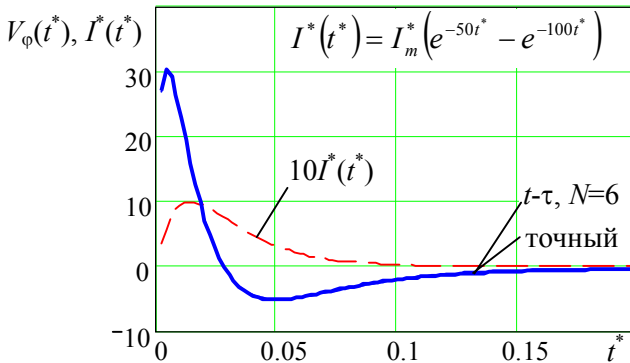
Заметим, прежде всего, что приближенный метод асимптотического разложения дает совсем незначительные отклонения по сравнению с точным в интервале времени от начала действия импульса тока до предельного значения, которое в точке  $z = 0, \rho = 0$  и выбранном  $\varepsilon_m = 0,3$  составляет  $t_m^* = 0,18$ .



а



б



в

Рис. 4.10. Сравнение приближенного и точного расчетов функции  $V_\varphi(t^*)$  для импульса  $I^*(t^*) = I_m^*(e^{-\alpha_1 t^*} - e^{-\alpha_2 t^*})$  при  $\rho=0, z=0, \mu=1$

Качественно зависимость функции  $V_{\varphi}(t^*)$  от времени отличается от такой же зависимости функции  $V_A(t^*)$ . Во-первых, максимум  $V_{\varphi}(t^*)$  наступает раньше, чем максимум импульса тока. Во-вторых, с увеличением скорости возрастания тока на фронте импульса максимальная величина функции  $V_{\varphi}(t^*)$  также увеличивается. Наконец, величина  $V_{\varphi}(t^*)$  меняет знак с течением времени, что связано с ее определением как функции, которая определенным образом связана с производной по времени от величины тока контура.

#### 4.4.2. Сравнение точного и приближенного методов расчета поля для системы с контурами тока

Приведенные результаты касались расчета функций  $V_A(t^*)$  и  $V_{\varphi}(t^*)$ , с помощью которых определяются подынтегральные выражения для нахождения векторного потенциала (4.4), индукции магнитного поля (4.5), скалярного потенциала (4.10) и напряженности электрического поля (4.11) в диэлектрическом полупространстве. Поскольку малый параметр  $\varepsilon_1$  является функцией точек контура, то при интегрировании по контуру с использованием метода разложения в асимптотический ряд соответственно изменяется и допустимый интервал времени расчета поля. Для всего контура граничное значение времени целесообразно ограничить его минимальным значением, которое соответствует минимальному расстоянию между зеркально отраженным от граничной поверхности контуром и точкой наблюдения и оценивается по выбранной величине  $\varepsilon_m$ . Для остальных точек контура, более удаленных от данной точки истока, возрастает точность расчета функции  $V_A(t^*)$  или  $V_{\varphi}(t^*)$ . Поэтому точность расчета поля для всего

## Глава 4

контура может оказаться выше, чем значение, которое оценивается для точки контура с наибольшим  $\varepsilon_1$ .

Приведем результаты сравнения расчетов для полей, которые создаются в целом токовыми контурами конкретной конфигурации. В этих примерах электромагнитное поле имеет трехмерный характер. Кроме того, контуры имеют участки с ненулевой компонентой направления протекания тока, перпендикулярной к границе раздела сред.

На рис. 4.11 представлены результаты расчета векторного потенциала при протекании импульсного тока вдоль контура эллиптической конфигурации, форма и ориентация относительно граничной поверхности которого задаются следующими параметрическими уравнениями:

$$x = a \cos \theta \cos \alpha, \quad y = b \sin \theta, \quad z = H - a \cos \theta \sin \alpha, \quad (4.61)$$

где параметр  $\theta$  изменяется в пределах  $0 \div 2\pi$ ; поворот контура, который лежит в горизонтальной плоскости, вокруг оси  $Oy$  определяется углом  $\alpha$ ;  $H$  – высота расположения центра эллипса относительно граничной поверхности.

Контур показан на рис. 4.11, *a*. Величины относительных размеров полуосей эллипса  $a/H = 1$ ,  $b/H = 2$ . Угол поворота контура выбран  $\alpha = 60^\circ$ . При этом относительное значение минимального расстояния от контура до границы раздела сред в точке с координатами  $Q(x/H = 0,5; 0; 0)$  составляет  $h_{\min}^* = r_{1\min}^* = h_{\min}/H = 0,134$ .

Векторный потенциал определяется в точке минимального расстояния от плоскости, где погрешность приближенного метода расчета наибольшая. В этой точке для избранной геометрии контура векторный потенциал имеет только касательную к граничной поверхности компоненту. Импульс тока в момент времени  $t = 0$  скачком достигает максимального значения и потом уменьшается по экспоненциальному закону, который в относительных



переменных описывается выражением (4.39):  
 $I_0(t) = I_m \cdot I_0^*(t), \quad I_0^*(t) = \exp(-\alpha t) = \exp(-\alpha^* t^*).$

На рис. 4.11, б приведены результаты расчетов, полученных по методу асимптотического разложения (4.4), (4.25) при использовании « $t - \tau$  приближения»,  $N = 6$  (сплошная кривая) и по точным аналитическим выражениям (4.4), (4.6) (отдельные точки). Показаны относительные значения векторного потенциала, которые определяются как

$$A_Q = \frac{\mu_0 I_m}{4\pi} A_Q^*.$$

Из приведенных зависимостей видно, что величины векторного потенциала по приближенной формуле совпадают с расчетом по точным выражениям до нормированного момента времени от начала действия импульса  $t^* \approx 0,2$ . На данном промежутке времени точность расчета несколько выше, чем для функции  $V_A(t^*)$  в точке контура, расположенной наиболее близко к поверхности раздела сред (рис. 4.8).

Приближенные значения напряженности электрического поля, аналогично значениям векторного потенциала, на определенном начальном промежутке времени практически совпадают с результатами, полученными по точным аналитическим выражениям. Рис. 4.12 иллюстрирует указанное обстоятельство. Сравнение выполнено для импульса тока  $I_0^*(t^*) = I_m^* [\exp(-50t^*) - \exp(-100t^*)]$ , который протекает по круговому контуру, ориентированному перпендикулярно граничной поверхности. Величина  $I_m^* = 4$  обеспечивает при  $t^* = 0,014$  максимальное относительное значение тока, равное единице:  $I_0^*(0,014) = 1$ . Относительный радиус окружности выбран  $R/H = 0,833$ , при этом минимальное

расстояние контура от поверхности равняется  $h_{\min}^* = h_{\min} / H = 0,167$ .

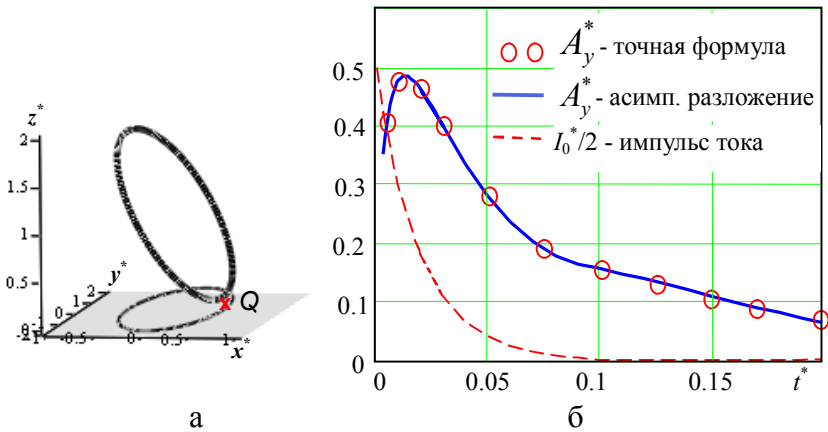


Рис. 4.11. Зависимость векторного потенциала от времени в точке на поверхности раздела сред, наиболее близкой к контуру с импульсным током  $I_0^*(t^*) = \exp(-50t^*)$

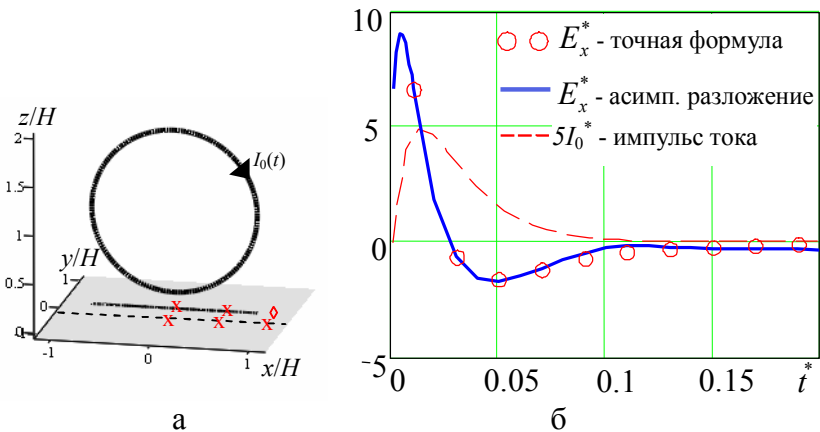


Рис. 4.12. Зависимость напряженности электрического поля от времени в точке на поверхности раздела сред, наиболее близкой к контуру с импульсным током  $I_0^*(t^*) = 4[\exp(-50t^*) - \exp(-100t^*)]$

Для выбранного импульса тока индуцированное электрическое поле затухает раньше, чем достигается максимальное значение времени  $t_m^* = 0,18$ , и на протяжении всего переходного процесса точные и приближенные значения практически совпадают.

Из проведенного сравнения результатов расчета магнитного и электрического полей по точным и приближенным выражениям как для подынтегральных функций, так и для значений, полученных при интегрировании вдоль контуров с током, можно утверждать, что в пределах рассматриваемого промежутка времени результаты с достаточной для практики точностью соответствуют друг другу. При этом необходимый объем вычислений приближенным методом приблизительно на порядок меньше, чем по точным выражениям.

Таким образом, можно сделать заключение, что развитый подход с использованием метода асимптотического разложения оказывается полезным не только для обоснования общих положений о формировании квазистационарного электромагнитного поля, но и является эффективным методом расчета распределения трехмерного поля.

#### **4.4.3. Пример расчета трехмерного электромагнитного поля с контурами импульсного тока**

В заключение приведем пример возможного использования модели контура с импульсным током, протекающим вблизи электропроводного полупространства, для исследования воздействия импульсного электромагнитного поля и индуцированных токов высокой плотности на механические свойства листовых металлических изделий. Например, при протекании в алюминиевом листе импульсного тока с плотностью порядка  $10^9$  А/м<sup>2</sup> имеет место «эффект электропластичности» [54],

при котором проявляется позитивное влияние импульсного тока на механические свойства материала.

Обеспечить протекание в металле тока значительной плотности с помощью бесконтактного способа введения энергии можно, используя индукционный метод. При этом напряженность индуцированного электрического поля и соответственно плотности токов пропорциональны скорости изменения поля во времени. Поэтому целесообразным является применение быстропотекающего импульсного электромагнитного поля. В этом случае в металле с высокой электропроводностью поле и ток существуют в тонком поверхностном слое, и если толщина этого слоя значительно меньше толщины металлического листа, имеет место сильный скин-эффект. Именно в этом случае может быть использована модель импульсного тока, протекающего вблизи электропроводного полупространства.

Будем исходить также из предположения, что при достижении необходимой плотности тока в одной точке электропластические изменения в ней вызывают преобразования механических свойств в окружающем объеме металла вблизи данной точки [60].

Рассмотрим импульсное поле, которое создается импульсным током, протекающим по круговому контуру, расположенному в плоскости, перпендикулярной поверхности металлического листа, как показано на рис. 4.12. Распределение электромагнитного поля и плотности тока на поверхности металла и в его объеме будем находить с использованием аналитического (точного и приближенного) метода расчета.

Зависимость тока от времени выберем в виде разности двух затухающих экспонент

$$I_0(t) = I_m [\exp(-\alpha_1 t) - \exp(-\alpha_2 t)]. \quad (4.61)$$

Выбор зависимости (4.61) обусловлен формой импульса тока реальных источников, которые используются в устройствах электродинамического способа обработки металлических изделий

На рис. 4.13 показана зависимость тока импульса от времени для одного из экспериментов, отмеченных в работе [60] ("эксперимент, расчет"). Фронт импульса, который определяет максимальные значения плотности индуцированного в электропроводной среде тока, довольно хорошо описывается зависимостью (4.61) при  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ . В этом случае  $I_{\max} = I_m/4$ . Форма импульса при таком соотношении постоянных затухания показана на том же рисунке. В дальнейших расчетах используются импульсы, которые задаются выражением (4.61) с указанным соотношением постоянных затухания.

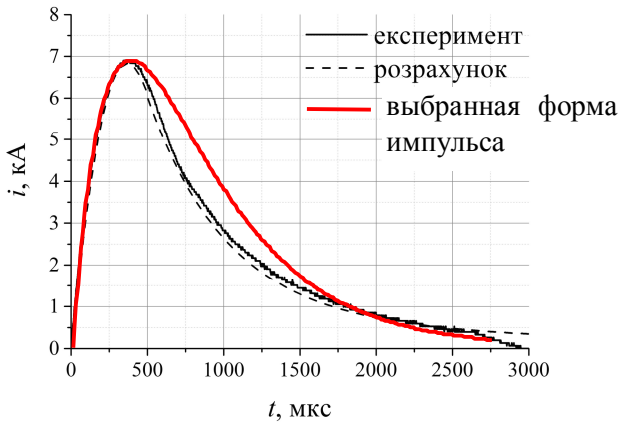


Рис. 4.13. Выбранная форма импульса тока контура при  $\alpha_2 = 2\alpha_1$ , фронт которого согласовывает с импульсами, использованными в [60]

Для выбора конкретных значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  оценим затухание тока в электропроводной среде. Если оценивать

характерную частоту  $f_\phi$ , связанную со временем фронта импульса  $\tau_\phi$ , как  $f_\phi = 1/\tau_\phi$ , и, обеспечивая условие, при котором толщина электропроводного листа  $D$  в несколько раз превышает глубину проникновения поля  $D = k_d \delta = k_d \sqrt{\tau_\phi / (\pi \mu_0 \gamma)}$ , получим оценку времени фронта импульса тока. Для алюминиевого листа при  $\gamma = 3,7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ,  $D = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  и  $k_d = 3$  имеем оценку времени фронта импульса  $\tau_\phi = D^2 \pi \mu_0 \gamma / k_d^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

Оценим время фронта импульса как время, близкое ко времени достижения максимального значения  $\tau_\phi = t_{\max} = \ln(\alpha_2 / \alpha_1) / (\alpha_2 - \alpha_1)$ . Отсюда при  $\alpha_2 / \alpha_1 = 2$  имеем постоянную затухания  $\alpha_1 = \alpha_2 / 2 = \ln 2 / \tau_\phi \approx 1 / \tau_\phi = 6,67 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Заметим, что полученные величины постоянных затухания приблизительно вдвое превышают значения, которые определяют время фронта импульса тока на рис. 4.13, т.е. для затухания поля в листе толщиной  $D = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  необходимы импульсы с вдвое более коротким фронтом.

Приведенные данные касались только оценки параметров импульса. Конкретные зависимости плотности тока от времени непосредственно под круговым контуром с током при разных значениях координаты  $z$  внутри металлического листа приведены на рис. 4.14. Наименьшее расстояние кругового контура с током радиуса  $R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  от поверхности листа составляет  $h_0 = 10^{-2} \text{ м}$ . Расчеты плотности тока  $j_x = \gamma E_x$ , которая в данном случае имеет компоненту только вдоль оси, лежащую в плоскости кругового контура, было выполнено по точным аналитическим выражениям (1.44). Амплитуда импульса тока контура с определенными выше параметрами была выбрана такой величины, чтобы максимальная плотность тока на поверхности листа составляла  $10^9 \text{ А/м}^2$ .

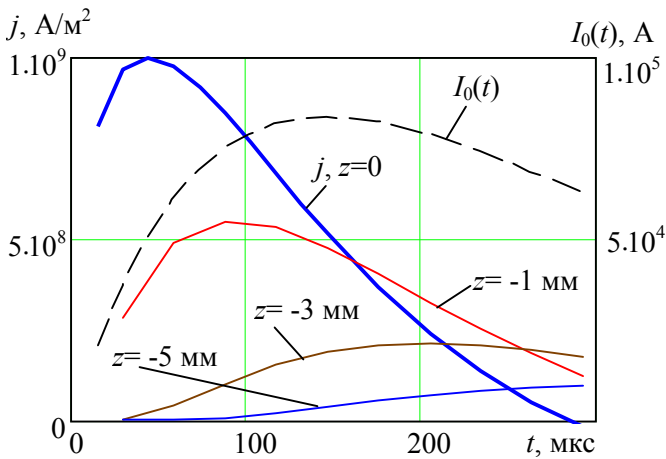


Рис. 4.14. Зависимости плотности тока от времени на разной глубине от поверхности алюминиевого листа при действии импульса тока  $I_0(t)$

Внешнее электромагнитное поле кругового токового контура создает неоднородное трехмерное поле, которое уменьшается по всем направлениям вдоль плоскости металлического листа относительно точки, ближайшей к контуру. Такая особенность на рис. 4.15 иллюстрируется расчетными зависимостями плотности тока от времени в отмеченных крестиками точках на поверхности (рис. 4.12). Вычисления выполнены методом асимптотического разложения. Предельный учитываемый промежуток времени от начала импульса при  $\varepsilon_m = 0,3$  составляет  $t_m = 2600$  мкс. С точки зрения использования эффекта электропластичности для воздействия на механические свойства материала результаты о распределении электромагнитного поля в металлическом листе могут оказаться полезными для определения границ области, в которой происходят эти изменения, а также для исследования влияния на размеры области токов с меньшей плотностью.

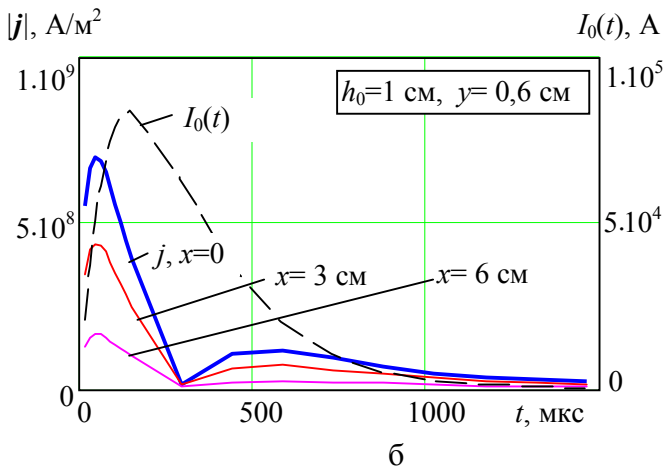
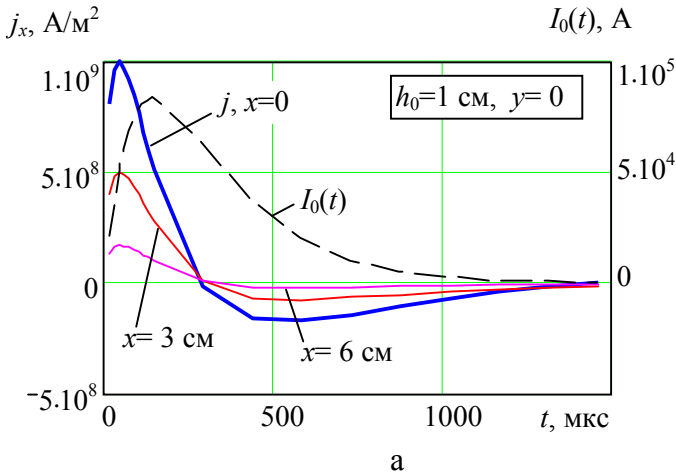


Рис. 4.15. Зависимости плотности тока от времени в точках на поверхности алюминиевого листа при действии импульса тока  $I_0(t)$

На линии пересечения плоскости, в которой расположен контур, с поверхностью раздела сред вектор индуцированной плотности тока направлен только вдоль этой линии – имеет только  $x$ -компоненту. Поэтому на рис. 4.15, а показана зависимость от времени этой



компоненты плотности тока, которая в определенный момент времени изменяет направление протекания. На параллельной линии, которая отдалена в данном случае на 0,6 см от первой (рис. 4.15, б), вектор плотности тока имеет еще компоненту, перпендикулярную к плоскости контура. Поэтому на рисунке показана зависимость абсолютного значения вектора плотности тока.

При выбранной геометрии системы и параметрах импульса амплитуда тока контура должна иметь довольно высокое значение  $I_{\max} = 83,8 \cdot 10^3 \text{ А}$ . Уменьшить амплитуду тока при достижении той же величины максимальной плотности тока в алюминиевом письме можно, уменьшив расстояние  $h_0$  между контуром и электропроводным листом. На рис. 4.16 показаны расчетные зависимости для того же контура с импульсом, который имеет предыдущие параметры, но при уменьшенном вдвое расстоянии до поверхности  $h_0 = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Зависимости плотности тока определены на поверхности раздела сред на линии при  $y=0$  в тех же точках, что и в предыдущем примере. Расчеты выполнялись с использованием приближенного асимптотического метода. Предельное значение времени от начала действия импульса при  $\varepsilon_m = 0,3$  в данном случае в четыре раза меньше, чем в предыдущем варианте и составляет  $t_m = 660 \text{ мкс}$ .

Видно, что в этом случае более чем вдвое уменьшается необходимая амплитуда импульса тока контура, которая теперь составляет  $I_{\max} = 38,7 \cdot 10^3 \text{ А}$ . Однако при этом уменьшается и размер области с повышенной плотностью тока.

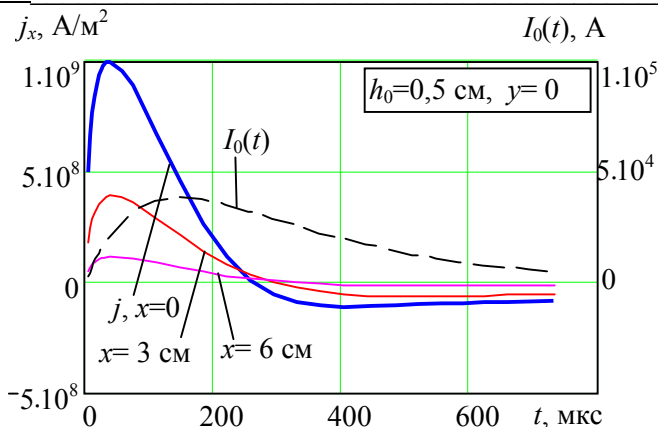


Рис. 4.16. Зависимости плотности тока от времени на поверхности металлического листа для минимального расстояния от контура до поверхности  $h_0 = 0,5$  см

Кроме того, следует заметить, что уменьшение расстояния  $h_0$  ограничено тем, что сечение проводника для импульса тока с достаточно большой амплитудой должно быть соответствующей величины, которая определяется, например, допустимой температурой нагрева материала проводника. Полная корректная постановка задачи должна включать реальное сечение проводника контура, в котором учитывается скин-эффект. Кроме того, задача должна решаться при заданной частоте следования импульсов тока, наличия охладительной системы и других факторов. Решение всех этих вопросов выходит за рамки используемой математической модели электромагнитной системы. Вместе с тем полученные результаты позволяют определить основные характеристики импульса тока и пути решения возникающих задач.

#### 4.5. Выводы к главе 4

1. Развита теория аналитического решения общей задачи расчета трехмерного квазистационарного

электромагнитного поля импульсного тока, протекающего вблизи электропроводного тела с плоской поверхностью. Представлены выражения точного аналитического и приближенного асимптотического решений для скалярного и векторного потенциалов, индукции магнитного и напряженности электрического полей. Поскольку точное аналитическое решение предусматривает обратное преобразование Фурье и получаемые выражения связаны с вычислением тройных несобственных интегралов, то целесообразным подходом при условии сильного скин-эффекта является применение развитого метода асимптотического разложения для импульсных процессов.

2. Учитывая, что разложение в асимптотический ряд возможно для частот, превышающих определенные значения, то для всего ряда и для каждого отдельного члена разложения найдены нижние границы частотного спектра и соответствующие максимальные значения моментов времени от начала действия импульса. Это позволило определить допустимые временную и пространственную области расчета импульсного электромагнитного поля. В связи с тем, что величины нижних граничных частот увеличиваются с ростом номера члена ряда, то наиболее точно может быть рассчитано поле в начальный период. Так как обычно импульс тока изменяется наиболее быстро и достигает максимальных значений на протяжении относительно малого промежутка времени, то именно на этом, наиболее важном этапе, и определяется электромагнитное поле.

3. Отдельно рассмотрены «стандартные» импульсы тока: экспоненциально затухающий импульс; импульс, представленный разностью двух затухающих экспонент; колебательный экспоненциально затухающий импульс. Для них проанализированы основные особенности применения приближенного аналитического метода расчета электромагнитного поля. Найдены интегральные показатели для учета ограничений по частоте и времени в зависимости от

параметров импульсов. Вместо интегралов по времени для членов асимптотического ряда получены зависимости с использованием известных специальных функций, а также их представления в виде рядов.

4. Рассмотренные примеры использования метода асимптотического разложения для определения импульсного электромагнитного поля подтвердили справедливость сделанных предположений относительно допустимого времени расчета импульсного поля и ограниченности по времени для каждого члена асимптотического ряда. Показана целесообразность применения процедуры расчета, при которой в интегралах Дюамеля ограничения устанавливаются для промежутков времени, которые отсчитываются не от начала действия импульса тока, а от текущего значения переменной интегрирования.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Васецкий Ю.М. Асимптотические методы решения задач электродинамики в системах с массивными криволинейными проводниками. Киев: Наукова думка, 2010. 271 с.
2. Acero J., Alonso R., Burdio J.M., Barragan L.A., Puyal D. Analytical Equivalent Impedance for a Planar Induction Heating System. *IEEE Transaction on Magnetics*. 2006. Vol. 42. No 1. P. 84-86.
3. Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле линейного проводника с током, параллельного граничной плоскости «воздушная среда – проводящее полупространство». *Электричество*. 1997. № 12. С. 55-61.
4. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964. 775 с.
5. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.
6. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
7. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Изд. иностр. лит., 1958. 501 с.
8. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч.3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.
9. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле импульсного тока, протекающего над проводящим полупространством. Киев: Ин-т электродинамики АН Украины. Ин-т электродинамики, 1992. 37 с. (Препринт / АН Украины, Ин-т электродинамики; №721).
10. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. Three-Dimensional Quasi-Stationary Electromagnetic Field Generated by Arbitrary

Список использованных источников

Current Contour Near Conducting Body. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 1. С. 3-12.

11. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев: Техника, 1974. 352 с.

12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

13. Васецкий Ю.М., Дзюба К.К. Аналитический метод расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля тока, протекающего по контуру произвольной конфигурации вблизи электропроводного тела. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 5. С. 7-17.

14. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Аналитический метод расчета электромагнитного поля и плотности потока мощности в системе токовый контур – проводящее полупространство. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки*. 2000. Ч. 2. С. 16-19.

15. Vasetsky Yu., Mazurenko I., Dziuba K. Features of distribution of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic field in a system with flat interface between media. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 2017. Vol. 7. No 1. P. 69-74.

16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

17. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Том 1. Механика и электродинамика. М.: Наука, 1991. 496 с.

18. Семенов Н. А. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973. 480 с.

19. Леонтович М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. *Исследования по распространению радиоволн*. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948. С. 8-12.

20. Васецкий Ю.М., Кучерява І.М., Мазуренко І.Л., Дзюба К.К. Аналітичний та чисельний розрахунок

### Список использованных источников

квазістаціонарного тривимірного електромагнітного поля струмового контура поблизу електропровідного середовища. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 10-13.

21. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.

22. Федорченко А.М. Теоретическая физика. Классическая электродинамика. Киев: Вища школа, 1988. 280 с.

23. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле пространственного контура с током над плоской поверхностью проводящего тела с сильным скин-эффектом. *Электричество*. 2014. № 3. С. 55-61.

24. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами. *Технічна електродинаміка*. 1999. № 3. С.3-9.

25. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. Marcel Dekker Inc., 2003. 777 p.

26. Васецкий Ю.М., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П., Мазуренко И.Л. Электромагнитное взаимодействие токовых контуров с электропроводной средой. Киев: Про Формат, 2019. 222 с.

27. Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Т.3. Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями. Харьков: ХНАДУ, 2009. 240 с.

28. Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1992. 416 с. ISBN 5-283-03959-5.

29. Михайлов В.М. Функції Гріна плоскомеридіанних електричних та магнітних полів над плоскою граничною поверхнею. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 5-9. DOI: <https://doi.org/10.15407/techned2018.04.005>.

30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

## Список использованных источников

31. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972. 392 с.

32. Найфэ А. Введение в методы возмущений: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 535с.

33. Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 3 т. М.: Наука, 1974. 672 с.

34. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Геометрические параметры электромагнитных систем для высокочастотного индукционного нагрева металлических лент. *Технічна електродинаміка*. 2009. № 5. С. 9-15.

35. Vasetskyi Yu., Mazurenko I. Approximation mathematical models of electromagnetic and thermal processes at induction heating of metal strips. *Computation Problems of Electrical Engineering*. 2011. No 1. P. 45-50.

36. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенная модель для расчета переменного магнитного поля произвольного контура с учетом вихревых токов в проводящем полупространстве. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Моделювання електронних, енергетичних та технологічних систем*. 1999. Ч. 1. С. 88-93.

37. Vasetsky Yu. Mazurenko I., Dziuba K. Conditions for Application of Asymptotic Method to Electromagnetic Field Analysis in System of “a Current Loop – an Electroconducting Body”. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 2014. Vol. 4. No 1. P. 91-96.

38. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Геометрия токовых контуров для равномерного индукционного нагрева плоских металлических изделий ограниченной ширины. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Силова електроніка та енергоефективність*. 2001. Ч. 3. С. 92-95.

39. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенные математические модели электромагнитных систем с пространственными токовыми контурами,



### Список использованных источников

расположенными над проводящей средой. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки*. 2002. Ч. 4. С. 3-7.

40. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Приближенный способ расчета электромагнитного поля вблизи токового контура, расположенного над проводящим полупространством. *Електротехніка і електроенергетика*. 2000. № 2. С. 85-89.

41. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.

42. Фридман Б.Э. Скин-эффект в массивных проводниках электроимпульсных установок. Электромагнитное поле массивных проводников. *Журнал технической физики*. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 44-51.

43. Рытов С.М. Расчет скин-эффекта методом возмущений. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1940. Т. 10. Вып. 2. С. 180-190.

44. Кравченко А.Н., Нижник Л.П. Нормально-тангенциальная форма уравнений электродинамики проводящих сред. *Краевые задачи математической физики*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. С. 76-108.

45. Кравченко А.Н., Нижник Л.П. Электродинамические расчеты в электротехнике. Киев: Техніка, 1977. 184 с.

46. Кравченко А.Н. Краевые характеристики в задачах электродинамики. Киев: Наукова думка, 1989. 221 с.

47. Бердик С.Л., Пенкин Д.Ю., Катрич В.А., Пенкин Ю.М., Нестеренко М.В. Использование концепции поверхностного импеданса в задачах электродинамики (75 лет спустя). *Радиофизика и радиоастрономия*. 2014. Т. 19. № 1. С. 57-80.

48. Михайлов В.М. Интегральные электромагнитные характеристики соленоидов при резком поверхностном эффекте. *Електричество*. 1995. № 4. С. 48-55.

49. Васецкий Ю.М., Кучерява І.М., Мазуренко І.Л., Дзюба К.К. Затування неоднорідного електромагнітного поля

## Список использованных источников

струмового контура в електропровідному півпросторі. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 5. С. 11-14.

50. Электрофизические основы техники высоких напряжений / Бортник И.М. и др.; под общ. ред. И.П. Верещагина. М.: Издательский дом МЭИ, 2010. 704 с.

51. Физика и техника мощных импульсных систем: [сб. статей] / под ред. акад. Е. П. Велихова. М.: Энергоатомиздат, 1987. 352 с.

52. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. Киев: Ин-т электродинамики НАН Украины, 1999. 362 с.

53. Михайлов В.М. Импульсные электромагнитные поля. Харьков: Вища школа, 1979. 139 с.

54. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И. Влияние импульсного электрического тока высокой плотности на прочность металлических материалов и напряженно-деформированное состояние элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 2014. 276 с.

55. Васецкий Ю.М., Кондратенко І.П., Пашин О.М., Дзюба К.К. Обробка зварних з'єднань імпульсним електромагнітним полем при сильному скін-ефекті. *Праці Інституту електродинаміки НАН України: Збірник наукових праць*. Київ: ІЕД НАН України. 2018. Вип. 49. С. 68-76.

56. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л., Дзюба К.К. Особенности метода асимптотического разложения для определения электромагнитного поля импульсного тока, протекающего вблизи электропроводного тела. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 3. С. 3-5.

57. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1975. 752 с.

58. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч.1. Линейные электрические цепи с сосредоточенными параметрами. М.: Энергия, 1965. 360 с.

Список использованных источников

59 Dziuba K. Mazurenko I., Vasetsky Yu. An Assessment of Accuracy of Approximate Mathematical Model of Pulse Electromagnetic Field of Current Flowing near Conductive Body. Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE-2015). Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2015. С. 36-38.

DOI: 10.1109/CPEE.2015.7333331.

60. Лобанов Л.М., Кондратенко І.П., Жильцов А.В., Карлов О.М., Пашин М.О., Васюк В.В., Ящук В.А. Нестационарні електрофізичні процеси в системах зниження залишкових напружень зварних з'єднань. *Технічна електродинаміка*. 2016. № 6. С. 10-19.



*Наукове видання*

Національна академія наук України  
Інститут електродинаміки

**ВАСЕЦЬКИЙ** Юрій Макарович

**ТРЕХМЕРНОЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА,  
ПРОТЕКАЮЩЕГО ВБЛИЗИ  
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА**

(Російською мовою)

Редактор Н.В. Новік  
Комп'ютерна верстка І.Л. Мазуренко

Підп. до друку 14.08.2019. Формат 60×84/16. Папір офс. №1.  
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 12.0. Обл. вид. арк. 11.5.  
Тираж 300 прим. Ціна за домовленістю.

---

Віддруковано у друкарні ТОВ “Про Формат”,  
01042, м. Київ, пр. Миру, 7, оф. 45.