

UKRAINIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
INSTITUTE OF ELECTRODYNAMICS

**Y.M. VASETSKY**  
**I.P. KONDRATENKO**  
**A.P. RASHCHEPKIN**  
**I.L. MAZURENKO**

**ELECTROMAGNETIC INTERACTIONS  
BETWEEN CURRENT CONTOURS  
AND CONDUCTIVE MEDIUM**

Kyiv  
2019

This book is devoted to the further development of the theory for solving of a certain class of three-dimensional electromagnetic field problems. The electromagnetic systems under examination include a.c. contour with arbitrary spatial configuration and magnetized conducting body with induced eddy currents. The theoretical studies on induction heating of non-ferrous and ferrous metal tapes are presented. The inverse problems are solved to determine the inductor configuration as flat and spatial current contours for providing of the necessary temperature distribution of moving metal tapes.

The book is intended for researchers, postgraduate students and students specialized in electrical engineering, particularly in electromagnetic field studies and induction heating installations.

**Reviewers:**

V.F.Reztsov, Corresponding Member, Ukrainian National Academy of Sciences

A.A.Shcherba, Corresponding Member, Ukrainian National Academy of Sciences

**ISBN 978-966-02-8804-1**

© Y.M. Vasetsky, I.P. Kondratenko,  
A.P. Rashchepkin, I.L. Mazurenko, 2019  
© Institute of Electrodynamics, 2019

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

**Ю.М. ВАСЕЦКИЙ**  
**И.П. КОНДРАТЕНКО**  
**А.П. РАЩЕПКИН**  
**И.Л. МАЗУРЕНКО**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВЫХ  
КОНТУРОВ  
С ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДОЙ**

Киев  
2019

УДК 621.3.011; 621.365

В монографии представлены основные положения теории решения определенного класса задач трехмерного электромагнитного поля. Рассматриваемые электромагнитные системы включают контур переменного тока в общем случае произвольной пространственной конфигурации и электропроводное намагничивающееся тело, в котором индуцируются вихревые токи. Проведены теоретические исследования индукционного нагрева лент цветных и черных металлов. Представлены результаты решения обратных задач поиска геометрии индукторов в виде контуров плоской и пространственной конфигурации, которые обеспечивают необходимое распределение температуры движущихся металлических лент.

Для специалистов в области исследования электромагнитных полей, разработчиков устройств индукционного нагрева, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

У монографії представлено основні положення теорії рішення певного класу задач тривимірного електромагнітного поля. Електромагнітні системи, що розглядаються, включають контур змінного струму в загальному випадку довільної просторової конфігурації та електропровідне тіло, що намагнічується, в якому індуються вихрові струми. Проведено теоретичні дослідження індукційного нагрівання стрічок кольорових і чорних металів. Представлено результати рішення обернених задач пошуку геометрії індукторів у вигляді контурів плоскої і просторової конфігурації, які забезпечують необхідний розподіл температури нагрівання металевих рухомих стрічок.

Для фахівців у галузі дослідження електромагнітних полів, розробників пристроїв індукційного нагрівання, аспірантів і студентів відповідних спеціальностей.

**Рецензенты:**

член-корреспондент НАН Украины *В.Ф.Резцов*

член-корреспондент НАН Украины *А.А.Щерба*

Утверждено к печати ученым советом Института электродинамики НАН Украины (протокол № 17 от 20 декабря 2018)

**ISBN 978-966-02-8804-1**

© Ю.М. Васецкий, И.П. Кондратенко,

А.П. Рашепкин, И.Л. Мазуренко, 2019

© Институт электродинамики, 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

ВЕДЕНИЕ .....	9
---------------	---

<b>ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНТУРА ТОКА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.....</b>	<b>13</b>
--	-----------

1.1. Общее решение трехмерной квазистационарной задачи.....	15
---	----

1.2. Метод асимптотического разложения для приближенного расчета электромагнитного поля, создаваемого замкнутым токовым контуром .....	25
--	----

1.2.1. Формулировка задачи асимптотического разложения: представление функции $\dot{G}_e$ в виде ограниченного асимптотического ряда.....	27
---	----

1.2.2. Решение для потенциалов и векторов электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве в виде асимптотического ряда .....	41
--	----

1.2.3. Примеры оценки величины малого параметра и числа членов асимптотического ряда .....	44
---	----

1.3. Математическая модель локально двумерного электромагнитного поля вблизи контура с током .....	48
---	----

1.3.1. Малые параметры в модели локально двумерного поля.....	49
--	----

1.3.2. Векторный потенциал, индукция магнитного поля и плотность потока электромагнитной энергии в проводящую среду в модели локально двумерного электромагнитного поля.....	54
---	----

1.3.3. Оценка погрешности членов асимптотического ряда для криволинейного контура с током .....	58
--	----

1.4. Выводы к главе 1.....	64
----------------------------	----

## Содержание

### **ГЛАВА 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СИСТЕМЫ С ТОКОВЫМИ КОНТУРАМИ ДЛЯ ТЕРМИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДВИЖУЩУЮСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНУЮ ПОЛОСУ.....66**

2.1. Основные уравнения..... 68

2.2. Однофазные индукторы поперечного магнитного потока  
для нагрева лент..... 75

2.2.1. Индукторы поперечного магнитного потока с  
ферромагнитным сердечником .....75

2.2.1.1. Энергетические характеристики и  
электромагнитные силы в многополюсном однофазном  
индукторе ..... 84

2.2.1.2. Индукционный нагрев лент в однофазном  
индукторе ..... 92

2.2.2. Индукционный нагрев движущейся полосы  
токовыми контурами .....97

2.2.2.1. Электромагнитные и температурные поля при  
термообработке движущейся полосы токовыми  
контурами канонических форм ..... 98

2.2.2.2. Влияние конечной высоты сечения токового  
контура на энергетические характеристики индуктора..... 122

2.2.3. Электромагнитное поле пространственно  
распределенного токового контура..... 133

2.3. Выводы к главе 2..... 145

### **ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ЛЕНТ ..... 146**

3.1. Электромагнитные и тепловые характеристики  
высокочастотного индукционного нагрева электропроводных  
лент..... 146

3.1.1. Математическая модель электромагнитной системы высокочастотного нагрева металлических лент .....	149
3.1.2. Поверхностная плотность потока энергии электромагнитного поля в нагреваемую металлическую ленту .....	153
3.1.2.1. Линейная плотность потока энергии поля, переданной металлическому листу вдали от края контура .....	156
3.1.2.2. Линейная плотность потока энергии поля вблизи края контура .....	157
3.1.3. Оценка основных параметров процесса нагрева .....	160
3.1.3.1. Выравнивание температуры по толщине металлической ленты .....	160
3.1.3.2. Теплопередача теплопроводностью вдоль поверхности металлической ленты .....	163
3.1.4. Примеры расчета распределения температуры по ширине металлической ленты .....	169
3.2. Влияние геометрических параметров контуров пространственной конфигурации на распределение джоулевых тепловыделений в проводящем полупространстве .....	172
3.3. Геометрические параметры контуров с током для обеспечения определенного характера нагрева металлических лент .....	180
3.3.1. Пространственные контуры с круглой формой проекции на поверхность раздела сред ( $h=\text{var}$ , $R=\text{const}$ ) .....	181
3.3.1.1. Температура не меньше заданного значения .....	183
3.3.1.2. Температура не выше заданного максимального значения .....	186
3.3.1.3. Геометрические параметры контура при минимальном отклонении температуры на заданной ширине .....	188
3.3.2. Плоские контуры эллиптической формы ( $h=\text{const}$ , $R=\text{var}$ ) .....	193

## Содержание

3.4. Особенности применения асимптотического метода для исследования индукционного нагрева электропроводных лент с учетом их ограниченной ширины.....	196
3.4.1. Математическая модель для расчета электромагнитного поля токового контура над проводящей поверхностью ограниченной ширины.....	196
3.4.2. Геометрические параметры электромагнитной системы индукционного нагрева металлической ленты ограниченной ширины при минимальной неравномерности температуры по ее ширине.....	202
3.5. Выводы к главе 3.....	207
Список использованных источников .....	209



## ВВЕДЕНИЕ

Основная цель, которая ставится в монографии, объединяет два взаимосвязанных направления. Одно относится к развитию теории решения определенного класса задач трехмерного электромагнитного поля, включающего контур переменного тока в общем случае произвольной пространственной конфигурации и электропроводное намагничивающееся тело, индуцированные токи в котором существенным образом влияют на величину результирующего электромагнитного поля. Другое направление связано с решением практических задач по термической обработке лент цветных и черных металлов с использованием индукционного способа нагрева.

В монографии предпочтение отдается аналитическим методам расчета трехмерных квазистационарных электромагнитных полей. Выбор аналитических методов расчета обусловлен несколькими причинами.

Во-первых, рассматриваемый достаточно широкий класс задач трехмерного поля допускает аналитическое решение, причем для этого зачастую используются нетрадиционные для электротехники приемы, описание которых нашло отражение в вышедших в последнее время научных публикациях. Ознакомление с используемыми методами может оказаться полезным и при решении задач в смежных областях теоретических исследований.

Во-вторых, наличие аналитического решения позволяет получить общие закономерности формирования трехмерного поля, которые дают возможность проводить глубокий анализ причин и особенностей протекания физических процессов. А также возможность разработать обоснованные подходы для трехмерного моделирования электромагнитных систем. Так, например, на основе точного аналитического решения установлено, что особенностью

## Введение

распределения поля в электропроводном полупространстве является нулевое значение перпендикулярных к поверхности раздела сред компонент напряженности электрического поля и плотности тока, что несомненно следует учитывать при моделировании электромагнитных систем.

В-третьих, несмотря на значительные успехи применения численных методов, существует широкий круг объектов, где эффективными остаются специализированные аналитические или комбинированные численно-аналитические подходы. К таким объектам относятся, в частности, системы, геометрические особенности которых характеризуются разным характером изменения поля в пространстве – быстрым изменением вблизи элементов с током или вблизи границы раздела сред и значительно более медленным в остальной области пространства, значительно большего объема.

Наконец, аналитические решения поставляют определенный набор точно решаемых задач, которые могут служить эталоном сравнения при разработке других методов для расчета систем более сложной геометрии, где получение аналитических решений невозможно.

В первой главе для реализации поставленной цели приводятся общие выражения для трехмерного квазистационарного поля произвольного пространственного контура переменного тока, расположенного вблизи электропроводного полупространства. Общее аналитическое решение в вычислительном отношении остается достаточно громоздким и трудоемким при решении задач поиска геометрии индукторов, которые призваны создавать электромагнитные поля с заданными свойствами. Поэтому для задач с сильным скин-эффектом в электропроводном теле разрабатывается приближенный аналитический метод разложения в асимптотический ряд, что существенным образом уменьшает необходимый объем вычислений. В задачах, где достаточно определить электромагнитное поле в

области пространства вблизи проводников с током, рассматривается способ дальнейшего упрощения расчетов с использованием приближенной математической модели локально двумерного электромагнитного поля, в которой контурные интегралы заменяются простыми алгебраическими выражениями.

Вторая глава посвящена получению решений в виде рядов с использованием метода разделения переменных для краевых задач соответствующих уравнений математической физики. Поставленные задачи связаны с их практической направленностью в области индукционного нагрева движущихся металлических намагничивающихся лент. При этом предпочтение отдано задачам с плоскими контурами переменного тока разнообразной конфигурации: в виде прямоугольной рамки, эллипса, системы контуров в виде ромба. В этом случае отличительной стороной исследований является формулировка и нахождение решений задачи с учетом как электромагнитной, так и тепловой составляющих, что особенно важно при разработке конкретных устройств индукционного нагрева металлических изделий.

В третьей главе исследования по решению обратных задач нахождения геометрии индукторов формулируются как задачи параметрической оптимизации в определенном классе конфигураций контуров с током. Исследования распространяются на системы с контурами пространственной геометрии. Здесь рассматриваются в первую очередь условия, справедливые для высокочастотного индукционного нагрева металлических лент. Переход к пространственной конфигурации контуров позволяет обеспечить более равномерное распределение результирующей температуры нагреваемых металлических лент. Оптимальные геометрические конфигурации индукторов найдены при дополнительных, важных с практической точки зрения условиях. Установлено, что при нагреве металлических лент по всей ширине удается

## Введение

получить значительно меньшую неравномерность плотности тепловыделений по сравнению с нагревом локальной области ленты.

Работа над монографией распределилась между авторами следующим образом: главы 1 и 3 написаны д.т.н., проф. Ю.М. Васецким и к.т.н. И.Л. Мазуренко; глава 2 написана д.т.н., чл.-корр. НАН Украины И.П. Кондратенко и д.т.н., проф. А.П. Ращепкиным.

Авторы считают своим долгом выразить искреннюю признательность и благодарность сотрудникам отделов электромагнитных систем и теоретической электротехники Института электродинамики НАН Украины за многолетнее сотрудничество и постоянное внимание к работе.

## **ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНТУРА ТОКА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Эта глава посвящена исследованиям решения задачи расчета трехмерного квазистационарного электромагнитного поля в системе: «контур произвольной пространственной конфигурации с переменным током – электропроводное тело с плоской граничной поверхностью», а также развитию аналитических методов расчета электромагнитного поля таких систем. Несмотря на то, что данной теме посвящено достаточно много работ, в том числе и общетеоретического характера, практические потребности разработки устройств с конкретными условиями распределения полей по-прежнему вызывают интерес исследователей к этой проблеме. Среди работ практической направленности отметим, прежде всего, исследования в области индукционного нагрева металлических изделий, которому в книге уделяется основное внимание [1, 2]. Вместе с тем математическая модель для рассматриваемой системы используется также работах в области технологии изменения свойств материалов под воздействием токов высокой плотности [3, 4], в устройствах по магнитно-импульсной обработке металлов [5, 6] и в других направлениях.

Аналитические решения задачи о квазистационарном поле с учетом индуцированных токов в электропроводном полупространстве получили развитие при ограничениях на геометрию систем или электрофизические свойства электропроводной среды: в [7] найдено решение для проводника с током, параллельного границе раздела сред; в

[8] решается задача о проводнике, лежащем в вертикальной плоскости. В данной главе развиваются аналитические методы расчета трехмерного электромагнитного поля в достаточно общей постановке, где первичное поле создается переменным током, протекающим по контуру пространственной конфигурации, произвольным образом ориентированному относительно границы раздела сред, а во внешнем электропроводном намагничивающемся теле учитываются возникающие вихревые токи. При этом не накладываются ограничения на частоту поля или глубину его проникновения в электропроводную среду. В такой обобщенной постановке задача охватывает полученные ранее результаты, которые в отдельности имеют ограничения по определенным характеристикам: геометрии электромагнитной системы, электрофизическим свойствам сред, частоте воздействующего поля.

На основе общего аналитического решения развиваются приближенные подходы, которые справедливы в условиях сильного скин-эффекта. Здесь применяется метод асимптотического разложения по малому параметру, а также выясняется возможность использования модели локально двумерного поля.

Будем рассматривать произвольный контур в неэлектропроводной немагнитной среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_e$ , по которому протекает ток  $I_0(t)$ . Контур расположен вблизи электропроводного тела с плоской границей, обладающего электропроводностью  $\gamma$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$  (на рис. 1.1, а исходный контур с током показан сплошной кривой в верхнем полупространстве  $z > 0$ ).

Считается, что размеры контура значительно меньше, чем размеры плоского участка поверхности тела, что позволяет использовать модель контура с током над электропроводным полупространством. Рассматривается

линейная задача в кусочно-однородной среде, свойства которой изменяются скачком при переходе из нижнего полупространства в верхнее. Так как конечным результатом является получение аналитического решения квазистационарной задачи, для которой плотность тока удовлетворяет условию непрерывности  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , то с самого начала будем считать, что контур является замкнутым и ток  $I_0(t)$  не изменяется вдоль контура.

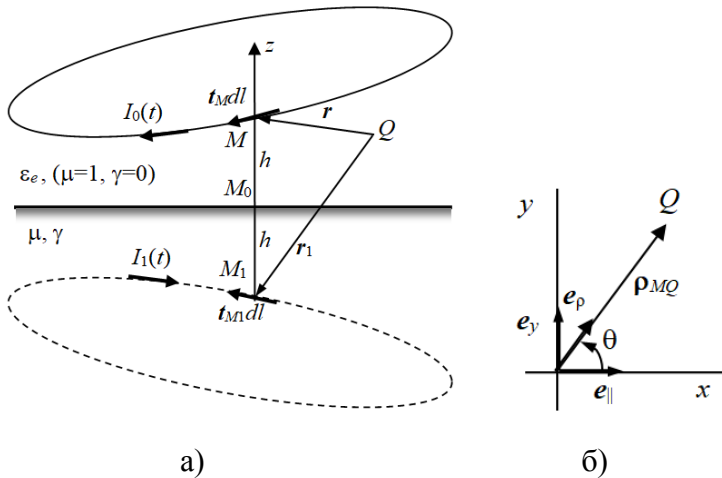


Рис. 1.1. Расчетная модель

### 1.1. Общее решение трехмерной квазистационарной задачи

В [9] было показано, что аналитическое решение квазистационарной задачи может быть основано на известном аналитическом решении о поле излучающего гармонического токового диполя, расположенного над плоской границей раздела сред. Поставленная в середине прошлого века в работах Г. Гринберга [10], А. Зоммерфельда [11] и других авторов задача получила дальнейшее развитие

## Глава 1

в работах О. Тозони [12] для исследования волнового электромагнитного поля полосковых линий, представляемых последовательной системой таких диполей. В [13] отмечалось, что рассматриваемый класс электромагнитных полей может описываться как с помощью уравнений квазистационарного поля, так и на основе общих волновых уравнений. В последнем случае переход к квазистационарной постановке выполняется на основе полученного решения волновой задачи. Этот подход применяется в данной главе, поскольку используется известное решение волновой задачи [12].

В общем случае в волновой постановке проблема сводится к решению задачи, которая описывается уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд векторов поля: напряженностей электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, векторов индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  и электрического смещения  $\mathbf{D}$ , полного тока  $\dot{\mathbf{j}}_0 + \dot{\mathbf{j}}_t = \dot{\mathbf{j}}_0 + \dot{\mathbf{j}} + \dot{\mathbf{j}}_D$ , который складывается из плотности тока сторонних источников в элементах контура  $\dot{\mathbf{j}}_0$ , плотности тока проводимости  $\dot{\mathbf{j}}$  и плотности тока смещения  $\dot{\mathbf{j}}_D = i\omega\mathbf{D}$ :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dot{\mathbf{j}}_e + \dot{\mathbf{j}}_t; & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B}; & \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\omega$  – циклическая частота,  $i$  – мнимая единица. Для линейной задачи свободный заряд в кусочно-однородной среде может быть сосредоточен только на поверхности раздела сред с соответствующей поверхностной плотностью  $\sigma$ , поэтому в последнем из уравнений (1.1), которые описывают поле вне граничной поверхности, заряд опущен.

Используя комплексную электропроводность  $\tilde{\gamma} = \gamma + i\omega\epsilon\epsilon_0$ , материальные уравнения, дополняющие (1.1), записываются в виде



$$\begin{aligned} z > 0: \quad \dot{\mathbf{j}}_{te} &= \dot{\mathbf{j}}_e = \tilde{\gamma}_e \dot{\mathbf{E}}_e, \quad \dot{\mathbf{B}}_e = \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_e, \\ z < 0: \quad \dot{\mathbf{j}}_{ti} &= \dot{\mathbf{j}}_i = \tilde{\gamma}_i \dot{\mathbf{E}}_i, \quad \dot{\mathbf{B}}_i = \mu \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_i, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индексами “ $e$ ” и “ $i$ ” отмечены величины в областях  $z > 0$  и  $z < 0$  соответственно. Комплексная электропроводность в разных областях принимает конкретные значения  $\tilde{\gamma}_e = i\omega \epsilon_e \epsilon_0$ ,  $\tilde{\gamma}_i = \gamma$ .

Введением векторного  $\dot{\mathbf{A}}$  и скалярного  $\dot{\phi}$  потенциалов

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}; \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } \dot{\phi} - i\omega \dot{\mathbf{A}}, \quad (1.3)$$

а также калибровки Лоренца

$$i\omega \text{div } \dot{\mathbf{A}} - k^2 \dot{\phi} = 0, \quad (1.4)$$

где  $k^2 = -i\omega \mu \mu_0 \tilde{\gamma}$  – волновой параметр, из уравнений Максвелла (1.1) получают уравнения для потенциалов:

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \Delta \dot{\mathbf{A}}_e + k_e^2 \dot{\mathbf{A}}_e &= -\mu \mu_0 \dot{\mathbf{j}}_0, \quad \Delta \dot{\phi}_e + k_e^2 \dot{\phi}_e = 0, \\ z < 0: \quad \Delta \dot{\mathbf{A}}_i + k_i^2 \dot{\mathbf{A}}_i &= 0, \quad \Delta \dot{\phi}_i + k_i^2 \dot{\phi}_i = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В предположении, что проводник является бесконечно тонким, плотность тока в (1.5) записывают с использованием импульсной функции Дирака

$$\dot{\mathbf{j}}_0 = \dot{I}_0 \delta(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) \mathbf{t}_M.$$

Заметим, что для решения волновой задачи, как следует из (1.4), достаточно знать только векторный потенциал. Задача сопряжения помимо дифференциальных уравнений (1.5) должна содержать условия для тангенциальных и нормальных составляющих векторных полей на границе раздела сред: равенства тангенциальных составляющих напряженностей магнитного и электрического полей, условие равенства нормальных составляющих индукции магнитного поля [12, 14], а также равенства нормальных составляющих вектора плотности тока:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times (\dot{\mathbf{E}}^+ - \dot{\mathbf{E}}^-) &= 0, \quad \mathbf{e}_z \times (\dot{\mathbf{H}}^+ - \dot{\mathbf{H}}^-) = 0, \\ \mathbf{e}_z \cdot (\dot{\mathbf{B}}^+ - \dot{\mathbf{B}}^-) &= 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot (\dot{\mathbf{j}}_t^+ - \dot{\mathbf{j}}_t^-) = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $z$ .

Кроме того, электромагнитное поле на бесконечности затухает, поэтому задачу решают при условии равенства нулю векторного потенциала в бесконечно удаленных точках:

$$\dot{A}(\infty) = 0. \quad (1.7)$$

Решение сформулированной волновой задачи удалось найти в [12], осуществив двумерное преобразование Фурье по координатам. Для получения решения относительно физических переменных необходимо было осуществить еще и обратное преобразование по координатам. Соответствующие конкретные выражения для потенциалов и векторов электромагнитного поля представлены в [12]. В случае если внешнее поле создается переменным током контура, то решение в виде суперпозиции распределенных токовых диполей представляется контурным интегралом.

Квазистационарная постановка предполагает выполнение двух ограничений: во-первых, длина волны электромагнитного поля  $\lambda$  значительно больше любого характерного размера  $L$  электромагнитной системы  $\lambda = 2\pi/\omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} \gg L$ ; во-вторых, в уравнении полного тока пренебрегают плотностью тока смещения  $\dot{\mathbf{j}}_{Di}$  по сравнению с плотностью тока проводимости  $\dot{\mathbf{j}}_i$  [13, 14]. Однако в диэлектрической области существование напряженности электрического поля обуславливает наличие соответствующих токов смещения  $\dot{\mathbf{j}}_{De} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_e$ . Для квазистационарных полей из условия непрерывности плотности тока проводимости следует, что исходный контур с током является замкнутым, и величина этого тока  $\dot{I}_0$  постоянна вдоль контура. Кроме того, при учете тока смещения в диэлектрической области из условия непрерывности нормальной компоненты плотности тока на

границе раздела следует, что нормальные компоненты напряженности электрического поля на границе удовлетворяют следующему условию:

$$|\mathbf{e}_z \cdot E^+| / |\mathbf{e}_z \cdot E^-| = |\tilde{\gamma}_e| / |\tilde{\gamma}_i| \ll 1. \quad (1.8)$$

В [15] получено общее решение рассматриваемой квазистационарной задачи во всем пространстве. Для перехода от волновой к квазистационарной задаче использовалось условие замкнутости исходных контуров, для чего выделялись полные дифференциалы в подынтегральных выражениях контурных интегралов, интегрирование которых по замкнутому контуру равняется нулю. В выражениях для электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве учитывалось условие (1.8)  $|\tilde{\gamma}_e| / |\tilde{\gamma}_i| \ll 1$ , что позволило получить решение не только для магнитной, как в [16, 17], но и для электрической составляющей поля.

Квазистационарную задачу часто формулируют, пренебрегая токами смещения не только в электропроводной, но и в диэлектрической средах. Тогда в (1.5) параметры  $\tilde{\gamma}_i = \gamma$  и  $k_i^2 = -j\omega\mu\epsilon_0\gamma$  отличны от нуля в области  $z < 0$  и равны нулю  $\tilde{\gamma}_e = 0$ ,  $k_e^2 = 0$  в диэлектрическом полупространстве  $z > 0$ .

Условия калибровки Лоренца (1.4) в разных средах принимают вид

$$\begin{aligned} z > 0: \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_e &= 0, \\ z < 0: \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_i + \mu\epsilon_0\gamma\dot{\phi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При такой формулировке на поверхности проводника для нормальной компоненты напряженности электрического поля в квазистационарной постановке выполняются следующие условия: в электропроводной среде нормальная компонента напряженности электрического поля равна нулю, в диэлектрической среде нормальная компонента поля

связана с поверхностной плотностью электрического заряда  $\sigma$  определенным соотношением:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^- = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E}^+ = \sigma / \varepsilon_e \varepsilon_0. \quad (1.10)$$

На основании (1.9) в электропроводной среде, где  $\gamma \neq 0$ , для решения задачи достаточно найти распределение векторного потенциала. Однако в диэлектрической среде величина скалярного потенциала остается неопределенной: скалярный потенциал не входит в условие калибровки (1.9), нормальная компонента поля на плоской границе в (1.10) определяется через неизвестную поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . В этом случае, используя только векторный потенциал, напряженность электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_e = -i\omega \dot{\mathbf{A}}_e - \text{grad} \dot{\phi}_e$  может быть определена с точностью до потенциального слагаемого. На отмеченное свойство задачи сопряжения в квазистационарной постановке обращают внимание авторы работы [18], где показано, что решение будет однозначным при задании дополнительных условий. Отсутствие потенциальной составляющей является несущественным, если необходимо знать распределение индукции магнитного поля или ЭДС, индуцируемой в замкнутом контуре. Однако нахождение напряженности электрического поля с учетом потенциальной составляющей становится необходимым, например, при определении локальных силовых характеристик действия электрического поля, а также плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  и в ряде других приложений.

Общее решение квазистационарной задачи в системе «произвольный пространственный контур переменного тока – электропроводное полупространство» при пренебрежении токами смещения во всем пространстве найдено в [17]. Полученное решение в электропроводной среде на поверхности раздела сред и для магнитной составляющей поля полностью совпадает с таким решением при учете токов смещения в диэлектрической области [15].

Приведем полученное в [15] с учетом токов смещения в диэлектрической области общее решение трехмерной квазистационарной задачи для электромагнитного поля системы «произвольный контур с током – электропроводное полупространство».

Решение содержит контурные интегралы по исходному контуру и по контуру, зеркально отраженному от границы раздела сред, показанному на рис. 1.1, а пунктирной линией. На рисунке  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  – единичные векторы, касательные соответственно к исходному контуру в точке  $M$ , и к контуру, зеркально отраженному от границы раздела сред, в точке  $M_1$ . Векторы  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{t}_1$  имеют одинаковые по величине и противоположные по направлению проекции на вертикальную ось  $\mathbf{t}_{1\perp} = -\mathbf{t}_{\perp}$  и одинаковые по величине и направлению проекции на поверхность раздела сред  $\mathbf{t}_{1\parallel} = \mathbf{t}_{\parallel}$ , то есть  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}$ ;  $\mathbf{e}_{\parallel} = \mathbf{t}_{\parallel} / |\mathbf{t}_{\parallel}|$  – единичный вектор в направлении проекции вектора  $\mathbf{t}$  на плоскую граничную поверхность (рис. 1.1, б).

В диэлектрической области  $z > 0$  векторный  $\dot{\mathbf{A}}_e$  и скалярный  $\dot{\phi}_e$  потенциалы, а также индукцию магнитного  $\dot{\mathbf{B}}_e = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_e$  и напряженность электрического  $\dot{\mathbf{E}}_e = -i\omega\dot{\mathbf{A}}_e - \text{grad } \dot{\phi}_e$  полей при протекании по замкнутому контуру  $l$  тока  $\dot{I}_0$  можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_0 + \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2 = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \mathbf{t}_1 \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) dl, \quad (1.11)$$

$$\dot{\phi}_e = i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z) \dot{G}_e dl, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_e &= \dot{\mathbf{B}}_0 + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_2 = \\ &= -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left[ \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} - \mathbf{t}_1 \times \nabla \left( \frac{\partial \dot{G}_e}{\partial z} \right) \right] dl, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_e &= \dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2 = \\ &= -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} - \mathbf{e}_z \times [\mathbf{t}_1 \times \nabla \dot{G}_e] \right) dl. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь все составляющие электромагнитного поля содержат функцию  $\dot{G}_e$ , которая определяется следующим несобственным интегралом:

$$\dot{G}_e = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta, \quad (1.15)$$

где  $J_0(\cdot)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Знаменателем в (1.15) является  $w(\vartheta) = \vartheta + \frac{1}{\mu} \sqrt{\vartheta^2 + i\omega\mu\mu_0\gamma}$ ;

координаты  $\rho = \sqrt{(x_Q - x_M)^2 + (y_Q - y_M)^2}$ ,  $z, \theta$  – локальные цилиндрические координаты точки наблюдения  $Q$  с вертикальной осью, которая проходит через точку источника  $M$  на контуре, причем азимутальная координата  $\theta$  отсчитывается от направления  $\mathbf{e}_\parallel$ .

Первые два слагаемых в выражениях для векторного потенциала, индукции магнитного и напряженности электрического поля не зависят от свойств электропроводной среды и определяются как поле переменного тока исходного контура и тока контура, зеркально отраженного от границы раздела сред. Третьи слагаемые в (1.11), (1.13), (1.14) и скалярный потенциал  $\dot{\phi}_e$  в (1.12) зависят от электрофизических свойств среды и частоты поля и полностью определяются через единую функцию  $\dot{G}_e$ ,

которая удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \dot{G}_e = 0$ . Заметим, кроме того, что третье слагаемое в выражении для напряженности электрического поля (1.14) не имеет компоненты, перпендикулярной к границе раздела сред при любых конфигурациях и ориентациях исходного контура с током.

В электропроводном полупространстве  $z < 0$  в квазистационарном приближении токи смещения считаются малыми по сравнению с токами проводимости и они не учитываются. В результате выражения для составляющих электромагнитного поля принимают вид [15, 17]

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2 \oint_l \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{t}_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + \\ & + \mathbf{t}_{\perp} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} q_i d\vartheta \end{aligned} \right\} dl, \quad (1.16)$$

$$\dot{\phi}_i = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} d\vartheta \right\} dl, \quad (1.17)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_i = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{t}_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta + \\ & + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{q_i z - \vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \end{aligned} \right\} dl. \quad (1.18)$$

Здесь  $\mathbf{e}_{\rho} = \mathbf{e}_{\parallel} \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta$  – единичный вектор вдоль радиального направления локальной цилиндрической системы координат (рис. 1.1, б);  $J_1(\cdot)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка;  $q_i = \sqrt{\vartheta^2 + i\omega\mu_0\gamma}$ .

Принципиальной особенностью распределения квазистационарного электромагнитного поля при плоской поверхности раздела сред, которое следует из (1.18), является то, что в электропроводной среде напряженность

электрического поля и плотность тока не имеют составляющих, направленных перпендикулярно поверхности, независимо от геометрии контура, вдоль которого протекает переменный ток.

Подчеркнем, что полученный результат об отсутствии вертикальной компоненты напряженности электрического поля в электропроводной среде явился следствием решения волновой задачи теории поля. Однако для квазистационарной задачи, как показано в [15, 19] и подтверждено в [34], данный вывод имеет и более общее основание, связанное со свойством решения краевой задачи для уравнения параболического типа [20]. Особенности затухания неоднородного внешнего поля контура с током проанализированы в [35].

Физической причиной отсутствия вертикальной составляющей плотности тока и напряженности электрического поля является то, что электрический заряд на поверхности раздела сред полностью компенсирует внешнее индуцированное поле. В то же время нормальная компонента напряженности электрического поля со стороны диэлектрика  $\dot{E}_z(z=0+0)$  не равняется нулю. Поверхностная плотность заряда  $\sigma$  и  $\dot{E}_z(z=0+0)$  определяются только нормальной компонентой индуцированного электрического поля тока контура

$$\dot{\sigma} = \varepsilon_e \varepsilon_0 \dot{E}_z(z=0+0) = -2i\omega \varepsilon_e \varepsilon_0 \dot{A}_{0z}(z=0). \quad (1.19)$$

Эта компонента легко определяется по известной геометрии токового контура

$$\dot{A}_{0z}(z=0) = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \oint_l \frac{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)}{r(z=0)} dl. \quad (1.20)$$

Отметим также, что точно такое же соотношение было получено вначале для задачи об электромагнитном поле в случае идеального скин-эффекта [21], когда ток в электропроводной среде протекает только вдоль плоской



поверхности и, естественно, не имеет нормальной к ней компоненты.

Вместе с тем поверхностный заряд создает дополнительную касательную составляющую напряженности электрического поля. Из (1.18) видно, что к касательной составляющей поля  $\dot{\mathbf{E}}_1(z=0)$  на поверхности раздела сред, связанной с горизонтальным направлением исходного тока контура

$$\dot{\mathbf{E}}_1(z=0) = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ \mathbf{t}_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta z_M} J_0(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \right\} dl, \quad (1.21)$$

добавляется составляющая касательной компоненты  $\dot{\mathbf{E}}_2(z=0)$ , связанная с вертикальным направлением протекания тока контура:

$$\dot{\mathbf{E}}_2(z=0) = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \oint_l \left\{ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_\rho \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta z_M} J_1(\vartheta \rho)}{w(\vartheta)} \vartheta d\vartheta \right\} dl. \quad (1.22)$$

Для контуров пространственной конфигурации или плоских контуров, лежащих в плоскости, которая не компланарна границе раздела сред, дополнительную касательную составляющую напряженности электрического поля (1.22) необходимо учитывать при анализе электромагнитных процессов.

## 1.2. Метод асимптотического разложения для приближенного расчета электромагнитного поля, создаваемого замкнутым токовым контуром

Рассмотрим электромагнитное поле в случае сильного скин-эффекта в системе «контур с переменным током – электропроводное полупространство». При этом под сильным скин-эффектом понимается его расширенное определение, когда не только глубина проникновения переменного поля мала по сравнению с характерными

## Глава 1

---

размерами электропроводного тела, но малой величиной является также отношение глубины проникновения к характерным размерам всей электромагнитной системы, включая размеры контура с током и расстояния от контура до границы раздела сред.

Первое ограничение, по существу, уже присутствует в математической модели, которая включает электропроводное полупространство, что предусматривает затухание поля на конечной глубине в полубесконечной области. Второе ограничение связано с источниками внешнего поля в виде контура с переменным током, который создает неоднородное поле, проникающее в электропроводное полупространство.

Считается, что отношение глубины проникновения к характерным размерам электромагнитной системы является малым параметром, но не обязательно таким, что приближается к нулю. Метод асимптотического разложения использует представление приближенного решения задач в виде разложения в ограниченный ряд по указанному малому параметру. В основу положим точное решение задачи об электромагнитном поле гармонического тока произвольного контура с учетом вихревых токов в электропроводном полупространстве.

Основанием к разработке специализированного метода, несмотря на наличие аналитических выражений, служит все же довольно значительный объем необходимых вычислений, что связано с нахождением контурных интегралов от функций, содержащих несобственные интегралы от специальных функций. Проблема становится особенно трудоемкой для обратных задач теории поля и для решения задач оптимизации электромагнитных систем.

### 1.2.1. Формулировка задачи асимптотического разложения: представление функции $\dot{G}_e$ в виде ограниченного асимптотического ряда

Рассмотрим электромагнитное поле в диэлектрической области (рис. 1.1, а), где протекает переменный ток контура. Как указывалось, выражения в (1.11), (1.13), (1.14) для векторного потенциала, индукции магнитного и напряженности электрического поля представлены в виде суммы трех слагаемых, причем первые два не зависят от электрофизических свойств электропроводной среды. Сумма этих двух слагаемых полностью определяет поле в случае идеального скин-эффекта [21], при котором глубина проникновения поля

стремится к нулю  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu\gamma}} \rightarrow 0$ , а ток протекает только

по поверхности электропроводного тела. При конечной глубине проникновения поля в третьих слагаемых, а также в величине скалярного потенциала единственная функция  $G_e$  учитывает влияние электрофизических свойств среды и частоты поля. Поэтому анализу с точки зрения влияния конечной глубины проникновения поля подлежит именно функция  $G_e$  (1.15).

Перепишем  $\dot{G}_e$  таким образом, чтобы выделить член, содержащий глубину проникновения  $\delta$ :

$$\dot{G}_e = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta \rho_{QM})}{\vartheta + \frac{1}{\mu} \sqrt{\vartheta^2 + i\omega\mu\mu_0\gamma}} d\vartheta =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\vartheta(z-z_{M1})} J_0(\vartheta \rho_{QM})}{\vartheta + \sqrt{\left(\frac{\vartheta}{\mu}\right)^2 + i \left(\frac{\sqrt{2}}{\mu \delta}\right)^2}} d\vartheta. \quad (1.23)$$

Как следует из (1.23), помимо глубины проникновения поля  $\delta$  и относительной магнитной проницаемости  $\mu$  значение  $\dot{G}_e$  зависит также от компонент вектора  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{M1} - \mathbf{r}_Q$ , соединяющего точку наблюдения  $Q$  с точкой  $M_1$  на зеркально отраженном контуре (рис. 1.1). Характерным геометрическим размером, который присутствует в подынтегральном выражении функции  $\dot{G}_e$  (1.23), является расстояние  $r_1$ .

Из (1.23) видно, что влияние конечной глубины проникновения поля в проводящую среду характеризуется следующим параметром:

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu \delta}{\sqrt{2} r_1}. \quad (1.24)$$

Для немагнитной среды  $\mu = 1$  этот параметр совпадает с отношением характерного значения глубины проникновения поля к расстоянию  $r_1$ . Для ферромагнитных материалов величина параметра  $\varepsilon_1$  оказывается значительно больше.

При интегрировании вдоль контура в (1.11) – (1.14),  $\varepsilon_1$  является переменной величиной, зависящей от текущего положения точки истока. Поэтому введем еще единый параметр  $\varepsilon$ , для которого глубина проникновения поля нормирована на единый определенный размер  $\lambda$ , например, наименьшее расстояние между точкой наблюдения и точками истока на зеркально отраженном контуре:

$$\varepsilon = \frac{\mu \delta}{\sqrt{2} \lambda}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \frac{\lambda}{r_1}. \quad (1.25)$$

Для проведения анализа функции  $\dot{G}_e$  введем безразмерную переменную

$$\chi = \frac{\mu}{\sqrt{\omega\mu_0\gamma}} \vartheta = \frac{\mu\delta}{\sqrt{2}} \vartheta \quad (1.26)$$

и представим выражение для  $\dot{G}_e$  следующим образом:

$$\dot{G}_e = \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{\cos\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) J_0\left(\frac{\sin\beta}{\varepsilon_1} \chi\right)}{w_1(\chi)} d\chi. \quad (1.27)$$

Здесь безразмерной функцией  $w_1(\chi)$  в знаменателе подынтегрального выражения является

$$w_1(\chi) = \frac{\chi}{\sqrt{i}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2}. \quad (1.28)$$

Геометрический смысл величины  $\beta$ , которая входит в сомножители числителя в (1.27), показан на рис. 1.2 – это угол между вертикальной осью и направлением вектора, идущего от точки истока  $M_1$  к точке наблюдения  $Q$ .

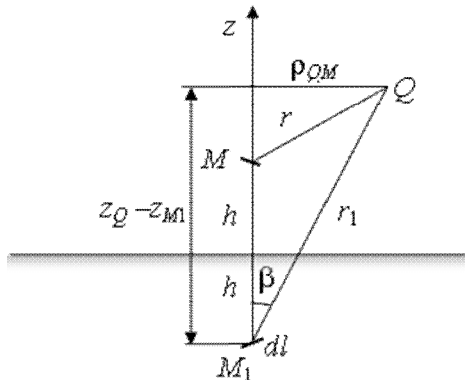


Рис. 1.2. Взаимное расположение точек истока и наблюдения

Как указывалось, будем рассматривать сильный скин-эффект при конечной глубине проникновения поля, когда параметр (1.24) или (1.25) является малым ( $\varepsilon < 1$ ), но не обязательно равной нулю величиной. Такое ограничение рассматриваемых электромагнитных явлений позволяет использовать метод асимптотических разложений [22], тем самым существенно уменьшить объем необходимых вычислений при расчетах трехмерных полей и упростить анализ основных электрофизических процессов.

Заметим, что при условии идеального скин-эффекта, когда  $\delta \rightarrow 0$ , одновременно и параметр  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ . В этом случае из (1.29) вытекает, что сама функция  $\dot{G}_e$  и ее пространственные производные равны нулю. Тогда векторный потенциал, индукция магнитного и напряженность электрического полей, как и при непосредственном анализе в [21], определяются первыми двумя слагаемыми в (1.11), (1.13) и (1.14).

Прежде чем выполнить необходимые преобразования и вычисления, остановимся на особенностях несобственного интеграла (1.27) и его подынтегральной функции, которые, исходя из подхода Лапласа к оценке функций вида (1.27), позволяют обосновать использование асимптотического разложения для функции  $G_e$ .

Переменная  $\chi$ , по которой проводится интегрирование, изменяется в пределах от 0 до  $\infty$ , причем множитель  $1/w_1(\chi)$  в пределах радиуса сходимости  $\chi \leq \chi_c$  может быть разложен в степенной ряд. При этом, как будет показано, величина  $\chi_c$  оказывается не меньше единицы  $\chi_c \geq 1$ . Вместе с тем при  $\frac{\chi}{\varepsilon_1} \geq 1$  числитель подынтегральной функции быстро падает и при больших значениях  $\chi$  изменяется быстрее, чем любая степенная функция. Интеграл

для каждого члена степенного ряда, даже за пределами области сходимости, существует. Это означает, что величина несобственного интеграла (1.27) при малых  $\varepsilon_1$  определяется в основном поведением подынтегральной функции вблизи начала координат.

Несмотря на то, что интеграл существует для каждого члена ряда, вместе с тем ряд, составленный из интегралов от членов разложения подынтегральной функции, является расходящимся при любых  $\varepsilon$  [22]. Для того чтобы воспользоваться получившимся рядом, нужно ограничить его фиксированным числом членов  $N$ . В этом случае  $\tilde{G}_\varepsilon$  заменяется функцией с ошибкой, которая может быть сделана произвольно малой с помощью выбора достаточно малого значения  $\varepsilon$ . Такой ряд с разложением подынтегральной функции в нашем случае по степеням  $\chi$  носит название асимптотического ряда типа Пуанкаре [23]. Полезность таких асимптотических рядов определяется тем, что ошибка усеченного ряда не превышает первого отброшенного члена ряда и, следовательно, быстро стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Необходимо отметить, что каждый член асимптотического ряда определяется с ошибкой, величина которой зависит от значения малого параметра и номера члена ряда. Поэтому оценка точности разложения по величине первого отброшенного члена тоже является приближенной, и поэтому необходимо также оценить погрешности каждого члена ряда.

Для получения асимптотического ряда представим множитель  $w_1^{-1}$  в (1.27) следующим образом:

$$\frac{1}{w_1} = \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\chi}{\mu\sqrt{i}} \right)^2} - \frac{\chi}{\sqrt{i}} \right] / \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \left( \frac{\chi}{\sqrt{i}} \right)^2 \right]. \quad (1.29)$$

Разложим в ряд Тейлора числитель и знаменатель полученного выражения:

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\chi}{\mu\sqrt{i}}\right)^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{2n} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n}, \\ \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)^m \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2m} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n}, \end{aligned} \right. \quad (1.30)$$

где считается, что  $(-1)!! = 1$ .

Тогда разложение в ряд функции  $w_1^{-1}$  (1.29) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mu) \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^n = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n b_{2k} c_{2(n-k)} \right] \left(\frac{\chi}{\sqrt{i}}\right)^{2n}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Здесь ряд по четным степеням представляет собой произведение рядов (1.30).

Относительно разложения (1.31), которое входит в подынтегральную функцию (1.27), необходимо сделать некоторые пояснения. Ряд (1.31) сходится в пределах определенного радиуса сходимости. Его можно определить, исходя из того, что радиус сходимости функций  $\sqrt{1+x}$  и  $(1+x)^{-1}$  равен единице [24]. Отсюда радиус сходимости числителя будет  $\chi_{c1} = \mu \geq 1$ , а знаменателя –



$\chi_{c2} = 1/\sqrt{1-1/\mu^2} \geq 1$ . Так как общее разложение представляет собой произведение рядов, то общий радиус сходимости  $\chi_c$  определяется меньшим из значений  $\chi_{c1}$  и  $\chi_{c2}$ , но в любом случае  $\chi_c \geq 1$ . Простое сравнение показывает, что радиус сходимости лежит в пределах  $1 \leq \chi_c \leq \sqrt{2}$ . Для немагнитных сред  $\mu = 1$  знаменатель в (1.27) принимает постоянное значение, равное единице, ряд будет содержать только члены разложения числителя и  $\chi_c = 1$ .

За пределами радиуса сходимости ряд для функции  $w_1^{-1}$  расходится. Однако, если подставить члены ряда в (1.27) и проинтегрировать в пределах от 0 до  $\infty$ , то для каждого слагаемого можно получить конечное значение [9]. Интегралы для членов ряда являются табличными [24], и в результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{G}_{e1}^{(n)} &= \frac{2}{\sqrt{i}} \int_0^\infty a_n(\mu) \left( \frac{\chi}{\sqrt{i}} \right)^n \exp\left(-\frac{\cos\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) J_0\left(\frac{\sin\beta}{\varepsilon_1} \chi\right) d\chi = \\ &= 2(-1)^n \frac{a_n(\mu) \varepsilon_1^{n+1}}{(\sqrt{i})^{n+1}} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Асимптотический ряд, составленный из функций  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$ , является расходящимся рядом с той особенностью, что при увеличении числа членов ряда ошибка замены исходного интеграла рядом вначале падает и достигает такого значения, за которым добавление новых членов лишь увеличивает ошибку. Поэтому функцию  $\dot{G}_e$  заменяют суммой конечного числа ее первых  $N$  членов:

$$\dot{G}_e = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)} + R_N(\mu, \varepsilon_1, r_1) = \dot{G}_{eN} + R_N(\mu, \varepsilon_1, r_1). \quad (1.33)$$

Здесь  $\dot{G}_{eN}$  – приближенное значение функции  $\dot{G}_e$ , остаток  $R_N$  зависит как от числа  $N$ , так и от величин  $\mu, \varepsilon_1, r_1$  [25].

Погрешность  $R_N(\mu, \varepsilon_1, r_1)$  связана не только с ограниченностью ряда, но и с тем, что каждый член асимптотического ряда (1.33) определяется с ошибкой, наличие которой обусловлено интегрированием, в том числе и за пределами области сходимости подынтегральной функции. Эта погрешность зависит от величины малого параметра  $\varepsilon_1$  и возрастает с увеличением номера члена ряда. Данное обстоятельство приводит к необходимости ограничения числа членов ряда.

Проанализируем влияние количества членов ряда в зависимости от величины малого параметра  $\varepsilon_1$  на приближенное значение модуля функции  $|\dot{G}_{eN}|$  по сравнению с точным значением  $|\dot{G}_e|$ . В точках над зеркально отраженным элементом контура при  $\rho_{QM1} = \rho = 0$  ( $r_1 = z + h$ ), когда  $J_0(\vartheta\rho) = J_0(0) = 1$  принимает наибольшее значение, несобственный интеграл в (1.23) или (1.27) для немагнитной среды ( $\mu = 1$ ) удается представить в аналитическом виде [24]. В этом случае точное значение функции  $\dot{G}_e$  будет [26]

$$\dot{G}_e = \frac{\pi\varepsilon}{2\sqrt{i}} \left[ H_1\left(\frac{\sqrt{i}}{\varepsilon}\right) - N_1\left(\frac{\sqrt{i}}{\varepsilon}\right) \right] - \frac{\varepsilon^2}{i}, \quad (1.34)$$

где  $H_1$  и  $N_1$  – функции Струве и Неймана соответственно. В более общем случае  $\mu \neq 1$  и  $\rho \neq 0$  для вычисления значений функции  $\dot{G}_e$  необходимо использовать методы численного интегрирования.

При  $\rho = 0$  сомножитель  $\frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right)$  в (1.32) принимает значение, равное

$$\frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{r_1} \right) = \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \left( \frac{1}{z+h} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(z+h)^{n+1}}. \quad (1.35)$$

В этом случае членами асимптотического ряда оказываются

$$G_{e1}^{(n)} = 2n! a_n(\mu) \left( \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{i}} \right)^{n+1}. \quad (1.36)$$

Для выбранных точек наблюдения  $r_1 = z+h$  и соответственно  $\varepsilon_1 = \mu / \left[ (z+h) \sqrt{\omega \mu_0 \mu \gamma} \right]$ .

Ограниченная сумма слагаемых (1.36) дает приближенное значение в виде асимптотического разложения  $\dot{G}_{eN} = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)}$  в рассматриваемой точке ( $\rho = 0, z$ ).

Это значение необходимо сравнить с точным результатом (1.34).

На рис. 1.3 приведены зависимости от  $\varepsilon$  модулей точного  $|\dot{G}_e|$  и приближенных  $|\dot{G}_N|$  величин функций для разного числа учитываемых членов ряда. Так как интеграл рассчитывается для конкретных точек пространства, то в качестве характерного расстояния выбрано  $\lambda = z+h$  и соответственно  $\varepsilon = \varepsilon_1$ . Относительные погрешности вычисления приближенного значения функции  $\dot{G}_e$  в виде  $\Delta_N = \left\| \dot{G}_{eN} \right\| - \left\| \dot{G}_e \right\| / \left\| \dot{G}_e \right\|$  показаны на рис. 1.4.

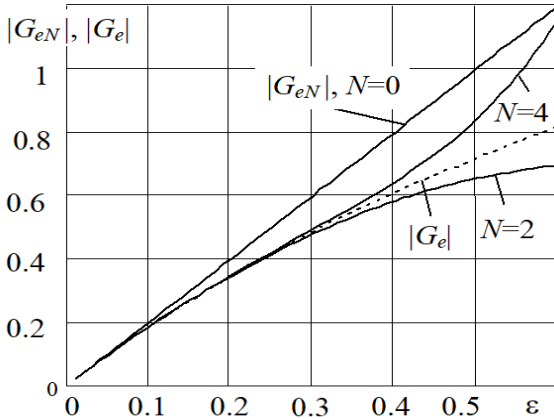


Рис. 1.3. Приближенное и точное значения модуля функции  $\dot{G}$  для разного числа членов ряда  $N$  при  $\mu = 1$  в точке  $\rho = 0, z = 0$

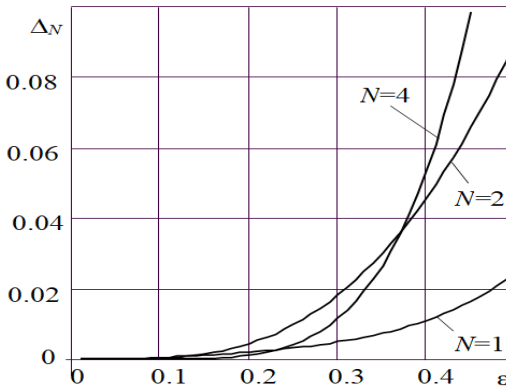


Рис. 1.4. Влияние числа членов ряда  $N$  на относительную ошибку приближенного значения функции  $\dot{G}_e$  при  $\mu = 1$  в точке  $\rho = 0, z = 0$

Видно, что при малых  $\varepsilon$  наиболее точные результаты достигаются при учете большего числа членов ряда. С увеличением  $\varepsilon$  ошибка вычисления растет быстрее в случае учета большего количества членов ряда. Начиная с определенного значения  $\varepsilon$ , более точными, хотя и с большей погрешностью, оказываются расчеты при  $N=2$ . Наконец,

при еще больших значениях  $\varepsilon$  меньшая погрешность будет уже при проведении расчетов с  $N = 1$ . То есть оказывается, чем меньше величина малого параметра  $\varepsilon$ , тем большее количество членов асимптотического ряда может быть использовано. Иными словами, для каждого  $\varepsilon$  существует оптимальное значение числа членов ряда, для которого погрешность будет минимальна. Наглядное представление о влиянии величины малого параметра  $\varepsilon$  и числа членов асимптотического ряда на погрешность расчета дают зависимости, представленные на рис. 1.5. Кривые отражают общую особенность асимптотических рядов, которая заключается в наличии минимума погрешности при определенных значениях числа членов ряда. С уменьшением  $\varepsilon$  (например, с ростом частоты поля или для материалов с большей проводимостью, или в точках, более удаленных от поверхности раздела сред) минимальная погрешность уменьшается и достигается при большем числе членов асимптотического ряда. При достаточно малых значениях  $\varepsilon$  минимальная погрешность реализуется при больших номерах  $N$  и является крайне незначительной, поэтому зачастую отпадает необходимость учитывать столь большое количество членов асимптотического ряда.

При использовании асимптотического метода важной практической задачей является оптимальный выбор числа членов асимптотического ряда в зависимости от величины малого параметра  $\varepsilon$ .

Общий подход состоит в анализе величины остатка  $R_N$ . Более простой способ заключается в оценке погрешности последнего учитываемого члена асимптотического ряда [9]. Такая возможность связана с тем, что  $R_N(\mu, \varepsilon_1, r_1)$  в (1.33) не превышает последнего отброшенного члена ряда, который сам определяется с определенной погрешностью. При этом, если определенный член ряда вычисляется с погрешностью, превышающей

## Глава 1

определенное допустимое значение, например, если погрешность становится сравнимой с величиной самого члена разложения, то учет такого члена ряда не увеличивает точность расчета. Если, кроме того, относительная погрешность определения величины членов ряда растет с увеличением их номера, то оценка достижения каким-либо членом предельного значения относительной погрешности определит и предельное значение числа членов ряда, за пределами которого рост их числа только увеличит общую погрешность.

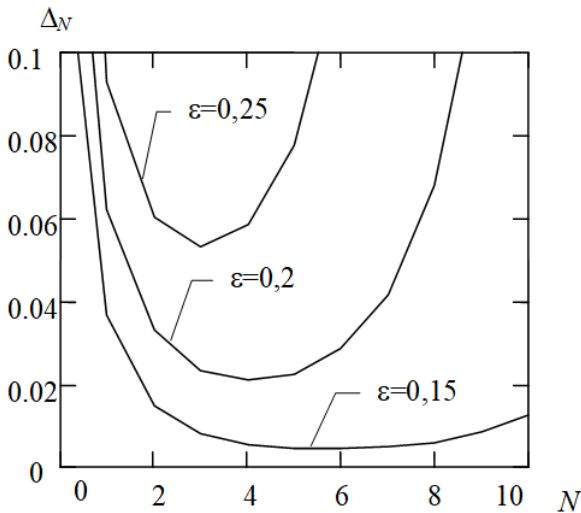


Рис. 1.5. Изменение относительной погрешности вычисления функции  $|\dot{G}_N|$  в зависимости от числа членов ряда  $N$  ( $\mu = 5; \rho = 0$ )

Для получения оценки погрешности членов ряда разобьем интервал интегрирования в (1.32) на два интервала:  $(0 \div 1)$  и  $(1 \div \infty)$ . При этом в пределах первого интервала соответствующий ряд для множителя в подынтегральной функции (1.31) является сходящимся.

Интегрируя в пределах  $(0 \div 1)$  получаем значение для  $n$ -го члена ряда:

$$\dot{G}_e^{(n)} = \frac{2a_n n!}{(\sqrt{i})^{n+1}} \varepsilon_1^{n+1} \left( 1 - e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k} \right). \quad (1.37)$$

Результат интегрирования каждого члена ряда в пределах всего диапазона  $(0 \div \infty)$ , включая и область вне радиуса сходимости, дается значениями  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$  (1.36).

Сравнивая (1.36) и (1.37), имеем

$$\dot{G}_{e1}^{(n)} - \dot{G}_e^{(n)} = \frac{2a_n n!}{(\sqrt{i})^{n+1}} \varepsilon_1^{n+1} e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}. \quad (1.38)$$

Отсюда оценка относительной погрешности  $\Delta_n$  для каждого отдельного члена ряда будет

$$\Delta_n = \frac{|\dot{G}_{e1}^{(n)} - \dot{G}_e^{(n)}|}{|\dot{G}_e^{(n)}|} = \frac{e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}}{1 - e^{-1/\varepsilon_1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}}. \quad (1.39)$$

Заметим, что сумма  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon_1^k}$  в (1.38) и (1.39)

представляет собой частичную сумму разложения в ряд функции  $e^{-1/\varepsilon_1}$  и в пределе  $n \rightarrow \infty$  разность в (1.38) стремится не к нулю, а к  $\dot{G}_{e1}^{(n)}$ , и, наоборот, с ростом  $n$  величина  $|\dot{G}_e^{(n)}|$  убывает. В результате относительная погрешность расчета каждого члена разложения при  $n \rightarrow \infty$  также стремится к бесконечности. Величина относительной погрешности для первых десяти членов ряда при различных значениях параметра  $\varepsilon$  показана на рис. 1.6.

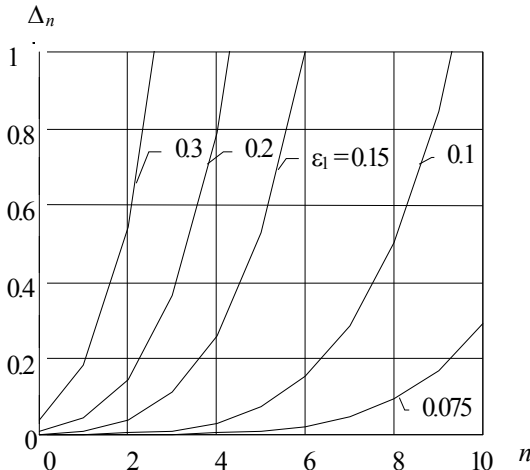


Рис. 1.6. Значения относительной погрешности для первых десяти членов ряда при различных значениях параметра  $\varepsilon_1$

Видно, что с увеличением номера члена ряда  $n$  растет и погрешность его определения, хотя при этом уменьшается его относительный вклад в общую сумму. Число членов ряда должно быть ограничено тем значением  $N$ , при котором дальнейшее их увеличение ведет уже только к росту общей погрешности. Отсюда можно заключить, что число членов ряда в любом случае не должно превышать то значение, при котором относительная погрешность последнего члена ряда не превышает заданного значения  $C_N$ , например, равного единице. В этом случае условие определения числа членов ряда  $n = N$  можно записать в виде

$$\Delta_n(\varepsilon_1) \leq C_N. \quad (1.40)$$

Из сравнения данных, представленных на рис. 1.6, с зависимостями на рис. 1.5 видно, что минимальная погрешность приближенного расчета достигается при количестве членов ряда  $n = N$ , которые соответствуют условию  $C_N \approx 1$ . Это подтверждает допущение о том, что оценка оптимального числа членов ряда может быть



выполнена на основании оценки погрешности последнего учитываемого члена.

### 1.2.2. Решение для потенциалов и векторов электромагнитного поля в диэлектрическом полупространстве в виде асимптотического ряда

Запишем окончательные выражения для векторного потенциала и индукции магнитного поля, а также скалярного потенциала и напряженности электрического поля в диэлектрическом полупространстве, заменив в соответствующих слагаемых в (1.11) – (1.14) функцию  $\dot{G}_e$  (1.15) ее приближенным значением в виде асимптотического

ряда  $\dot{G}_{eN} = \sum_{n=0}^N \dot{G}_{e1}^{(n)}$  :

$$\begin{aligned} \dot{A}_e = & \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \left[ \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) dl - \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \times \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) dl \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_e = & -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \left[ \oint_l \left( \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl - \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl \right], \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_e = & -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \times \\ & \times \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \oint_l \frac{(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_z)}{r_1} dl, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_e = & -i\omega \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \left[ \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}}{r} - \frac{\mathbf{t}_1}{r_1} \right) dl - \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \right)^{n+1} \frac{\partial^{(n)}}{\partial z^n} \mathbf{e}_z \times \oint_l \left( \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dl \right], \end{aligned} \quad (1.44)$$

где коэффициенты  $a_n(\mu)$  определены в (1.31), вместо произведения  $r_1 \varepsilon_1$  записано его выражение через исходные параметры: циклическую частоту, магнитную проницаемость, электропроводность.

Таким образом, в отличие от исходных выражений (1.11) – (1.14), которые в качестве подынтегральных функций содержат несобственные интегралы от специальных функций, найденные выражения (1.41) – (1.44) представляют собой ограниченные ряды, где каждый член находится вычислением лишь одномерного контурного интеграла. Одномерные интегралы аналогичны соответствующим интегралам для расчета поля линейного тока контура, вычисление и анализ которого могут быть легко выполнены с использованием известных методов.

Такое представление решений удобно не только для определения характеристик поля, но и может быть использовано для нахождения распределения плотности потока энергии в области над проводящей средой

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}, \quad (1.45)$$

где комплексный вектор Пойнтинга  $\tilde{\mathbf{P}}$  определяется через комплексную амплитуду напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}$  и комплексно сопряженную амплитуду напряженности магнитного поля  $\bar{\mathbf{H}}$ .

Во многих технологических устройствах протекание электрофизических процессов связано с выделяющейся в металле тепловой энергией, источником которой является

электромагнитное поле. При сильном скин-эффекте можно говорить о поверхностной мощности выделяющегося тепла, величина которой определяется плотностью потока электромагнитной энергии из диэлектрической среды, где расположен контур с переменным током, в электропроводное тело через границу раздела сред. Действительная часть вертикальной компоненты вектора Пойнтинга на поверхности раздела сред, взятая со знаком “-”, дает плотность потока средней за период мощности  $p_z$  внутрь электропроводного тела, которая в виде джоулева тепла выделяется в поверхностном слое и определяет поверхностную плотность выделяющейся тепловой мощности в теле:

$$p_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-\tilde{\mathbf{P}}(z=0) \cdot \mathbf{e}_z). \quad (1.46)$$

В последнем выражении комплексный вектор Пойнтинга на поверхности раздела сред определяется значениями напряженностей электрического и магнитного полей при  $z=0$ , причем для нахождения величины  $p_z$  достаточно вычислить векторное произведение проекций напряженностей полей  $\dot{\mathbf{E}}_{\text{e}\parallel} = \dot{\mathbf{E}}_e - (\dot{\mathbf{E}}_e \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z$  и  $\overline{\mathbf{H}}_{\text{e}\parallel} = \overline{\mathbf{H}}_e - (\overline{\mathbf{H}}_e \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z$  на плоскую поверхность раздела сред:

$$\begin{aligned} p_z &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{e}_z \cdot [\dot{\mathbf{E}}_e(z=0) \times \overline{\mathbf{H}}_e(z=0)]) = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{e}_z \cdot [\dot{\mathbf{E}}_{\text{e}\parallel}(z=0) \times \overline{\mathbf{H}}_{\text{e}\parallel}(z=0)]) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Если выполняются условия, позволяющие применить асимптотическое разложение, то в (1.47) могут быть использованы выражения (1.42), (1.44).

### 1.2.3. Примеры оценки величины малого параметра и числа членов асимптотического ряда

Основной величиной при определении электромагнитного поля приближенным методом с использованием разложения в асимптотический ряд является величина малого параметра  $\varepsilon_1$ . В зависимости от величины этого параметра  $\varepsilon$  выбирается оптимальное число членов ряда, основанное на анализе величины остатка  $R_N$  (1.33) или оценке погрешности последнего учитываемого члена ряда (1.39).

Величина малого параметра  $\varepsilon_1 = \frac{1}{r_1} \left( \frac{\mu}{\omega \mu_0 \gamma} \right)^{1/2}$  зависит

как от электрофизических свойств среды, так и от расстояния между точками на зеркально отраженном контуре и точкой наблюдения  $r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}$ . Как указывалось, наибольшее значение параметр  $\varepsilon_1$  принимает в том случае, если точки наблюдения располагаются непосредственно под контуром на границе раздела сред, т.е. при  $\rho = 0, z = 0$ . Ниже в качестве примера приводятся значения  $\varepsilon = \varepsilon_1$  в зависимости от частоты поля  $f$  и высоты расположения контура с током  $h$  для ряда металлических материалов.

Рис 1.7 и 1.8 соответствуют значениям  $\varepsilon$  для немагнитных сред: латуни ( $\mu = 1, \gamma = 1,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ) и алюминия ( $\mu = 1, \gamma = 3,7 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ). Показаны значения  $\varepsilon$  в одинаковых диапазонах частот ( $f = 100 \div 1900 \text{ Гц}$ ) и расстояниях от контура до проводящей среды ( $h = 0,015 \div 0,05 \text{ м}$ ). Выбранные диапазоны являются типичными для эксплуатации устройств индукционного

нагрева металлических изделий, и приведенные данные позволяют оценить возможность использования приближенного метода для данных случаев.

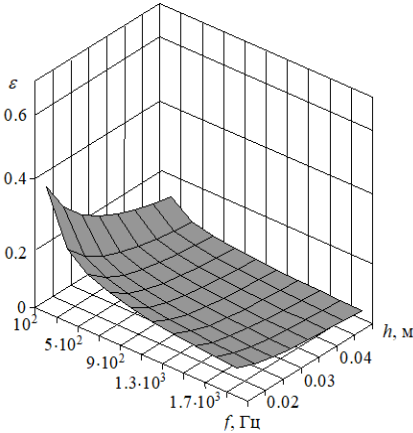


Рис. 1.7. Зависимость  $\varepsilon(f, h)$  для латуни

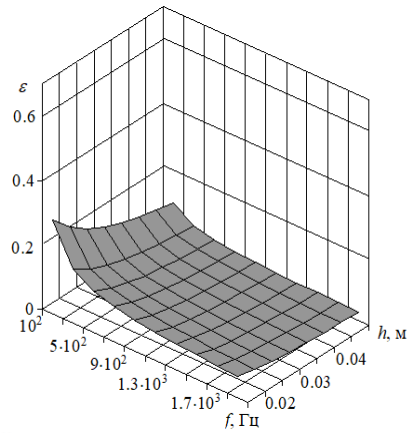


Рис. 1.8. Зависимость  $\varepsilon(f, h)$  для алюминия

Из рисунков видно, что в пределах рассмотренных диапазонов величина  $\varepsilon$  принимает как очень малые значения при  $f \geq 10^3$  Гц и  $h \geq 5 \cdot 10^{-2}$  м, где метод хорошо работает, так и значения, приближающиеся к  $\varepsilon \leq 1$  при  $f \sim 10^2$  Гц,  $h \sim 10^{-2}$  м, где минимальная ошибка достигается при специальном выборе числа членов ряда.

Применение рассматриваемого приближенного метода для определения поля вблизи границы раздела с ферромагнитной средой (например, сталью) возможно в области значительно более высоких частот. Это связано как с проявлением ферромагнитных свойств ( $\mu \gg 1$ ), так и с тем, что удельная электропроводность стали значительно ниже электропроводности рассмотренных хорошо проводящих материалов. На рис. 1.9 в качестве примера показаны

## Глава 1

значения  $\varepsilon$ , характерные для стали в области магнитного насыщения, типичного для устройств индукционного нагрева ( $\mu = 30, \gamma = 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ) [27]. Выбран диапазон частот  $f = 10^4 \div 10^5 \text{ Гц}$  и прежний диапазон расстояний

$$h = 10^{-2} \div 5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

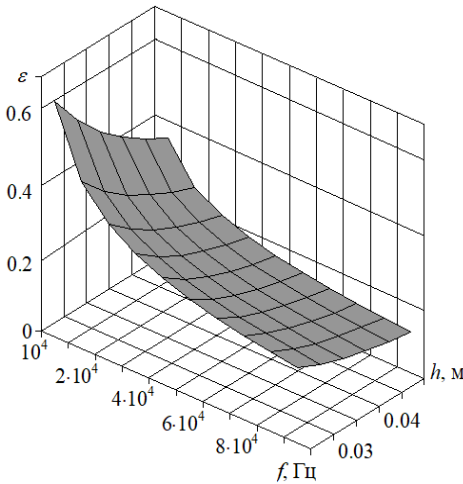


Рис. 1.9. Зависимость  $\varepsilon(f, h)$  для намагничивающегося материала

Относительно возможности использования метода расчета для ферромагнитных сред необходимо отметить, что в данной работе рассматривается линейная постановка задач, т.е. считается, что относительная магнитная проницаемость  $\mu$  не зависит от напряженности магнитного поля и постоянна во всей

области, занятой ферромагнетиком. Такая постановка задач является упрощением, но она широко используется в практике расчетов нагрева ферромагнитных изделий и других практических применениях. При этом обычно суммарная погрешность с учетом замены реальной нелинейной зависимости условием  $\mu = \text{const}$  возрастает.

На рис. 1.10 – 1.12 приводятся результаты расчета по (1.40) числа членов  $N$  асимптотического ряда, при которых относительная погрешность последнего члена ряда не превышает заданного значения  $C_N \leq 1$ , т.е. вблизи значения, где суммарная погрешность расчета минимальна, и в этом

отношении число членов ряда является оптимальным. Расчеты приведены для тех же материалов и в том же диапазоне частот и высот расположения контуров, что и данные, представленные на рис. 1.7 – 1.9 для величины малого параметра  $\varepsilon$ .

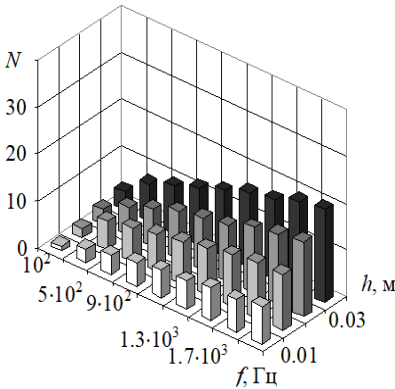


Рис. 1.10. Оптимальное число членов ряда для латуни

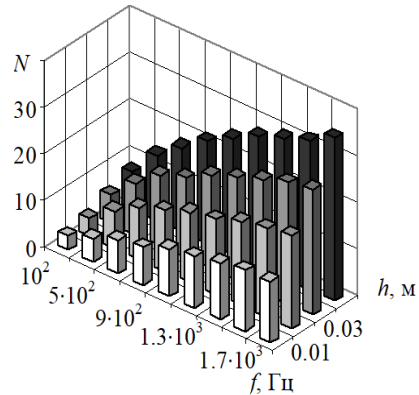


Рис. 1.11. Оптимальное число членов ряда для алюминия

Как видно из рис. 1.10 и 1.11, для немагнитных материалов латуни и алюминия оптимальное число членов ряда сильно зависит от  $\varepsilon$  и в исследуемом диапазоне может принимать значения  $N = 20 \div 30$  в области малых  $\varepsilon$ . Эта же тенденция сохраняется и для намагничивающегося материала (рис. 1.12), где, однако, в анализируемом диапазоне  $N$  не превышает значения  $N = 8$ .

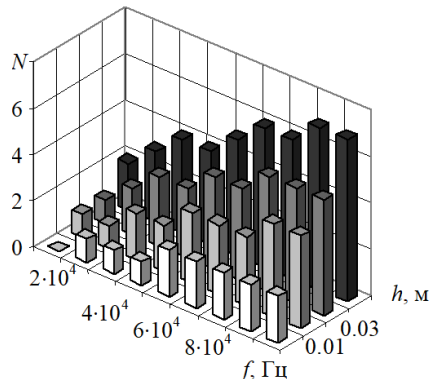


Рис. 1.12. Оптимальное число членов ряда для намагничивающегося материала

При малых значениях  $\varepsilon$  погрешность расчета поля быстро уменьшается с увеличением числа членов ряда и может оказаться ниже установленной минимальной величины, которая определяет пороговое значение числа учитываемых членов ряда. При этом число членов ряда все еще меньше оптимального. Поэтому при проведении практических расчетов необходимо выбирать число членов ряда, обеспечивающих минимальную погрешность, если это число не превышает определенного порогового значения. В противном случае достаточно ограничиться несколькими членами ряда, например, числом, соответствующим заданному пороговому значению.

Из представленных результатов следует, что приближенный метод на основе асимптотического разложения в ряд хорошо адаптирован для расчета электромагнитного поля контуров с током вблизи немагнитных проводящих сред. В этих случаях величина малого параметра принимает значения, при которых можно достаточно легко обеспечить необходимую точность результатов путем выбора необходимого числа членов асимптотического ряда. Метод ограничен в применении к расчету намагничивающихся сред в силу наложения более жестких требований к используемым частотам, которые оказывают прямое влияние на величину малого параметра, от значения которого зависит возможность использования метода. Для таких сред применение метода возможно при больших частотах и в достаточно сильных полях, когда происходит значительное насыщение магнитного материала.

### **1.3. Математическая модель локально двумерного электромагнитного поля вблизи контура с током**

Выше была представлена математическая модель для расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного



поля электромагнитной системы с контурами произвольной конфигурации с использованием асимптотического разложения.

Несмотря на существенное упрощение по сравнению с исходной общей трехмерной постановкой задачи расчеты по приведенным формулам все же требуют вычисления контурных интегралов. Это не создает принципиальных вычислительных затруднений, однако при решении ряда задач, особенно по оптимизации и синтезу систем сложной пространственной конфигурации, объем вычислений резко возрастает и проведение многопараметрического поиска становится трудоемкой задачей.

Вместе с тем во многих случаях задача состоит в нахождении электромагнитного поля в ограниченной области пространства, где расстояния до проводника с током являются малыми по сравнению с характерными размерами контура. Такая задача возникает, например, в устройствах высокочастотного индукционного нагрева металлических тел, когда проводники индуктора располагаются как можно ближе к нагреваемой поверхности. В этом случае возможно дальнейшее упрощение вычислений, которые заключаются в локальной замене трехмерного электромагнитного поля двумерным полем [28 – 30].

### **1.3.1. Малые параметры в модели локально двумерного поля**

Замена контура с током реальной геометрии прямолинейным проводником бесконечной длины возможна при выполнении определенных условий. Так, для уединенных проводников точки наблюдения, в которых определяется поле, должны находиться на таких расстояниях  $r_{\perp}$  от контура, для которых следующие параметры оказываются малыми [31]:

$$\varepsilon_{d1} = \frac{r_{\perp}}{R}, \quad \varepsilon_{d2} = \frac{r_{\perp}}{T}, \quad \varepsilon_{d3} = \frac{r_{\perp}}{r_l}. \quad (1.48)$$

где  $R, T$  – соответственно радиусы кривизны и кручения линии контура,  $r_l$  – характерный размер самого контура, под которым понимается минимальное расстояние между данной точкой контура и любой другой его точкой при условии, что внутреннее расстояние  $l$  вдоль кривой имеет порядок, равный или превышающий  $R$  или  $T$ . В том случае, если условия малости выполнены для всех параметров (1.48), достаточно использовать единое обозначение  $\varepsilon_d$ . Как показано в [31], влияние параметра  $\varepsilon_d$  на распределение поля вблизи линии контура проявляется уже в членах первого порядка по  $\varepsilon_d$ .

В отличие от уединенных контуров, в рассматриваемой задаче присутствует электропроводное тело с плоской границей раздела сред. В этом случае должны быть учтены еще два обстоятельства.

Первое связано с тем, что асимптотическое решение представлено суммой, где участвуют сам контур и его зеркальное отражение от плоской границы, и соответственно присутствуют два расстояния:  $r_{\perp}$  и  $r_{1\perp}$  (рис. 1.13, а). Условие малости параметра  $\varepsilon_d$  должно выполняться для обоих расстояний.

Вторая особенность связана с тем, что касательная к контуру может иметь перпендикулярную к поверхности составляющую  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\parallel} + \mathbf{t}_{\perp}$ , т.е. что ток на определенных участках протекает и в перпендикулярном к поверхности направлении (рис. 1.13, б).

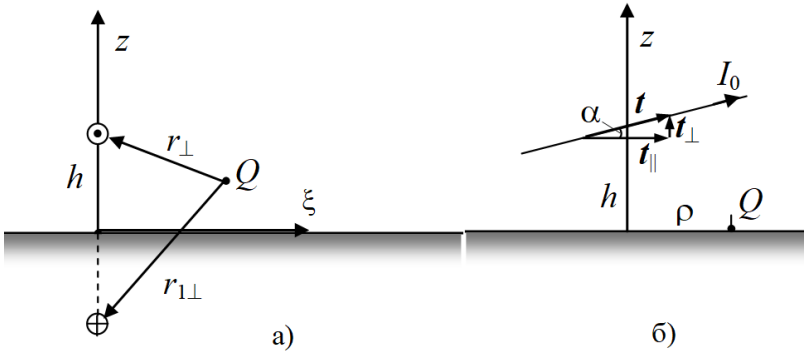


Рис. 1.13. Ориентация участка контура относительно границы раздела сред

Оценим ошибку, вносимую тем, что наклонный проводник заменяется проводником, параллельным плоской поверхности. Ошибка возникает, во-первых, для каждого члена асимптотического разложения при замене проекции касательного вектора  $t_{\parallel}$  его полной длиной  $t$ . Относительная ошибка, оцениваемая по величине подынтегральной функции для членов ряда в контурном интеграле, не зависит от величины малого параметра  $\varepsilon$ , по которому проводится асимптотическое разложение. Для малых углов наклона  $\alpha$  указанная относительная ошибка оказывается просто

$$\delta_{\parallel} = 1 - \cos \alpha \approx \alpha^2/2. \quad (1.49)$$

Во-вторых, ошибка обусловлена пренебрежением его величиной поля, связанной с протеканием тока в вертикальном направлении. Оценим эту ошибку по величине подынтегральной функции в контурном интеграле для тангенциальной компоненты напряженности электрического поля на границе раздела сред ( $z = 0$ ), которая не изменяется при переходе через границу раздела сред и значение которой определяет вертикальную компоненту вектора Пойнтинга на границе.

Тангенциальная компонента напряженности электрического поля имеет две составляющие: одну  $\dot{\mathbf{E}}_1$  (1.21), связанную с протеканием тока контура в параллельном к границе раздела сред направлении, и другую  $\dot{\mathbf{E}}_2$  (1.22), связанную с протеканием тока в перпендикулярном к границе направлении.

Вводя безразмерную переменную интегрирования (1.26) в несобственном интеграле и выбирая в качестве характерного размера высоту расположения элемента тока  $\lambda = h$  (рис. 1.14), тангенциальную компоненту поля можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_t(z=0) = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} 2i\omega \frac{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}}{\mu} \oint_l [\mathbf{t}_{\parallel} f_1 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_\rho f_2] dl, \quad (1.50)$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\exp(-\chi/\varepsilon) J_0(\chi \operatorname{tg} \beta / \varepsilon)}{w(\chi)} \chi d\chi, \quad (1.51)$$

$$f_2 = \int_0^\infty \frac{\exp(-\chi/\varepsilon) J_1(\chi \operatorname{tg} \beta / \varepsilon)}{w(\chi)} \chi d\chi,$$

где  $\varepsilon = \mu\delta/(\sqrt{2}h)$ .

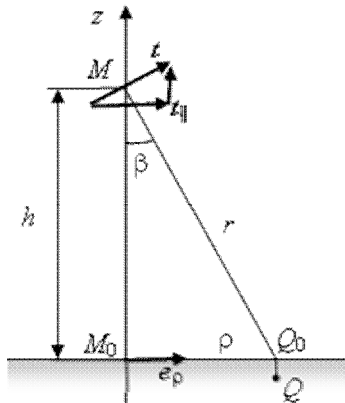


Рис. 1.14. К расчету поля на поверхности раздела сред

Отметим, что  $f_1$  достигает максимального значения непосредственно под элементом контура при  $\beta = 0$ . Напротив,  $f_2$  в этой точке имеет нулевое значение и достигает максимума вблизи значения  $\beta = \pi/4$ .

Относительную погрешность оценим, исходя из отношения максимальных значений соответствующих слагаемых:

$$\delta_{\perp} = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}} \frac{|f_2(z=0, \varepsilon, \beta = \pi/4)|}{|f_1(z=0, \varepsilon, \beta = 0)|}, \quad (1.52)$$

где  $\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}} = \operatorname{tg} \alpha$ .

Рис. 1.15 иллюстрирует оценки величин относительных ошибок  $\delta_{\parallel}$  и  $\delta_{\perp}$  при замене поля контура с током реальной геометрии прямолинейным бесконечно длинным проводником, параллельным плоской граничной поверхности. Как видно из рис. 1.15, большую ошибку дает пренебрежение слагаемым поля, обусловленным протеканием тока в вертикальном направлении  $\delta_{\perp}$ . При этом величина относительной ошибки практически не зависит от значения малого параметра  $\varepsilon$ . Поэтому в диапазоне  $\varepsilon \leq 0,3$  для оценки погрешности при малых углах наклона  $\alpha$  можно использовать единую зависимость

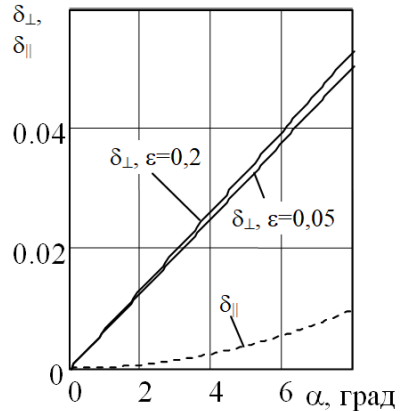


Рис. 1.15. Погрешности расчета

$$\delta_{\perp} \approx 0,366 \alpha. \quad (1.53)$$

С учетом указанных допущений найдем расчетные выражения для векторного потенциала и магнитной индукции локально двумерного электромагнитного поля вблизи токового контура произвольной конфигурации, расположенного над электропроводным полупространством.

### 1.3.2. Векторный потенциал, индукция магнитного поля и плотность потока электромагнитной энергии в проводящую среду в модели локально двумерного электромагнитного поля

С учетом указанных допущений найдем расчетные выражения для векторного потенциала и магнитной индукции локально двумерного электромагнитного поля в диэлектрической области вблизи токового контура произвольной конфигурации. Для этого в определенной точке контура с током, которая характеризуется длиной  $l$ , отсчитываемой от начальной точки, проведем сечение, перпендикулярное касательной  $\mathbf{t}$  (рис. 1.16).

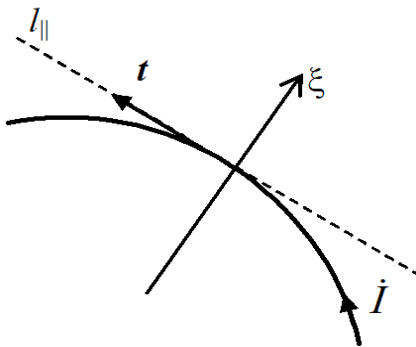


Рис. 1.16. Локальные координаты в плоскости, нормальной к контуру с током

В нормальной плоскости введем локальные координаты  $z, \xi$  в направлениях, определяемых единичными векторами  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_\xi$ : перпендикулярному к плоской поверхности раздела сред  $\mathbf{e}_z$  и перпендикулярному к криволинейному контуру

$$\mathbf{e}_\xi = \mathbf{t} \times \mathbf{e}_z / |\mathbf{t} \times \mathbf{e}_z|$$

(рис. 1.13, а и 1.16).

Для прямолинейного бесконечно длинного проводника интегралы, входящие в формулы (1.41) и (1.42), легко вычисляются. Введя обозначение

$$u_n(\xi, z) = \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl_{\parallel}}{\sqrt{\xi^2 + (z+h)^2 + l_{\parallel}^2}}, \quad (1.54)$$

где  $l_{\parallel}$  — длина вдоль прямолинейного проводника, выражение для векторного потенциала вблизи проводника с током можно записать как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_e = \dot{A}_{et} \mathbf{t} = \frac{\mu_0 \dot{I}_0 \mathbf{t}}{4\pi} \left[ \ln \frac{\xi^2 + (z+h)^2}{\xi^2 + (z-h)^2} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^N (-1)^n 2a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \right)^{n+1} u_n \right]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Индукция магнитного поля  $\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}$  в локальных координатах будет иметь две составляющие, а именно:

$$\dot{\mathbf{B}}_e = -\frac{\partial \dot{A}_{et}}{\partial z} \mathbf{e}_{\xi} + \frac{\partial \dot{A}_{et}}{\partial \xi} \mathbf{e}_z = \mathbf{B}_{e\xi} + \mathbf{B}_{ez} \quad (1.56)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_e = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0 \mathbf{t}}{2\pi} \left\{ \frac{(z+h)\mathbf{e}_{\xi} - \xi\mathbf{e}_z}{\xi^2 + (z+h)^2} - \frac{(z-h)\mathbf{e}_{\xi} - \xi\mathbf{e}_z}{\xi^2 + (z-h)^2} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n(\mu) \left( \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \right)^{n+1} \left( \frac{\partial u_n}{\partial z} \mathbf{e}_{\xi} - \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \mathbf{e}_z \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Под  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\parallel} / |\mathbf{t}_{\parallel}|$  понимается единичный вектор в направлении прямой, параллельной плоскости раздела сред. Функции  $u_n(\xi, z)$  определяются последовательным дифференцированием по координате  $z$  функции

$$u_0(\xi, z) = -\frac{2(z+h)}{\xi^2 + (z+h)^2}, \text{ поэтому}$$

$$\begin{aligned}
 n = 0; \quad u_0 &= -\frac{2(z+h)}{\xi^2 + (z+h)^2}; \\
 n = 1; \quad u_1 &= -\frac{2}{\xi^2 + (z+h)^2} + \frac{4(z+h)^2}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2}; \\
 n = 2; \quad u_2 &= \frac{12(z+h)}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2} - \frac{16(z+h)^3}{[\xi^2 + (z+h)^2]^3}; \\
 n = 3; \quad u_3 &= \frac{12}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2} - \frac{96(z+h)^2}{[\xi^2 + (z+h)^2]^3} + \\
 &+ \frac{96(z+h)^4}{[\xi^2 + (z+h)^2]^4}
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

и т.д.

Для нескольких первых членов ряда приближенное значение векторного потенциала  $A_{et}$  и составляющей  $B_{e\xi}$  индукции магнитного поля, параллельной границе раздела сред, записывается в виде

$$\begin{aligned}
 A_{et} &= \frac{\mu_0 I_0}{4} \left\{ \ln \frac{\xi^2 + (z+h)^2}{\xi^2 + (z-h)^2} + 4 \left( \frac{\mu}{ik} \right) \frac{z+h}{\xi^2 + (z+h)^2} + \right. \\
 &+ 4 \left( \frac{\mu}{ik} \right)^2 \frac{1}{\xi^2 + (z-h)^2} \left( 1 - \frac{2(z+h)^2}{\xi^2 + (z+h)^2} \right) - \\
 &- 4 \left( 2 - \frac{1}{\mu^2} \right) \left( \frac{\mu}{ik} \right)^3 \frac{(z+h)}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2} \times \\
 &\left. \times \left( 3 - \frac{4(z+h)^2}{\xi^2 + (z+h)^2} \right) + \dots \right\},
 \end{aligned} \tag{1.59}$$



$$\begin{aligned}
B_{e\xi} = & -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{4\pi} \left\{ \frac{2(z+h)}{\xi^2 + (z+h)^2} - \frac{2(z-h)}{\xi^2 + (z-h)^2} + \right. \\
& + 4 \left( \frac{\mu}{ik} \right) \frac{1}{\xi^2 + (z+h)^2} \left( 1 - \frac{2(z+h)^2}{\xi^2 + (z+h)^2} \right) - \\
& \left. - 8 \left( \frac{\mu}{ik} \right)^2 \frac{(z+h)}{[\xi^2 + (z+h)^2]^2} \left( 3 - \frac{4(z+h)^2}{\xi^2 + (z+h)^2} \right) + \dots \right\}.
\end{aligned} \quad (1.60)$$

В (1.59) и (1.60)  $ik = \sqrt{i\omega\mu_0\gamma}$ .

Эти выражения существенно упрощаются для точек на поверхности раздела сред непосредственно под проводником с током, когда  $z = \xi = 0$ , а  $r_1 = h$  принимает минимальное значение. В этом случае имеем

$$A_{et} = \frac{\mu_0 \dot{I}_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{\mu}{ik} \right) - \frac{1}{h^2} \left( \frac{\mu}{ik} \right)^2 - \frac{1}{h^3} \left( 2 - \frac{1}{\mu^2} \right) \left( \frac{\mu}{ik} \right)^3 + \dots \right\}, \quad (1.61)$$

$$B_{e\xi} = -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{\pi h} \left\{ 1 - \frac{1}{h} \left( \frac{\mu}{ik} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\mu}{ik} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (1.62)$$

В технологических устройствах для увеличения величины электромагнитного поля, действующего на электропроводную среду, индукторы обычно располагаются на малых расстояниях от металлической поверхности и для анализа электромагнитного поля вблизи границы раздела сред выполняются условия малости геометрических параметров (1.48). Это позволяет использовать математическую модель локально двумерного поля. К подобным устройствам относятся, например, устройства индукционного нагрева проводящих тел [27, 32], где важной характеристикой является поверхностная мощность выделяющегося тепла  $p_z$ . При сильном скин-эффекте, когда допустимо применение асимптотического разложения по малому параметру, выражение для величины  $p_z$ , которая

определяется действительной частью комплексного вектора Пойнтинга (1.47), в модели локально двумерного поля принимает вид

$$\begin{aligned}
 p_z &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_z) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{i\omega}{\mu_0} A_t B_\xi \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_0 i \omega I_0^2}{2\pi^2} \left[ \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot 2a_n \left( \frac{\mu}{ik} \right)^{n+1} u_n(\xi, 0) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{4h}{\xi^2 + h^2} - \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot 2a_n \left( \frac{\mu}{ik} \right)^{n+1} \frac{\partial u_n(\xi, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] \right\} = \quad (1.63) \\
 &= \frac{\mu_0 \omega I_0^2}{2\pi^2} \left( \frac{\sqrt{2}\mu}{2\sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma}} \cdot \frac{h^2}{(\xi^2 + h^2)^2} + \dots \right),
 \end{aligned}$$

где обозначено  $I_0^2 = |I_0|^2$ .

Отметим, что в выражениях для плотности потока тепла  $p_z$  непосредственно под контуром с током при  $\xi = 0$  (1.63) будут присутствовать лишь слагаемые, содержащие  $h$  в четной степени. Для хорошо проводящих немагнитных сред, когда  $\varepsilon \ll 1$ , плотность потока энергии под проводником контура с уменьшением высоты растет как  $\sim \frac{1}{h^2}$ .

### 1.3.3. Оценка погрешности членов асимптотического ряда для криволинейного контура с током

Выше была получена оценка ошибки расчета при использовании модели локально двумерного поля, которая связана с наличием направления тока контура, перпендикулярного к границе раздела сред. Теперь рассмотрим другой источник ошибки, который связан с тем, что контур имеет определенный радиус кривизны.

Формулы (1.55), (1.57), (1.63) и связанные с ними выражения являются приближенными, и поэтому необходимо определить погрешность расчета электромагнитного поля при замене реального изгибающегося проводника прямолинейным бесконечно длинным элементом тока. Для этого выполним сравнение результатов в точках на поверхности раздела сред, полученных по приближенным выражениям и по формулам (1.41) и (1.42), содержащих одномерные интегралы для контуров круговой формы. Так как погрешность зависит от того, насколько удалена точка, в которой определяется поле, по сравнению с радиусом изгиба проводника, то сравнение проводится для контуров, расположенных параллельно границе раздела сред, с различным отношением радиуса контура к расстоянию до поверхности  $R/h$ . В связи с тем, что результат представлен в виде ряда, то сравнение выполним как каждого члена ряда, так и для результирующего поля.

Сравнение расчета каждого члена ряда для азимутальной компоненты векторного потенциала системы с контуром круговой формы при  $z = 0$  иллюстрирует рис. 1.17, соответствующий первым четырем слагаемым  $n = 0, 1, 2, 3$ . Приводятся зависимости от координаты  $\xi$  величины члена ряда, рассчитанного по (1.41), нормированные на значения этого же члена ряда (1.55) в точке  $\xi = z = 0$  локально двумерной модели:

$$\frac{D_n(R, \xi, z = 0)}{u_n(0, 0)} = \frac{\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial z^{(n+1)}} \int_l \frac{\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_Q}{r_1} dl}{u_n(0, 0)}. \quad (1.64)$$

В (1.64) через  $\mathbf{t}_Q$  обозначен единичный азимутальный вектор, проходящий через точку, в которой вычисляется значение члена ряда.

На рис. 1.17 показано отношение (1.64) для четырех значений:  $R/h = \infty, 10, 5, 3$ . Случай  $R/h = \infty$  соответствует

## Глава 1

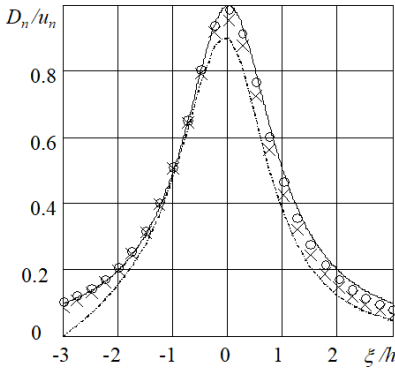
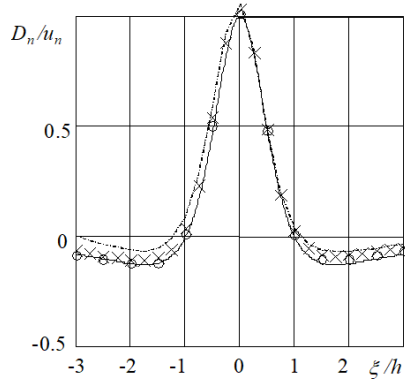
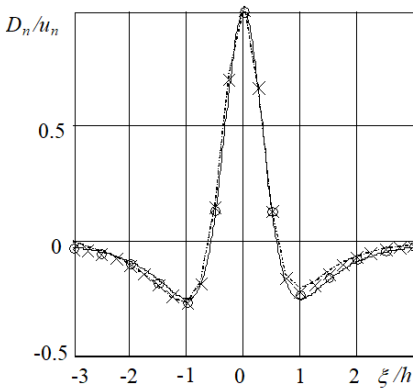
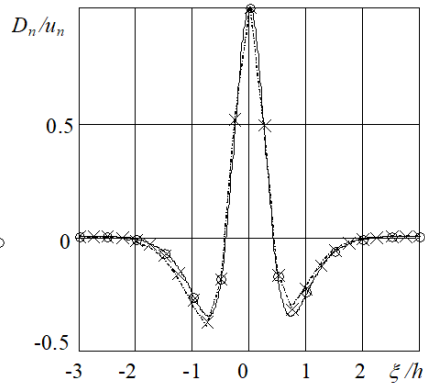
---

локально двумерной математической модели и на рисунках зависимости для него показаны сплошными линиями, которые в точке  $\xi = 0$  проходят через значение  $D_n(\infty, 0, 0)/u_n(0, 0) = 1$ . Зависимости  $D_n/u_n$  для  $R/h = 3$  показаны пунктирными линиями. Результаты для промежуточных значений  $R/h = 10$  и  $R/h = 5$  отмечены соответствующими значками.

Из сравнения зависимостей на рис. 1.17, соответствующих разным членам ряда, видно, что наибольшая погрешность при замене реального контура прямолинейным проводником будет для первого члена ряда  $n = 0$ , вклад которого в общую сумму наибольший. Относительная погрешность при замене реального контура прямолинейным проводником для каждого члена ряда уменьшается с ростом  $n$ . Если учесть, что с ростом  $n$  уменьшается также и вклад каждого слагаемого, то можно сделать вывод о том, что для обеспечения необходимой точности расчета поля вблизи проводника реальную геометрию контура необходимо учитывать лишь для первых членов ряда.

Для последующих членов можно использовать приближенный метод расчета. При значительных радиусах кривизны по сравнению с высотой контуров над проводящей средой погрешность может оказаться незначительной для всех членов используемого ряда.

По мере удаления от контура поле ослабевает, но вместе с тем, так как увеличивается расстояние  $r$  от проводника, падает и точность расчета при использовании локально двумерной математической модели. Поэтому, если требуется с достаточной точностью определять магнитное поле в удаленных от проводника точках, необходимо по-прежнему использовать математическую модель, содержащую операцию интегрирования по контуру.

 $n = 0$  $n = 1$  $n = 2$  $n = 3$ 

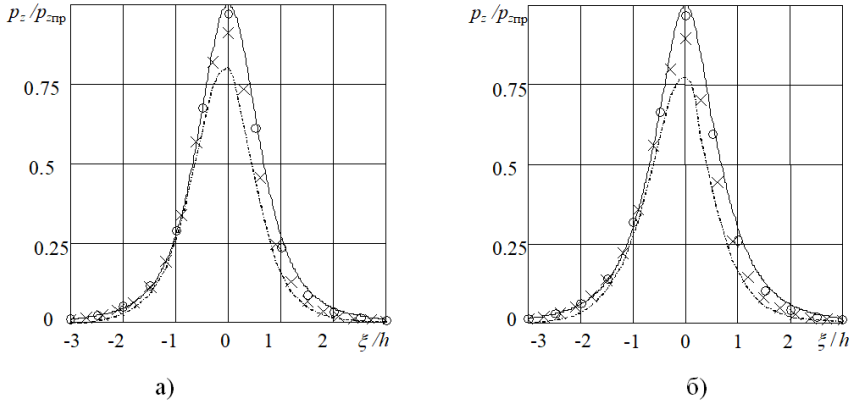
$$\delta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}; h = 0,025 \text{ м}; \mu = 1$$

— -  $R/h \rightarrow \infty$ ;  $\circ\circ\circ$  -  $R/h = 10$ ;  $\times\times\times$  -  $R/h = 5$ ; ---  $R/h = 3$

Рис. 1.17. Зависимости  $D_n/u_n(\xi/h)$  первых четырех членов ряда при разных отношениях  $R/h$

Суммарная погрешность (в отличие от погрешности вычисления каждого члена ряда) при замене реального изгибающегося проводника прямолинейным иллюстрируется на примере расчета вертикальной компоненты плотности

потока электромагнитной энергии  $p_z$  в проводящую среду. Расчеты проведены для электрофизических параметров среды, соответствующих латуни (рис. 1.18, а) и стали (рис. 1.18, б) с типичным для индукционного способа нагрева значением  $\mu = 30$  [27].



а)  $\delta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}; h = 0,025 \text{ м}; \mu = 1$     б)  $\delta = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}; h = 0,04 \text{ м}; \mu = 30$   
 — -  $R/h \rightarrow \infty$ ;  $\circ\circ\circ$  -  $R/h = 10$ ;  $\times\times\times$  -  $R/h = 5$ ; ---  $R/h = 3$

Рис. 1.18. Зависимости  $p_z(R, \xi)/p_{z \text{ пр}}$  от координаты  $\xi$  для латуни (а) и стали (б) при разных отношениях  $R/h$

На рис. 1.18 представлены зависимости отношения  $p_z(R, \xi)/p_{z \text{ пр}}$  от нормированного значения координаты  $\xi$ , где  $p_z(R, \xi)$  рассчитана по выражениям, содержащим операцию интегрирования вдоль контура;  $p_{z \text{ пр}}$  – значение для прямолинейного бесконечно длинного проводника при  $\xi = 0$ . Сравнивая зависимости с различными значениями  $R/h$ , можно оценить, как возрастает погрешность с уменьшением отношения  $R/h$ . Так, например, для контура с  $R/h = 10$  погрешность для стали не превышает 3,5% и она еще меньше для материала из латуни. В то же время при  $R/h = 3$  она уже равна примерно 20% и расчеты необходимо проводить, не прибегая к упрощенной модели локально

двумерного поля. При этом необходимо отметить, что контуры с таким малым соотношением  $R/h$  редко используются в электротехнических устройствах, в частности, для индукционного нагрева электропроводных изделий.

Приведем еще пример расчета плотности потока энергии переменного электромагнитного поля для плоского контура, параллельного границе раздела сред. Считается, что поле создается плоским токовым контуром, форма которого представляет собой эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , контур располагается на расстоянии  $h$  от границы раздела сред.

Характерной особенностью некруговых контуров является переменный радиус кривизны  $R_{кр}$ . Для эллипса  $R_{кр}$  определяется по формуле [33]

$$R_{кр} = a^2 b^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right)^{3/2}. \quad (1.65)$$

Расчет выполнен методом асимптотического разложения с использованием интегрирования по контуру эллиптической формы. Расстояние от контура до проводящей среды принято равным  $h=0,025$  м. Электрофизические параметры проводящей среды являются типичными для нагреваемого индукционным способом латунного изделия:  $\gamma = 1,25 \cdot 10^7$  Ом<sup>-1</sup> м<sup>-1</sup>,  $\mu = 1$ . Частота тока – 4000 Гц. При этой частоте величина малого параметра  $\varepsilon = 0,064$ , а число членов асимптотического ряда, при котором погрешность минимальна,  $N = 15$ .

На рис. 1.19 представлены результаты расчетов для контуров с отношением полуосей  $a/b=2$  (кривые 1) и  $a/b=4$  (кривые 2). На рис. 1.19, а показано изменение радиусов кривизны для этих двух случаев, а на рис. 1.19, б – плотность потока электромагнитной энергии в проводящую среду, нормированная на значение  $p_z(\theta=0)$  в точках

непосредственно под контурами в зависимости от полярного угла  $\theta$ .

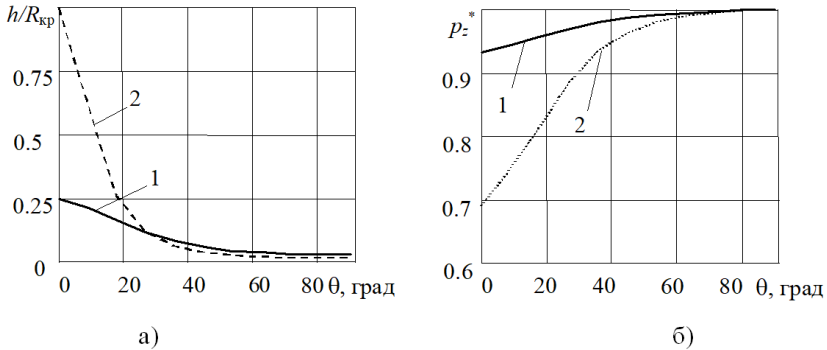


Рис. 1.19. Зависимости  $h/R_{кр}(\theta)$  (а) и  $p_z^*(\theta)$  (б)

Видно, что значения  $p_z$  тем больше зависят от положения точек поверхности под контуром, чем больше величина переменного в данном случае радиуса кривизны по отношению к расстоянию от контура до границы раздела сред. Применение модели локально двумерного поля не показало бы зависимости от угла  $\theta$  и было бы близко к значению при  $\theta = 0$ .

Из сравнения зависимостей видно, что с уменьшением радиуса кривизны уменьшается и плотность потока тепловой энергии в проводящую среду. Это свидетельствует о том, что эффективным образом влиять на характер тепловыделений можно как изменением высоты расположения контура с током над проводящей средой, так и выбором радиуса кривизны контура.

#### 1.4. Выводы к главе 1

1. На основе использования известного решения задачи о поле излучающего гармонического токового диполя для случая трехмерного квазистационарного электромагнитного поля получено точное аналитическое



решение задачи о поле переменного тока, протекающего вдоль замкнутого контура, расположенного вблизи плоской поверхности электропроводного намагничивающегося тела, без ограничений на геометрию контура, электрофизические свойства среды и частоту тока.

2. Для задач с сильным скин-эффектом в электропроводном теле уменьшение необходимого объема вычислений достигается с использованием метода разложения в ограниченный асимптотический ряд. Дальнейшее упрощение расчетов путем замены контурных интегралов простыми алгебраическими выражениями возможно с использованием приближенной математической модели локально двумерного электромагнитного поля, справедливой для поля вблизи контура с током, расположенного над электропроводным полупространством.

3. Полученные результаты используются в главе 3 при решении обратных задач по нахождению геометрии индукторов в виде токовых контуров пространственной конфигурации в установках высокочастотного индукционного нагрева металлических лент.

## **ГЛАВА 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СИСТЕМЫ С ТОКОВЫМИ КОНТУРАМИ ДЛЯ ТЕРМИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ДВИЖУЩУЮСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНУЮ ПОЛОСУ**

Совокупность электропроводных тел, индукционных обмоток и магнитопроводов, взаимодействие которых определяет результирующее электромагнитное поле, объединяется понятием электромагнитной системы.

Термическое воздействие электромагнитного поля на металлы принято называть индукционным нагревом. Устройства индукционного нагрева в общем случае состоят из нагреваемого тела, индуктирующей обмотки, тепловой изоляции, магнитопроводов и конструктивных элементов.

По взаимному расположению вектора напряженности магнитного поля индуктирующей обмотки и продольной оси нагреваемого изделия различают два типа индукционного нагрева – в поперечном и продольном магнитном поле. Преимущественно в продольном магнитном поле осуществляется нагрев цилиндров и длинных призм. Для нагрева плоских изделий, таких как ленты, полосы, тонкие слэбы используются оба типа индукторов. Однако область применения индукторов продольного поля ограничена нагревом ферромагнитных сред до температуры ниже точки Кюри. Индукторы поперечного магнитного поля одинаково эффективно могут работать как при нагреве ферромагнитных, так и неферромагнитных сред. Ограничением для использования индукторов поперечного поля является высокий уровень шума и вибрации, особенно на промышленной частоте тока. В связи с этим обстоятельством мировой опыт применения индукционного

нагрева для термообработки лент основан на использовании индукторов, работающих от источников питания повышенной частоты. При этом в диапазоне средних частот могут использоваться магнитопроводы, а с повышением частоты тока – токовые контуры различной конфигурации.

Следует отметить, что пространственная размерность электромагнитного поля в случае использования поперечного потока, к которому следует отнести и токовые контуры над плоской поверхностью тел, на единицу выше, чем при продольном, а конфигурация полей сложнее.

Силовое воздействие электромагнитного поля на проводящие тела является основополагающим принципом электромеханики в целом. Здесь будем рассматривать механические проявления электромагнитного поля в совокупности с индукционным нагревом плоских тел.

Сложность электромагнитных процессов в индукционных устройствах обусловлено такими факторами:

1. Электромагнитные поля распределены в многосвязной системе, содержащей проводящие и непроводящие, магнитные и немагнитные среды. В общем случае поля пространственно трехмерны.

2. Электрофизические свойства нагреваемых сред могут зависеть от интенсивности поля (для ферромагнитных сред) и температуры.

Описание электромагнитных процессов в индукционных устройствах в общем виде не представляется возможным и требует ряд допущений, корректность которых зависит от конкретной электромагнитной системы. Достаточно общими допущениями для всех индукционных систем являются следующие:

1. Поле в системе принимается квазистационарным. Под этим понимается, что длина волны электромагнитного поля велика по сравнению с характерными размерами нагреваемого тела. При этом отношение проводимости материала к частоте поля

оказывается намного больше единицы, что позволяет пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Электропроводящая среда движется со скоростью намного меньшей скорости света.

2. Рассматриваются электрически нейтральные среды, в которых отсутствуют объемные свободные электрические заряды.

3. Электромагнитные процессы изучаются в установившихся режимах, при которых изменение компонентов поля происходит по гармоническому закону. Это позволяет эффективно использовать символьный метод для расчета электромагнитных полей.

4. Потери на гистерезис при индукционном нагреве ферромагнитных сред намного меньше, чем на вихревые токи.

5. Потери на гистерезис и вихревые токи в магнитопроводах не оказывают заметного влияния на электромагнитные поля вне его и учитываются отдельно.

Частные допущения, зависящие от рассматриваемых электромагнитных систем, будут вводиться по ходу изложения.

### 2.1. Основные уравнения

В проводящем теле, помещенном в переменное магнитное поле, создаются вихревые токи, если хотя бы часть замкнутых контуров, которые можно выделить в объеме этого тела, пронизывается магнитным потоком. Протекание вихревого тока вызывает нагрев тела в соответствии с законом Джоуля–Ленца.

Вихревые токи создают собственные магнитные поля (поля реакции), которые складываются со сторонним полем (полем возбуждения), образуя результирующее поле, изменение которого и определяет электродвижущую силу:

$$e = -d\Phi/dt . \quad (2.1)$$

Одновременно вихревые токи, взаимодействуя друг с другом и с полем возбуждения, создают электродинамические усилия, приводящие при наличии степеней свободы к перемещению тел или их вибрации.

Широко известны методы описания индукционных систем, разработанные на основе теории электрических цепей. В теории индукционного нагрева эти методы основываются на аппроксимации электромагнитной системы многосвязной цепной схемой [1], несколькими индуктивно связанными контурами [2] или магнитной схемой замещения [3, 4, 5]. Методы обладают простотой и наглядностью. Однако при разработке индукционных устройств нагрева сплошных сред в поперечном магнитном поле заранее выделить контуры вихревого тока или участки с постоянным магнитным потоком не представляется возможным. Поэтому для анализа электромагнитных процессов в сложных индукционных системах следует использовать методы теории электромагнитного поля.

Обозначения в данной главе в основном соответствуют обозначению таких же величин в предыдущей главе, однако из-за специфики задач с учетом движения проводящих сред ряд общих выражений повторяется, и в то же время некоторые обозначения отличаются от тех, которые используются в главах 1 и 3.

Исследования электромагнитных процессов, выполняемых в настоящей работе, базируются на использовании уравнений Максвелла в движущихся проводящих средах [6]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t ; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{em} ; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ; \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 . \quad (2.5)$$

## Глава 2

---

Здесь обозначения векторов поля такие же, как и в первой главе:  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  – соответственно векторы напряженности магнитного и электрического полей, магнитной индукции, плотности тока.

Систему уравнений Максвелла, чтобы она была полной, необходимо дополнить материальными уравнениями, определяющими связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля, магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля:

$$\mathbf{j} = \gamma[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]; \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.7)$$

где  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды,  $\gamma$  – удельная электропроводность,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости движения среды. Магнитная проницаемость зависит от электрофизических свойств среды, полагается известной постоянной величиной или функцией напряженности магнитного поля. Электропроводность среды является электрофизической характеристикой и также полагается известной величиной, зависящей от температуры.

Правая часть уравнения (2.3) содержит слагаемое  $j_{cm}$ , представляющее собой так называемую стороннюю плотность тока, обусловленную действием посторонних по отношению к рассматриваемой среде электродвижущих сил (ЭДС). Величина  $j_{cm}$  при решении соответствующих задач полагается заданной.

Уравнение (2.5) следует из (2.3) после применения к его обеим частям операции  $\text{div}$ .

Будем полагать, что система координат неподвижна и связана с индуктором. Величины  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  не зависят от избранной системы координат, т.е. инвариантны по отношению к ней. В то же время величина вектора  $\mathbf{E}$  зависит от выбранной системы координат и может быть

измерена датчиками, неподвижными относительно индуктора. Поэтому  $\mathbf{E}$  обычно называют ЭДС трансформации. Второй член в квадратных скобках уравнения (2.6) представляет собой напряженность электрического поля ЭДС движения, а вся величина в квадратных скобках (2.6) – напряженность электрического поля полной ЭДС, индуцируемой в движущейся среде.

Уравнения (2.2), (2.3) с материальными уравнениями (2.6), (2.7) полностью, с точностью до постоянных интегрирования, определяют все неизвестные величины –  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}$ . Постоянные интегрирования определяются из дополнительных условий для электромагнитного поля на границах рассматриваемой среды – граничных условий.

Граничные условия первого рода или, как их иногда называют, условия Дирихле заключаются в задании искомой функции на границе расчетной области.

В граничных условиях второго рода (условия Неймана) задана нормальная производная искомой функции. Часто используются нулевые граничные условия Неймана на плоскостях и осях симметрии.

Используются также граничные условия третьего рода, которые принято называть смешанными. К смешанным граничным условиям относятся импедансные граничные условия, связывающие тангенциальные напряженности электрического и магнитного полей на поверхности.

В случае, если внутри рассматриваемой области содержатся среды, отличающиеся электрофизическими характеристиками, то для определения поля в каждой из сред используются условия сопряжения. Они сводятся к равенству тангенциальных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей по обе стороны границы раздела, не содержащей поверхностных токов:

$$E_{t1} = E_{t2}; H_{n1} = H_{n2}. \quad (2.8)$$

Если на границе раздела имеется слой поверхностных токов с плотностью  $\mathbf{j}_s$ , то разность тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля принимается равной поверхностному току:

$$H_{t1} - H_{t2} = j_s . \quad (2.9)$$

Следующее условие сопряжения заключается в равенстве нормальной составляющей индукции магнитного поля:

$$B_{n1} = B_{n2} . \quad (2.10)$$

Целью исследования поля является изучение преобразования энергии электромагнитного поля в другие виды энергии – тепловую и механическую. В общем случае по результату определения распределения в пространстве компонент электромагнитного поля можно найти плотность потока мощности в каждой точке пространства по величине вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} , \quad (2.11)$$

который для синусоидально изменяющихся полей в декартовой системе координат имеет комплексные составляющие:

$$\begin{aligned} S_x &= 1/2 \left( E_{my} H_{mz}^* - E_{mz} H_{my}^* \right); \\ S_y &= 1/2 \left( E_{mz} H_{mx}^* - E_{mx} H_{mz}^* \right); \\ S_z &= 1/2 \left( E_{mx} H_{my}^* - E_{my} H_{mx}^* \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где значком \* обозначена комплексно сопряженная величина.



Поступающая в проводящее тело электромагнитная мощность преобразуется в тепловую и механическую энергию. Средняя во времени объемная плотность источников теплоты, выраженная через изменяющиеся по гармоническому закону плотности токов, согласно закону Джоуля–Ленца определяется как

$$P_W = \left( j_{mx}^* j_{mx} + j_{my}^* j_{my} + j_{mz}^* j_{mz} \right) / 2\gamma . \quad (2.13)$$

Взаимодействие магнитного поля, создаваемого индуктирующей катушкой, с токами в витках самой катушки, с вихревыми токами в проводящем теле и с магнитопроводом приводит к возникновению электродинамических усилий.

Возможно несколько эквивалентных по получаемым результатам описаний (моделей) электродинамических усилий.

Объемная плотность электродинамической силы равна векторному произведению плотности тока и индукции магнитного поля [6]:

$$\mathbf{f}_V = \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (2.14)$$

В важном для настоящего изложения случае представления тока обмотки в виде токового слоя электродинамические силы могут быть вычислены по величине линейной (называемой еще поверхностной) плотности тока (обычно заданной) и значению индукции магнитного поля на поверхности слоя:

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{j}_S \times \mathbf{B} , \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{j}_S$  – линейная плотность тока индуктора. В случае необходимости определения электродинамической силы, воздействующей на полосу, результат (2.15) в соответствии с третьим законом Ньютона нужно взять со знаком минус.

Вторая модель возникновения электродинамических усилий основана на предложенных Максвеллом представлениях о натяжениях, действующих вдоль силовых линий поля [10]. При таком подходе сила, действующая на тело, определяется полем у поверхности тела, но не включающим источников поля [9]. Учитывая, что максвелловский тензор натяжения для магнитного поля имеет вид

$$T_{ik} = H_i B_k - \frac{1}{2} (HB) \delta_{ik}, \quad (2.16)$$

сила, действующая на единицу поверхности тела, оказывается [10]

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{T}\vec{n} = (\mathbf{B}\vec{n})\mathbf{H} - (\mathbf{B}\mathbf{H})\vec{n}/2. \quad (2.17)$$

Здесь  $\delta_{ik}$  – единичный тензор,  $\vec{n}$  – единичный вектор, нормальный к поверхности тела.

Для магнитопровода с большой магнитной проницаемостью вектор напряженности магнитного поля везде можно считать нормальным к его поверхности. Тогда полная сила будет

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{F}_0 dS = \frac{\mu_0}{2} \oint_S H_n^2 \vec{n} dS. \quad (2.18)$$

Поскольку вихревые токи в нагреваемом теле всегда замкнуты, то нагреть равномерно неподвижные тела невозможно. Поэтому для обеспечения заданного профиля температуры нагреваемые тела передвигаются вдоль индуктора. В этом случае температурное поле в твердом теле, перемещаемом вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v$ , описывается уравнением теплопроводности [7]

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + P_w - \rho c_v v \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.19)$$

где  $\rho$ ,  $c_v$ ,  $\lambda$  – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности нагреваемой среды.

Уравнение (2.19), дополненное начальными и граничными условиями позволяет вычислить распределение температуры в движущейся в направлении оси  $Ox$  электропроводной полосе ограниченной ширины и толщины.

## 2.2. Однофазные индукторы поперечного магнитного потока для нагрева лент

Индукционный нагрев узких лент (менее 400 мм) с относительно низкой электропроводностью (менее  $5 \cdot 10^6 \text{ I}/(\text{Ом} \cdot \text{м})$ ) по энергетическим соображениям целесообразно проводить на повышенной частоте тока [8]. Ввиду широкого распространения статических преобразователей частоты, которые, как правило, выполняются однофазными, высокочастотные индукторы также выполняются однофазными. Для улучшения энергетических характеристик однофазных индукторов на средних частотах (до 1000 Гц) обычно используют ферромагнитный сердечник. При дальнейшем увеличении частоты питающего тока использование ферромагнитных сердечников из-за увеличения потерь на вихревые токи в шихтованной стали уже нецелесообразно, и индукторы выполняются без сердечника.

### 2.2.1. Индукторы поперечного магнитного потока с ферромагнитным сердечником

Будем рассматривать многополюсные однофазные индукторы с четным числом полюсов. Такое требование обуславливает отсутствие постоянного по длине активной зоны пульсирующего магнитного поля. В противном случае – нечетном числе полюсов – в металлической полосе возбуждается контур вихревого тока, охватывающего всю

активную зону индуктора. Протекание этого тока в области краевых участков полосы приводит к их дополнительному нагреву, что негативно отражается на равномерности нагрева по ширине. Вследствие четного числа полюсов за пределами активной зоны индуктора отсутствуют также потоки шунтирования. Поэтому для анализа электромагнитных процессов в таких индукторах можно ограничиться моделью бесконечно длинных магнитопроводов и использовать модель чередующихся индукторов с нечетной симметрией по поперечной координате.

Обмотку двухстороннего индуктора разместим на внутренних поверхностях гладких идеальных магнитопроводов в виде токовых слоев, равных реальной ширине пазов  $b_n$ , в которых размещается обмотка (рис. 2.1). Обмотки верхнего и нижнего сердечников включены согласно.

Следуя модели чередующихся индукторов, ширину сердечника увеличим до ширины полосы, но в отличие от известных моделей [13] токи лобовых частей обмоток распределим на промежутке  $b_d \approx 2d$  непосредственно за реальной шириной сердечника. При этом потребуем выполнение условия  $b_d \leq (a - b)/2$ .

Для расчета электромагнитных усилий, действующих на полосу, обладающую относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ , отличной от единицы, положение полосы в зазоре принято преднамеренно несимметричным по отношению к продольной оси симметрии индуктора.

Магнитное поле в движущейся со скоростью  $v$  в направлении оси  $Ox$  сплошной проводящей полосе толщиной  $d_2$  найдем из решения краевой задачи для индукции магнитного поля в зазоре при идентичном исполнении верхнего и нижнего индукторов.

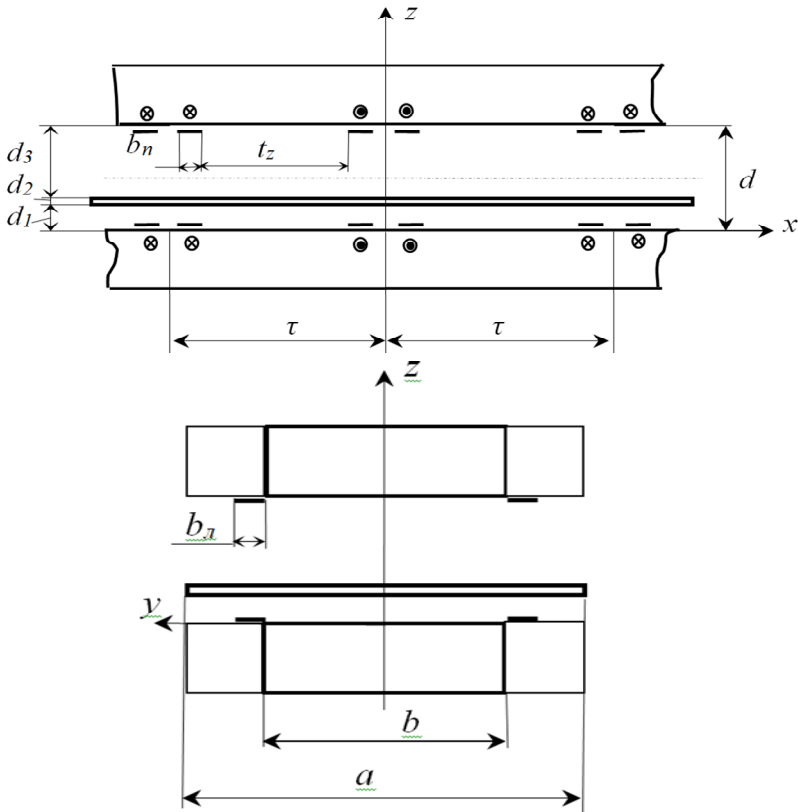


Рис. 2.1 Расчетная модель

При постоянных электропроводности и магнитной проницаемости нагреваемой полосы, исходя из системы уравнений Максвелла (2.2) – (2.4) и материальных уравнений для движущейся среды (2.6), (2.7), уравнение индукции имеет вид

$$\Delta \mathbf{B} - \mu \mu_0 \gamma [\partial \mathbf{B} / \partial t + (\mathbf{v} \text{grad}) \mathbf{B}] = 0, \quad (2.20)$$

где  $\gamma$  – электропроводность.

Для сформулированной выше расчетной модели с однородными граничными условиями на поверхности индуктора к уравнению (2.20) можно применить интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$  и интегральное преобразование в конечных пределах с ядрами  $(2/a)\cos(qy)$  для  $B_x$  и  $B_z$  составляющих индукции магнитного поля и  $(2/a)\sin(qy)$  для  $B_y$  составляющей поля по переменной  $y$ . Полагая закон изменения магнитной индукции гармоническим во времени, уравнения для преобразованных значений  $B_z$ -составляющей комплексной амплитуды индукции магнитного поля в зазоре имеют вид

$$\frac{d^2 \hat{B}_z}{dz^2} - \eta_1^2 \hat{B}_z = 0 \quad 0 < z < d_1, \quad (d_1 + d_2) < z < d; \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2 \hat{B}_z}{dz^2} - \eta_2^2 \hat{B}_z = 0 \quad d_1 < z < (d_1 + d_2), \quad (2.22)$$

где  $\eta_1^2 = n^2 + q^2$ ,  $\eta_2^2 = n^2 + q^2 + i\mu\mu_0\gamma\omega - i\mu\mu_0\gamma\nu n$ ,  
 $q = (2k-1)\pi/a$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $n$  – параметр преобразования Фурье,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота тока,

$$\hat{B}_{z,x} = \frac{a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} B_{z,x} \cos(qy) e^{inx} dx dy;$$

$$\hat{B}_y = \frac{a}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} B_y \sin(qy) e^{inx} dx dy. \quad (2.23)$$

Обратные преобразования даются формулами

$$B_{z,x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_{z,x} \cos(qy) e^{-inx} dn;$$

$$B_y = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_y \sin(qy) e^{-inx} dn. \quad (2.24)$$

Решения уравнений (2.21), (2.22) для соответствующих областей выражаются через элементарные функции:

$$\hat{B}_{z1} = C_1 \operatorname{ch}(\eta_1 z) + C_2 \operatorname{sh}(\eta_1 z) / \eta_1, \quad 0 \leq z \leq d_1; \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{z2} &= C_3 \operatorname{ch}[\eta_2(z - d_1)] + C_4 \operatorname{sh}[\eta_2(z - d_1)] / \eta_2, \\ d_1 &\leq z \leq (d_1 + d_2); \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{z3} &= C_5 \operatorname{ch}[\eta_1(z - d_1 - d_2)] + C_6 \operatorname{sh}[\eta_1(z - d_1 - d_2)] / \eta_1, \\ (d_1 + d_2) &\leq z \leq d. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Применительно к модели чередующихся индукторов с нечетной симметрией из уравнений  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  и  $\operatorname{rot}_z \mathbf{B} = 0$  [14] преобразованные значения  $\hat{B}_{x,y}$  составляющих индукции магнитного поля для каждой из областей определяются по формулам

$$\hat{B}_x = -\frac{in}{\eta_1^2} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}, \quad \hat{B}_y = -\frac{q}{\eta_1^2} \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial z}, \quad (2.28)$$

поэтому для определения компонент вектора магнитной индукции в зазоре машины достаточно найти  $B_z$  составляющую из уравнений (2.21), (2.22) и выполнить сопряжение на границах раздела сред. На границах раздела воздуха и металла выполняются равенства тангенциальных составляющих напряженности и нормальных составляющих индукции магнитного поля, которые сводятся к следующим условиям сопряжения:

$$B_z^e = B_z^m, \quad \partial B_z^e / \partial z = 1/\mu \partial B_z^m / \partial z, \quad (2.29)$$

где  $B_z^e$ ,  $B_z^m$  – значения индукции на границах раздела воздушного и металлического слоев зазора.

Два дополнительных условия на поверхностях индукторов в предположении, что токовая нагрузка нижнего и верхнего индукторов равна и задана, а магнитная проницаемость магнитопроводов бесконечно велика, получим из выражения  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  и закона полного тока. При  $z = 0$  и  $z = d$  удовлетворяются условия

$$\frac{\partial B_z(0)}{\partial z} = -\mu_0 \left( \frac{\partial j_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial j_{sx}}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial B_z(d)}{\partial z} = \mu_0 \left( \frac{\partial j_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial j_{sx}}{\partial y} \right). \quad (2.30)$$

Подставляя в граничные условия (2.29) и (2.30) соответствующие решения (2.25) – (2.27), получаем систему уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$C_2 = \frac{\partial \hat{B}_z(0)}{\partial z}, \quad z = 0;$$

$$C_3 = C_1 \operatorname{ch}(\eta_1 d_1) + C_2 \operatorname{sh}(\eta_1 d_1) / \eta_1, \quad z = d_1;$$

$$\frac{1}{\mu} C_4 = \eta_1 C_1 \operatorname{sh}(\eta_1 d_1) + C_2 \operatorname{ch}(\eta_1 d_1), \quad z = d_1;$$

$$C_5 = C_3 \operatorname{ch}(\eta_2 d_2) + C_4 \operatorname{sh}(\eta_2 d_2) / \eta_2, \quad z = d_1 + d_2;$$

$$\mu C_6 = \eta_2 C_3 \operatorname{sh}(\eta_2 d_2) + C_4 \operatorname{ch}(\eta_2 d_2), \quad z = d_1 + d_2;$$

$$C_5 \eta_1 \operatorname{sh}(\eta_1 d_3) + C_6 \operatorname{ch}(\eta_1 d_3) = \frac{\partial \hat{B}_z(d)}{\partial z}, \quad z = d.$$

Решение представленной линейной системы уравнений не вызывает трудности. Здесь приведем лишь важные для дальнейшего изложения соотношения, описывающие распределение преобразованного значения магнитной индукции на поверхности сердечников

$$\hat{B}_z(0) = -\frac{1}{Z_1(0)} \frac{\partial \hat{B}_z(0)}{\partial z}, \quad (2.31)$$



$$\hat{B}_z(d) = \frac{1}{Z_1(d)} \frac{\partial \hat{B}_z(d)}{\partial z}. \quad (2.32)$$

Последнее равенство, впрочем, получено из решения краевой задачи (2.21), (2.22) при переносе начала координат с нижнего сердечника на верхний, что не изменяет сути, но позволяет описать распределение индукции на верхнем сердечнике более компактно.

В (2.21) величина  $Z_1(0)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} Z_1(0) = & \eta_1 \left[ \frac{\mu\eta_1}{\eta_2} \operatorname{sh}(\eta_1 d_1) \operatorname{sh}(\eta_2 d_2) \operatorname{sh}(\eta_1 d_3) + \right. \\ & + \operatorname{sh}(\eta_1 d_1) \operatorname{ch}(\eta_2 d_2) \operatorname{ch}(\eta_1 d_3) + \operatorname{ch}(\eta_1 d_1) \operatorname{ch}(\eta_2 d_2) \operatorname{sh}(\eta_1 d_3) + \\ & \left. + \frac{\eta_2}{\mu\eta_1} \operatorname{ch}(\eta_1 d_1) \operatorname{sh}(\eta_2 d_2) \operatorname{ch}(\eta_1 d_3) \right] \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{\mu\eta_1}{\eta_2} \operatorname{ch}(\eta_1 d_1) \operatorname{sh}(\eta_2 d_2) \operatorname{sh}(\eta_1 d_3) + \right. \\ & + \operatorname{ch}(\eta_1 d_1) \operatorname{ch}(\eta_2 d_2) \operatorname{ch}(\eta_1 d_3) + \\ & + \operatorname{sh}(\eta_1 d_1) \operatorname{ch}(\eta_2 d_2) \operatorname{sh}(\eta_1 d_3) + \\ & \left. + \frac{\eta_2}{\mu\eta_1} \operatorname{sh}(\eta_1 d_1) \operatorname{sh}(\eta_2 d_2) \operatorname{ch}(\eta_1 d_3) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Значение  $Z_1(d)$  также описывается этим же выражением, но величины  $d_1$  и  $d_3$ , 0 и  $d$  меняются местами.

Таким образом, для определения структуры магнитного поля в зазоре однофазного  $2p$  полюсного индуктора и распределения плотности тока в металлической полосе достаточно найти интегральные преобразования

нормальной производной индукции на поверхности индукторов (2.30) по заданной токовой нагрузке.

Токовую нагрузку однофазного индуктора с  $p$  парами полюсов представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 j_{Sy} = & \frac{I_m w}{b_n} \sum_{s=1}^p \left\{ \left[ \Theta(x + s\tau - t_w) - \Theta(x + s\tau - t_w - b_n) \right] - \right. \\
 & - \left[ \Theta(x + s\tau - t_w - b_n - t_z) - \Theta(x + s\tau - t_w - 2b_n - t_z) \right] - \\
 & - \left[ \Theta(x + s\tau - t_w - \tau) - \Theta(x + s\tau - t_w - \tau - b_n) \right] + \\
 & + \left. \left[ \Theta(x + s\tau - t_w - \tau - b_n - t_z) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \Theta(x + s\tau - t_w - \tau - t_z - 2b_n) \right] \right\} \times \\
 & \times \left\{ \frac{y + b/2 + b_n}{b_n} \left[ \Theta\left(y + \frac{b}{2} + b_n\right) - \Theta\left(y + \frac{b}{2}\right) \right] + \right. \\
 & + \Theta\left(y + \frac{b}{2}\right) - \Theta\left(y - \frac{b}{2}\right) - \\
 & \left. - \frac{y - b/2 - b_n}{b_n} \left[ \Theta\left(y - \frac{b}{2}\right) - \Theta\left(y - \frac{b}{2} - b_n\right) \right] \right\} e^{i\omega t}, \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

где  $t_w = \frac{\tau - t_z - 2b_n}{2}$ , в случае, если в пазу находятся две катушки обмотки  $t_w = 0$ ,  $I_m$  – амплитудное значение тока,  $w$  – количество элементарных проводников в пазу,  $p$  – число пар полюсов,  $\Theta(\cdot)$  – единичная обобщенная функция, равная единице при значениях аргумента больше нуля и равная нулю при значении аргумента меньше нуля.

Согласно (2.33) в пределах ширины сердечника  $j_{Sy}$  при заданных значениях переменной  $x$  является постоянной величиной. За пределами ширины сердечника  $j_{Sy}$  снижается по линейному закону до нуля в пределах промежутка  $b_n$ .

В результате применения двойного интегрального преобразования равенств (2.30) по координатам  $x$  и  $y$  согласно (2.23) с учетом представления  $j_{sx}$  составляющей

токовой нагрузки как  $j_{sx} = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^x j_{sy} dx$  найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{B}_z(0)}{\partial z} &= -\frac{\mu_0 \eta_1^2}{in} I_m w k_w = f(n, q, 0); \\ \frac{\partial \hat{B}_z(d)}{\partial z} &= \frac{\mu_0 \eta_1^2}{in} I_m w k_w = f(n, q, d), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где обмоточным коэффициентом  $k_w$  является

$$\begin{aligned} k_w &= 64 \sin(n\tau/2) \sin[n(t_z + b_n)/2] \times \\ &\times \frac{\sin(nb_n/2)}{nb_n} \frac{\sin(np\tau)}{\sin(n\tau)} \frac{\sin[q(b + b_n)/2]}{qa} \frac{\sin(qb_n/2)}{qb_n}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Таким образом, при известном токе и конструкции однофазного индуктора однозначно определяются постоянные интегрирования и  $\hat{B}_z$  составляющая индукции магнитного поля в зазоре и металлической полосе. В результате применения обратных преобразований распределение магнитной индукции на поверхности сердечников ( $z = 0, z = d$ ) принимает вид

$$B_z(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(n, q, z)}{Z_1(z)} e^{-inx} dn \right] \cos(qy). \quad (2.36)$$

В пределах металлической полосы ( $d_1 \leq z \leq (d_1 + d_2)$ )

магнитная индукция равна

$$B_{z2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}_{z2} e^{-inx} dn \cos(qy),$$

где

$$\hat{B}_{z_2} = f(n, q, 0) \left[ \operatorname{ch}(\eta_2(z - d_1)) \left( \frac{\operatorname{sh}(\eta_1 d_1)}{\eta_1} - \frac{\operatorname{ch}(\eta_1 d_1)}{Z_1(0)} \right) + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\operatorname{sh}(\eta_2(z - d_1))}{\eta_2} \left( \operatorname{ch}(\eta_1 d_1) - \frac{\eta_1 \operatorname{sh}(\eta_1 d_1)}{Z_1(0)} \right) \right]. \quad (2.37)$$

### 2.2.1.1. Энергетические характеристики и электромагнитные силы в многополюсном однофазном индукторе

Электромагнитную мощность однофазного индуктора при несимметричном расположении проводящей полосы в зазоре можно вычислить по потоку вектора Умова–Пойнтинга с поверхности каждого сердечника в направлении полосы:

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} (E_x^* H_y - E_y^* H_x) dx dy, \quad (2.38)$$

где  $E_x, E_y$  и  $H_x, H_y$  – комплексные амплитуды соответствующих составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей на поверхности сердечников. Знак «+» принимается при интегрировании по поверхности нижнего сердечника и знак «-» – при интегрировании по поверхности верхнего сердечника. Знак \* означает комплексно сопряженную величину. Интегрирование по переменной  $x$  в (2.38) ведется в бесконечных пределах, что связано с принятой моделью с бесконечно длинными магнитопроводами. Впрочем, поскольку электромагнитное поле индуктора определяется по финитной функции токовой нагрузки, интегрирование по переменной  $x$  в итоге выполняется в пределах

$-p\tau < x < p\tau$ , но для дальнейших преобразований в (2.38) сохранены бесконечные пределы интегрирования.

На поверхности сердечников, несущих токовую нагрузку, выполняются условия

$$H_x = -j_{Sy}, \quad H_y = j_{Sx} \quad \text{при } z = d,$$

$$H_x = j_{Sy}, \quad H_y = -j_{Sx} \quad \text{при } z = 0.$$

Подставляя значения напряженности магнитного поля на поверхности сердечника и учитывая, как и прежде, что

$$j_{Sx} = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^x j_{Sy} dx,$$

получим поток электромагнитной мощности с поверхности одного, например, нижнего сердечника

$$S_z = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_x \left( \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^x j_{Sy} dx \right) - E_y j_{Sx}^* \right\} dx dy. \quad (2.39)$$

Выполняя интегрирование (2.39) по частям, причем первое слагаемое интегрируя по переменной  $x$ , а второе – по  $y$  в классе ограниченных на бесконечности функций, получаем

$$S_z = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \int_{-\infty}^x j_{Sy} dx \right) \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right\} dx dy,$$

что с учетом уравнения  $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  и гармонического изменения компонентов электромагнитного поля и повторного интегрирования по частям по переменной  $x$  эквивалентно следующей записи:

$$S_z = -\frac{i\omega}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ j_{Sy} \int_{-\infty}^x B_z dx \right\} dx dy. \quad (2.40)$$

Значение  $B_z$  на поверхности сердечника в (2.40) является результатом обратного преобразования по (2.26) преобразованного значения индукции. Подставляя в (2.40) значение  $B_z$  по формуле (2.26), выполняя интегрирование по  $x$  экспоненциальной функции, содержащейся в выражении, освобождаемся от интеграла в фигурных скобках. Выполнив некоторые преобразования и перегруппировав множители, приходим к следующему выражению для вычисления потока мощности:

$$S_z = \frac{\omega a}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \hat{B}_z \left( \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\infty}^{\infty} j_{sy} e^{-inx} \cos(qy) dx dy \right) dn. \quad (2.41)$$

Выражение в круглых скобках (2.41) является двумерным интегральным преобразованием комплексно сопряженного значения токовой нагрузки по (2.33). Тогда, выполнив интегральное преобразование токовой нагрузки и подставив в (2.41) выражение для преобразованного значения индукции магнитного поля на поверхности сердечника по (2.31) с учетом (2.34), получим поток электромагнитной мощности с поверхности нижнего сердечника

$$S_z = \frac{\omega a}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(n, q, 0)}{nZ_1(0)} I_m^* w k_w dn.$$

Полная электромагнитная мощность индуктора равна сумме мощностей нижнего и верхнего индукторов

$$S_{zn} = \frac{\omega a}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{f(n, q, 0)}{nZ_1(0)} I_m^* w k_w - \frac{f(n, q, d)}{nZ_1(d)} I_m^* w k_w \right) dn. \quad (2.42)$$

Полную электромагнитную мощность индуктора можно также найти из соотношения

$$S_{zn} = \frac{1}{2} I_m I_m^* z_m, \quad (2.43)$$

где  $z_m$  – комплексное вносимое сопротивление последовательной схемы замещения индуктора, включающей, кроме  $z_m$ , собственное сопротивление обмотки индуктора  $z_1$ .

Приравнявая (2.22) и (2.21) с учетом (2.13), находим комплексное вносимое сопротивление последовательной схемы замещения

$$z_m = \frac{i\mu_0\omega aw^2}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^2 k_w^2}{n^2} \left( \frac{1}{Z_1(0)} + \frac{1}{Z_1(d)} \right) dn. \quad (2.44)$$

Собственное сопротивление обмотки индуктора определяется известными из теории электрических машин [15] методами. Общее электрическое сопротивление  $2p$  полюсного однофазного индуктора равно

$$z_u = z_1 + z_m. \quad (2.45)$$

Коэффициент мощности и термический коэффициент полезного действия однофазного многополюсного индуктора определяются соотношениями

$$\cos\phi = \operatorname{Re}(z_u)/|z_u|; \text{ КПД} = \operatorname{Re}(z_m)/\operatorname{Re}(z_u). \quad (2.46)$$

Нормальная электромагнитная сила, действующая на ферромагнитную полосу в однофазном многополюсном индукторе, вычисляется согласно (2.16), (2.17) и также может быть представлена через преобразованные значения индукции магнитного поля на поверхности индуктора:

$$F_{zp} = \frac{a}{16\pi\mu_0} \times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \hat{B}_z(z) \hat{B}_z^*(z) - \hat{B}_x(z) \hat{B}_x^*(z) - \hat{B}_y(z) \hat{B}_y^*(z) \right]_{z=d}^{z=0} dn. \quad (2.47)$$

С учетом представления  $\hat{B}_x$  и  $\hat{B}_y$  по (2.28), а  $\hat{B}_z$  по (2.31), (2.32), (2.34) и (2.35) на соответствующих поверхностях индуктора нормальная электромагнитная сила, действующая на ферромагнитную полосу, равна

$$F_{zp} = -\frac{a\mu_0 w^2 I_m I_m^*}{16\pi} \times \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_1^4}{n^2} k_w^2 \left[ \frac{1}{Z_1(d)Z_1^*(d)} - \frac{1}{Z_1(0)Z_1^*(0)} \right] dn. \quad (2.48)$$

Из (2.48) видно, что при идентичном исполнении верхнего и нижнего индукторов и симметричном положении полосы в индукторе (равенство  $Z_1(d)$  и  $Z_1(0)$ ) результирующая электромагнитная сила равна нулю. При смещении ферромагнитной полосы от оси симметрии индуктора появляется нормальная электромагнитная сила, которая зависит от величины токовой нагрузки, электрофизических свойств полосы и конструктивного исполнения индуктора.

Для учета нелинейности магнитной проницаемости полосы из ферромагнитного материала, следуя Л.Р. Нейману [16], примем, что магнитная проницаемость определяется по величине амплитудного значения первой гармоники напряженности магнитного поля на поверхности полосы. Положим затухание магнитного поля в воздушном зазоре незначительным. Тогда раскладывая токовую нагрузку индуктора в гармонический ряд и выделяя первую гармонику, получаем величину первой гармоники касательной составляющей напряженности магнитного поля на поверхности ферромагнитной полосы для оценки значения магнитной проницаемости.



Амплитуда первой гармоники  $H_x$  составляющей напряженности магнитного поля на поверхности индуктора в пределах одного полюса вычисляется интегралом

$$H_x = \frac{I_m w}{b_n} \frac{2}{\tau} \int_0^\tau [\Theta(x) - \Theta(x - b_n) - \Theta(x - \tau + b_n) + \Theta(x - \tau)] \cos(\alpha x) dx, \quad (2.49)$$

где  $\alpha = \pi/\tau$ .

Вычисляя интеграл (2.49), определяем искомую величину напряженности магнитного поля на поверхности полосы

$$H_x = \frac{4}{\pi} \frac{I_m w}{b_n} \sin(\alpha b_n). \quad (2.50)$$

Величину магнитной проницаемости находим в соответствии с рекомендациями [16] для усредненной конструкционной стали

$$\mu = 0,625 |H_x|^{-0,894}. \quad (2.51)$$

Для различных марок стали в зависимости от содержания в ней углерода могут быть также приняты другие аппроксимации магнитной проницаемости в зависимости от напряженности магнитного поля [17, 18].

Расчеты электромагнитной силы, выполненные в соответствии с (2.48), с учетом нелинейной зависимости магнитной проницаемости ферромагнитной полосы показывают, что в однофазных многополюсных индукторах при питании от источника средней частоты (400 – 1000 Гц) существуют режимы, при которых в случае смещения полосы от оси симметрии индуктора возникают силы, центрирующие ленту на оси симметрии. На рис. 2.2 представлены графики изменения величины нормальной электромагнитной силы в зависимости от величины напряжения питания двухполюсного индуктора при

смещении полосы от оси симметрии на 5 мм для нескольких частот тока.

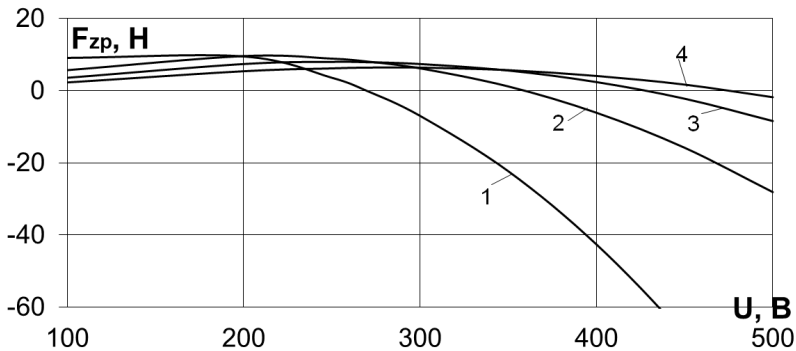


Рис. 2.2. График нормальной электромагнитной силы при изменении величины питающего напряжения индуктора: 1 – частота тока 400 Гц, 2 – 600 Гц, 3 – 800 Гц, 4 – 1000 Гц

Двухполюсный индуктор выполнен с полюсным делением, равным 240 мм, шириной сердечника 220 мм и воздушным зазором 30 мм. В сердечнике выполнены пазы. Два паза шириной 36 мм для размещения одной стороны катушек на концах индуктора и один паз шириной 72 мм в центральной части индуктора. В пазах нижнего и верхнего индукторов, таким образом размещаются четыре идентичные катушки, соединенные электрически последовательно. Каждая катушка имеет по пять витков из полой медной трубки 14X16 мм и толщиной стенки 2 мм. Лобовые части катушек распределены за пределами сердечника на промежутке  $b_n = 32$  мм.

В зазоре индуктора в направлении оси  $Ox$  со скоростью  $v = 0,2$  м/с движется ферромагнитная лента шириной 300 мм и толщиной 1 мм. Электрофизические параметры ферромагнитной полосы соответствуют

усредненным для углеродистых сталей значениям электропроводности ( $\sigma = 3 \cdot 10^6 \text{ 1/}(\text{Ом} \cdot \text{м})$ ) и магнитной проницаемости по (2.51). Графики на рис. 2.2 представлены для частот питающего тока 400 Гц – кривая 1, 600 Гц – кривая 2, 800 Гц – кривая 3 и 1000 Гц – кривая 4. Положительное значение электромагнитной силы обозначает, что на ленту, смещенную от оси симметрии индуктора к нижнему сердечнику на 5 мм, действует сила, стремящаяся восстановить симметричное положение ленты. В таком случае случайное смещение ленты от оси симметрии, произошедшее, например, из-за нестабильности работы лентопротяжного механизма, очевидно, не приведет к прилипанию ленты к сердечнику. С другой стороны, отрицательное значение электромагнитной силы вызовет дальнейшее смещение ленты к нижнему сердечнику. Причем увеличение смещения ленты от оси симметрии в этом случае приводит к увеличению электромагнитной силы, стремящейся прижать ленту к сердечнику и невозможности проведения ее термообработки. Из графиков на рис. 2.2 следует, что направление электромагнитной силы определяется величиной питающего напряжения, которое в свою очередь определяет токовую нагрузку индуктора, мощность и в конечном итоге величину магнитной проницаемости ферромагнитной ленты. Следовательно, из-за ограничений эксплуатационного характера при проектировании однофазных индукторов для нагрева ферромагнитных лент нельзя следовать требованию получения максимальной габаритной мощности. Нагревательная мощность индуктора должна ограничиваться требованием бездефектного нагрева ферромагнитной полосы. Для индуктора, соответствующего примеру на рис. 2.2, приведен график изменения максимально допустимой мощности в зависимости от частоты тока (рис. 2.3). Разумеется, представленный на рис. 2.3 график отвечает лишь одному рассматриваемому случаю нагрева

ленты толщиной 1 мм. В то же время по тенденции изменения мощности можно судить о нецелесообразности дальнейшего увеличения частоты тока, ввиду незначительного увеличения максимальной нагревательной мощности. Впрочем, повышение частоты тока ввиду использования ферромагнитного сердечника также ограничено потерями на вихревые токи и перемагничивание.

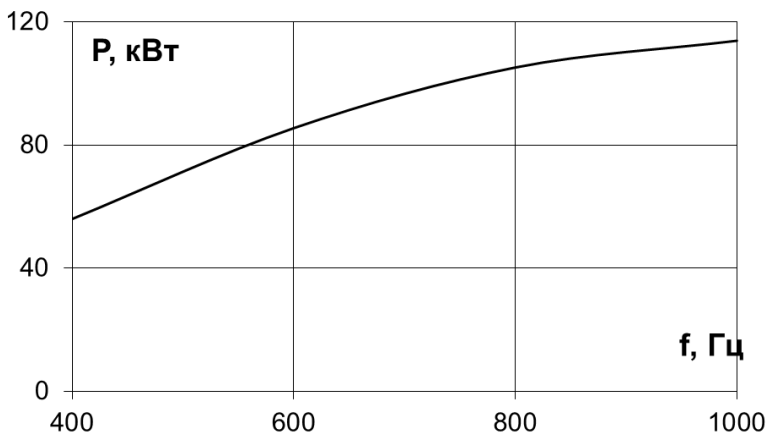


Рис. 2.3. Максимальная нагревательная мощность индуктора

Полученные результаты, касающиеся возможности нагрева ферромагнитных лент в индукторах поперечного магнитного поля, подтверждаются численным моделированием индукционного нагрева ферромагнитных лент, выполненного в работах [19, 20].

### 2.2.1.2. Индукционный нагрев лент в однофазном индукторе

Токи, индуцированные в полосе при условии постоянства магнитной проницаемости, можно определить

из уравнения  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{j}$ . Для принятой модели чередующихся индукторов в полосе индуцируются только  $j_x$  и  $j_y$  составляющие плотности тока, а  $j_z$  составляющая равна нулю [14]. Плотность индуцированных токов в металлической полосе равна

$$j_x = \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right), \quad j_y = \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right). \quad (2.52)$$

Подставляя в (2.52) значения  $B_x, B_y, B_z$  по (2.24), получаем представление индуцированных токов в полосе через преобразованные значения индукции. С учетом зависимостей (2.28), уравнения (2.22) и значений  $\eta_1, \eta_2$  найдем функциональное описание пространственного распределения плотности тока в полосе через преобразованное значение  $\hat{B}_{z2}$  составляющей индукции магнитного поля

$$j_x = \frac{i\sigma}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} q \sin(qy) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - nv}{\eta_1^2} \hat{B}_{z2} e^{-inx} dn;$$

$$j_y = \frac{\sigma}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(qy) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - nv}{\eta_1^2} n \hat{B}_{z2} e^{-inx} dn. \quad (2.53)$$

Здесь  $\hat{B}_{z2}$  определяется равенством (2.37).

Локальное распределение источников теплоты в полосе определяется зависимостью

$$P_W = \left( j_x^* j_x + j_y^* j_y \right) / 2\sigma. \quad (2.54)$$

Распределение температурного поля по длине и ширине движущейся полосы определим из решения двумерного уравнения теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + W - \rho c v \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.55)$$

с начальными и граничными условиями

$$T = T_n, \quad x = -3\tau/2;$$

$$\partial T / \partial x = 0, \quad x = 3\tau/2;$$

$$\partial T / \partial y = 0, \quad y = 0; \quad (2.56)$$

$$\lambda \partial T / \partial y = q_a, \quad y = a/2,$$

где  $\rho$ ,  $c(T)$ ,  $\lambda(T)$  – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала полосы,  $q_a$  – удельный тепловой поток с боковой границей полосы,  $T_n$  – начальная температура полосы,  $W(x, y)$  – осредненное по высоте полосы распределение источников тепла

$$W = \frac{1}{d_2} \int_{d_1}^{d_1+d_2} P_w dz. \quad (2.57)$$

Для учета потерь тепла с поверхности полосы в  $W$  могут быть включены отрицательные источники тепла, обусловленные конвекцией и излучением.

Численная реализация уравнения теплопроводности (2.55) с граничными и начальными условиями (2.26) подробно описана в [21, 22].

В качестве примера рассмотрим нагрев ферромагнитной ленты толщиной 1 мм и шириной 300 мм в двухполюсном индукторе, описанном в подразделе 2.2.1.

На рис. 2.4 представлена структура распределения источников тепла в ленте при частоте тока 400 Гц и напряжении питания 270 В, что гарантированно обеспечивает центрирование ленты в зазоре под действием электромагнитных сил.

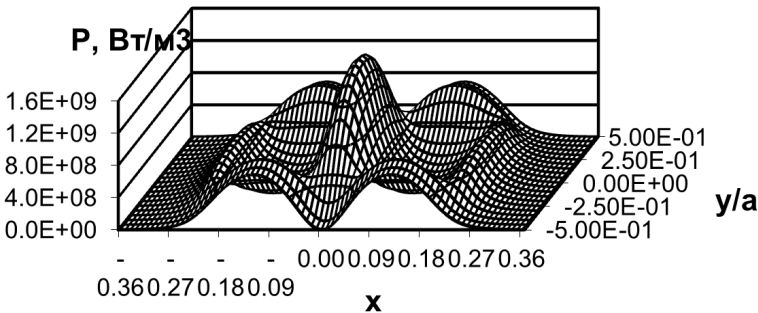


Рис. 2.4. Структура распределения источников теплоты в ленте двухполюсного индуктора

В отличие от трехфазных индукторов структура источников теплоты в ленте определяется вихрями тока, замыкающимися вокруг каждого полюса. Значительное увеличение плотности тепловыделений в зоне межполюсного пространства обусловлено суммарным воздействием токов катушек соседних полюсов, совпадающих по фазе, в связи с квадратичной зависимостью плотности тепловыделений от плотности токов в полосе.

На рис. 2.5 представлено распределение температуры по полуширине полосы на выходе из зоны нагрева для двух значений частот тока (кривая 1 при частоте тока 400 Гц, кривая 2 – 500 Гц).

Приведенные распределения температуры получены при наложении ограничивающего условия обеспечения гарантированных центрирующих усилий, которые в зависимости от частоты обеспечиваются при разных значениях напряжения питания. Так как с уменьшением частоты (рис. 2.3) максимальная нагревательная мощность падает, то при частоте тока 400 Гц средняя температура полосы (кривая 1) оказалась ниже, чем при частоте 500 Гц (кривая 2). Относительная неравномерность температуры по ширине составляет 20% при частоте 400 Гц и 21% при

частоте 500 Гц. Для получения приемлемого значения неравномерности распределения температуры по ширине необходимо проводить оптимизацию конструктивных размеров индуктора (ширина сердечника, длина полюсного деления, ширина паза, величина зазора) и режимных характеристик (частота тока, напряжение питания). Разработанная выше методика расчета позволяет выполнить такую оптимизацию с учетом ограничивающего фактора максимальной нагревательной мощности, при которой обеспечивается центрирование полосы и исключается одностороннее притяжение ферромагнитной полосы. Так, например, уменьшение длины полюсного деления с 240 до 230 мм при частоте тока 400 Гц и соответствующем выборе напряжения питания, при котором полоса центрируется, позволяет при прочих неизменных конструктивных размерах индуктора довести неравномерность распределения температуры по ширине до 17 %.

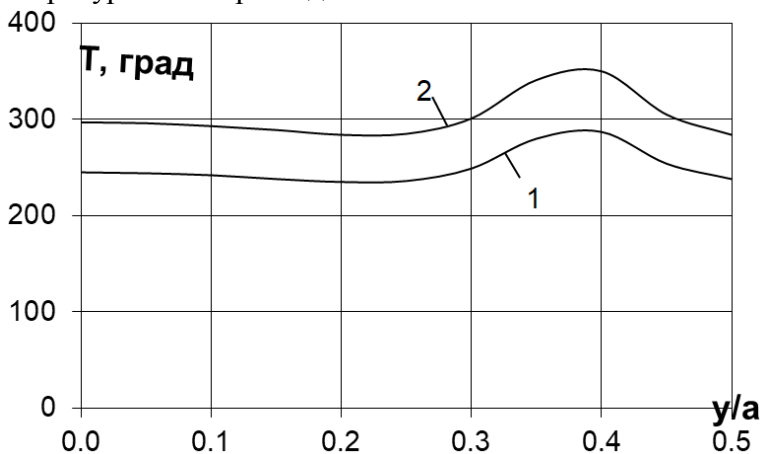


Рис. 2.5. Распределение температуры по ширине полосы

В целом однофазные индукторы с точки зрения обеспечения равномерного нагрева полосы по ширине



оказываются менее эффективными по сравнению с трехфазными. Многочисленные эксперименты, выполненные на основе разработанной выше методики, позволяют заключить, что минимальная неоднородность нагрева для однофазных индукторов ограничивается 15%. Аналогичный результат получен в [11] при численном моделировании индукционного нагрева драгоценных металлов в однофазных индукторах.

Отмеченный недостаток однофазных индукторов с ферромагнитным сердечником в отношении равномерности нагрева, впрочем, компенсируется выявленным неоспоримым достоинством, позволяющим при правильном выборе режимных параметров индуктора осуществить индукционный нагрев ферромагнитных лент без повреждения поверхности. При этом в полной мере используются преимущества индукционного нагрева лент в поперечном магнитном поле, а именно достижение больших по сравнению с нагревом в продольном магнитном поле коэффициентов мощности и полезного действия.

### **2.2.2. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами**

Наиболее простым и дешевым среди индукторов поперечного магнитного поля является индуктор без сердечника, выполненный в виде катушечной рамки и питающийся от источника тока повышенной частоты. Проблемы, связанные с односторонним притяжением ферромагнитной ленты, ввиду отсутствия ферромагнитного сердечника, здесь не возникают. Вместе с тем такой тип индукторов является наиболее гибкой конструкцией в части изменения геометрических форм, размеров, числа витков и т.д., т.е. тех характеристик, от которых, в конечном счете, зависит равномерность нагрева. Отсутствие дополнительных потерь в стали магнитопроводов позволяет провести

оптимизацию энергетических параметров индукционных систем по частоте.

Математические модели для расчета энергетических характеристик индукционных нагревателей ленты токовыми контурами изложены в [2, 23]. Однако в модели, описанной в [2], не учитывается конечная ширина полосы. В [23] решение электротепловой задачи дается уже в двумерной постановке, но лишь для одной канонической формы токового контура – прямоугольника, при которой не удается добиться равномерного распределения температуры по ширине полосы. Поэтому следует признать, что задача об индукционном нагреве полосы токовым контуром не исчерпана и требует дальнейшего исследования.

### 2.2.2.1. Электромагнитные и температурные поля при термообработке движущейся полосы токовыми контурами канонических форм

Рассмотрим электромагнитные процессы, протекающие при индукционном нагреве полосы толщиной  $s$  и шириной  $d$  токовым контуром произвольной осесимметричной формы, расположенным в плоскости, параллельной плоскости полосы и отстоящей от последней на  $h$ . Полоса движется в направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ . Начало прямоугольной системы координат поместим в центре токового контура так, что продольная ось симметрии полосы совпадает с проекцией продольной оси симметрии контура на полосу.

Токовая нагрузка рамки

$$\mathbf{j}_s = I_m w \mathbf{F}(x, y) e^{i\omega t} \quad (2.58)$$

имеет составляющие  $j_{sy}$  и  $j_{sx}$ , причем  $\operatorname{div} \mathbf{j}_s = 0$ . В (2.58) обозначено  $\mathbf{F}(x, y)$  – функция, описывающая пространственное распределение тока контура,  $I_m$  –

амплитудное значение тока в витке,  $w$  – число витков в контуре,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота тока,  $i = \sqrt{-1}$ .

Согласно уравнениям Максвелла для синусоидально изменяющегося во времени электромагнитного поля и с учетом движения проводящей полосы в магнитном поле комплексная амплитуда магнитной индукции в проводящей среде описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} = \mu\gamma \left( i\omega \mathbf{B} + v \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right), \quad (2.59)$$

где  $\mathbf{B} = \vec{i}B_{xm} + \vec{j}B_{ym} + \vec{k}B_{zm}$ ,  $\mu$  и  $\gamma$  – относительная магнитная проницаемость и удельная электропроводность материала полосы, принятые постоянными. Магнитная индукция в пространстве, не занятом проводящей средой, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \mathbf{B} = 0. \quad (2.60)$$

Найдем решение уравнений (2.59) и (2.60) в предположении пространственно-периодического изменения токовой нагрузки. Пусть

$$j_{sy}(x) = -j_{sy}(x + \tau) \quad \text{и} \quad j_{sy}(x) = -j_{sy}(x + d), \quad (2.61)$$

$$j_{sx}(x) = -j_{sx}(x + \tau) \quad \text{и} \quad j_{sx}(y) = -j_{sx}(y + d). \quad (2.62)$$

В таком случае составляющие электромагнитного поля также будут иметь пространственную периодичность, и исследование поля во всей системе сводится к его расчету в одном выделенном периодическом элементе шириной, равной действительной ширине полосы  $d$ . Фактически достаточно найти поле в одной области:

$$-\frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}.$$

Если величина  $d$  – ширина полосы задана, то значение  $\tau$ , очевидно, нужно выбирать из соображения слабого влияния соседних токовых контуров. Обычно для исключения влияния соседнего контура достаточно выбрать  $\tau = (3 \div 4)b$ , где  $b$  – максимальный размер токового контура вдоль продольной оси  $Ox$ .

Токовая нагрузка и составляющие электромагнитного поля в рассматриваемой модели имеют нечетную пространственную периодичность, т.е.

$$B(x) = -B(x + \tau); \quad B(y) = -B(y + d), \quad (2.63)$$

при которой естественным образом удовлетворяется условие равенства нулю нормальной  $j_y$ -составляющей плотности тока при  $y = \pm d/2$ , что соответствует реальным условиям на боковых кромках полосы.

В таком случае, применив к уравнениям (2.59) и (2.60) двухстороннее преобразование Лапласа по координатам  $x, y$  [24] для  $B_z$  составляющей индукции магнитного поля, получим

$$\frac{d^2 \hat{B}_{zm}}{dz^2} - \eta_2^2 \hat{B}_{zm} = 0, \quad -(h+s) \leq z \leq -h; \quad (2.64)$$

$$\frac{d^2 \hat{B}_{zm}}{dz^2} - \eta_1^2 \hat{B}_{zm} = 0, \quad -(h+s) \geq z \geq -h, \quad (2.65)$$

где

$$\hat{B}_{zm}(p, q, z) = \frac{1}{1 + e^{-p\tau}} \frac{1}{1 + e^{-qd}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-d/2}^{d/2} B_{zm}(x, y, z) e^{-px - qy} dx dy, \quad (2.66)$$

$$\eta_1^2 = -p^2 - q^2; \quad \eta_2^2 = -p^2 - q^2 + i\mu\mu_0\gamma\omega + \mu_0\gamma p v.$$

С учетом ограниченности индукции магнитного поля на бесконечности решения уравнений (5.43) и (5.44) для выделенных областей пространства имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{B}_{zm1} &= C_1 e^{-\eta_1 z}, & z \geq 0; \\ \hat{B}_{zm2} &= C_2 e^{\eta_1 z} + C_3 e^{-\eta_1 z}, & -h \leq z \leq 0; \\ \hat{B}_{zm3} &= C_4 e^{\eta_2 z} + C_5 e^{-\eta_2 z}, & -h \leq z \leq -(h+s); \\ \hat{B}_{zm4} &= C_6 e^{\eta_1 z}, & z \leq -(h+s).\end{aligned}\tag{2.67}$$

Сопряжение решений (2.67) на границах раздела осуществляется исходя из обычных представлений о непрерывности нормальной составляющей индукции и равенства тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля. При  $z = -h$  и  $z = -(h+s)$  имеем

$$H_{x3} = H_{x4} \text{ и } H_{y3} = H_{y4} \text{ при } z = -(h+s),\tag{2.68}$$

$$H_{x2} = H_{x3} \text{ и } H_{y2} = H_{y3} \text{ при } z = -h,$$

а при  $z = 0$  имеет место скачок тангенциальных составляющих поля, равный токовой нагрузке контура

$$H_{x1} - H_{x2} = j_{Sy}; \quad H_{y1} - H_{y2} = -j_{Sx}.\tag{2.69}$$

Учитывая, что условие  $\operatorname{div} \mathbf{j}_S = 0$  выполняется с обеих сторон плоскости  $z = 0$ , имеем

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial z} = -\frac{\partial B_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial B_{y1}}{\partial y},\tag{2.70}$$

$$\frac{\partial B_{z2}}{\partial z} = -\frac{\partial B_{x2}}{\partial x} - \frac{\partial B_{y2}}{\partial y}.\tag{2.71}$$

Вычитая почленно (2.71) из (2.70) и подставляя значения напряженности магнитного поля из (2.69) с учетом

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , получаем граничное условие для  $B_z$  составляющей индукции магнитного поля при  $z = 0$ :

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial z} - \frac{\partial B_{z2}}{\partial z} = -\mu_0 \left( \frac{\partial j_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial j_{sx}}{\partial y} \right). \quad (2.72)$$

Подставляя в (2.72) значения  $j_{sx}$  и  $j_{sy}$  по (2.58) и выполняя двухстороннее преобразование Лапласа в соответствии с формулой (2.66) для периодической функции, получаем следующее уравнение для определения постоянных интегрирования в (2.67):

$$\frac{\partial \hat{B}_{z1}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{B}_{z2}}{\partial z} = \frac{I_m w \hat{F}}{(1 + e^{-p\tau})(1 + e^{-qd})}, \quad (2.73)$$

где

$$\hat{F} = -\mu_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{\partial j_{sy}}{\partial x} - \frac{\partial j_{sx}}{\partial y} \right) e^{-px-xy} dx dy. \quad (2.74)$$

Аналогично граничному условию при  $z = 0$ , записывая уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  с обеих сторон границ  $z = -h$  и  $z = -(h+s)$  с учетом равенств (2.68) и выполняя преобразования Лапласа по (2.66), получаем еще два граничных условия:

$$\frac{\partial \hat{B}_{z2}}{\partial z} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{B}_{z3}}{\partial z} = 0; \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{B}_{z3}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{B}_{z4}}{\partial z} = 0. \quad (2.76)$$

С учетом условий (2.73), (2.75), (2.76) и равенства нормальных составляющих индукции магнитного поля имеем шесть уравнений для однозначного определения шести неизвестных постоянных  $C_1 - C_6$  в (2.67).

Для нахождения  $B_x$  и  $B_y$  составляющих в областях, не занятых проводящей средой, воспользуемся следующими соображениями: при  $-(h-s) \geq z \geq -h$   $j_z = \text{rot}_z \mathbf{H} = 0$ , откуда

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0. \quad (2.77)$$

Кроме того, в этих областях выполняется условие  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , откуда имеем

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (2.78)$$

Выполняя преобразования Лапласа в соответствии с (2.66) для уравнений (2.77) и (2.78), получаем соответственно

$$p\hat{B}_y - q\hat{B}_x = 0; \quad (2.79)$$

$$p\hat{B}_x + q\hat{B}_y = -\frac{d\hat{B}_z}{dz}. \quad (2.80)$$

Решив систему уравнений (2.79), (2.80) относительно  $\hat{B}_x$  и  $\hat{B}_y$ , получим равенства

$$\hat{B}_x = \frac{p}{\eta_1^2} \frac{d\hat{B}_z}{dz}, \quad \hat{B}_y = \frac{q}{\eta_1^2} \frac{d\hat{B}_z}{dz}. \quad (2.81)$$

В области занятой проводящей средой также выполняется условие  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , откуда получаем условие

$$p\hat{B}_{x3} + q\hat{B}_{y3} = -\frac{d\hat{B}_{z3}}{dz}, \quad (2.82)$$

а на верхней и нижней границе проводящей области имеем  $j_z = 0$ , что дает в преобразованном виде два условия:

$$p\hat{B}_{y3} - q\hat{B}_{x3} = 0, \quad \text{при } z = -h; \quad (2.83)$$

$$p\hat{B}_{y3} - q\hat{B}_{x3} = 0, \quad \text{при } z = -(h+s). \quad (2.84)$$

Тогда преобразованные значения  $B_x$  и  $B_y$  составляющих индукции магнитного поля на границах проводящей области вычисляются по формулам

$$\hat{B}_{x3} = \frac{p}{\eta_1^2} \frac{d\hat{B}_{z3}}{dz} \quad \text{и} \quad \hat{B}_{y3} = \frac{q}{\eta_1^2} \frac{d\hat{B}_{z3}}{dz} \quad \text{при} \quad z = -h; \quad (2.85)$$

$$\hat{B}_{x3} = \frac{p}{\eta_1^2} \frac{d\hat{B}_{z3}}{dz} \quad \text{и} \quad \hat{B}_{y3} = \frac{q}{\eta_1^2} \frac{d\hat{B}_{z3}}{dz} \quad \text{при} \quad z = -(h+s). \quad (2.86)$$

Принимая, что  $\hat{B}_x$  и  $\hat{B}_y$  в проводящей среде описываются выражениями типа

$$\hat{B}_{xm3} = K_1 e^{\eta_2 z} + K_2 e^{-\eta_2 z}; \quad (2.87)$$

$$\hat{B}_{ym3} = K_3 e^{\eta_2 z} + K_4 e^{-\eta_2 z} \quad (2.88)$$

и подставляя (2.87) и (2.88) в (2.83), (2.84), получаем четыре уравнения для определения постоянных  $K_1 \dots K_4$ .

В результате вычисления постоянных интегрирования определяются, следовательно, составляющие индукции магнитного поля для преобразованных значений в металлической полосе. Они имеют следующий вид:

$$\hat{B}_{xm3} = \frac{1}{2} \frac{I_m w \hat{F}}{(1 + e^{-p\tau})(1 + e^{-qd})} \eta_2 D \frac{p}{\eta_1^2} [e^{\eta_2 z} - L e^{-2\eta_2(h+s) - \eta_2 z}];$$

$$\hat{B}_{ym3} = \frac{1}{2} \frac{I_m w \hat{F}}{(1 + e^{-p\tau})(1 + e^{-qd})} \eta_2 D \frac{q}{\eta_1^2} [e^{\eta_2 z} - L e^{-2\eta_2(h+s) - \eta_2 z}]; \quad (2.89)$$

$$\hat{B}_{zm3} = \frac{1}{2} \frac{I_m w \hat{F}}{(1 + e^{-p\tau})(1 + e^{-qd})} D [L e^{-2\eta_2(h+s) - \eta_2 z} + e^{\eta_2 z}],$$

где



$$D = \frac{1}{\eta_1} \frac{(L-1)e^{-h(\eta_2-\eta_1)}}{1-L^2 e^{-2\eta_2 s}}; \quad L = \frac{\eta_2 - \eta_3}{\eta_2 + \eta_3}; \quad \eta_3 = \eta_1 \mu.$$

Находим оригиналы выражений (2.89), используя теорему разложения [25] мероморфных функций, имеющих бесконечное число простых полюсов, определяемых только нулями функций  $(e^{-p\tau} + 1)$  и  $(e^{-qd} + 1)$ , поскольку остальные сомножители в (2.89) являются аналитическими функциями. Тогда

$$p_k = (2k-1)\pi i/\tau, \quad k = -\infty, \dots, +\infty; \quad q_n = (2n-1)\pi i/d, \\ n = 1, \dots, +\infty, \quad (2.90)$$

а окончательные выражения для комплексных амплитуд составляющих магнитной индукции в проводящей среде принимают следующий вид:

$$B_{xm3} = \frac{I_m W}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn} D_{kn} \eta_{2kn} \times \\ \times \frac{p_k}{\eta_{1kn}^2} \left( e^{\eta_{2kn} z} - L_{kn} e^{-2\eta_{2kn}(h+s) - \eta_{2kn} z} \right) e^{p_k x} \operatorname{ch}(q_n y); \\ B_{ym3} = \frac{I_m W}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn} D_{kn} \eta_{2kn} \times \\ \times \frac{q_n}{\eta_{1kn}^2} \left( e^{\eta_{2kn} z} - L_{kn} e^{-2\eta_{2kn}(h+s) - \eta_{2kn} z} \right) e^{p_k x} \operatorname{sh}(q_n y); \\ B_{zm3} = \frac{I_m W}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn} D_{kn} \left( e^{\eta_{2kn} z} + L_{kn} e^{-2\eta_{2kn}(h+s) - \eta_{2kn} z} \right) e^{p_k x} \operatorname{ch}(q_n y),$$

где  $F_{kn}$ ,  $\eta_{1kn}$ ,  $\eta_{2kn}$ ,  $D_{kn}$  определяются по ранее приведенным формулам с учетом (2.90).

Аналогично находим составляющие индукции магнитного поля в областях, не занятых проводящей средой. Здесь приведем лишь окончательное выражение для  $B_{z1}$ :

$$B_{zm1} = \frac{I_m w}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{kn}}{\eta_1} (M_{kn} - 1) e^{-\eta_{1kn} z} e^{p_k x} \operatorname{ch}(q_n y), \quad (2.92)$$

где

$$M_{kn} = \frac{L_{kn} e^{-2\eta_{1kn} h} (1 - e^{-2\eta_{2kn} s})}{1 - L_{kn}^2 e^{-2\eta_{2kn} s}} .$$

Интегрируя индукцию магнитного поля по площади токового контура при  $z = 0$ , определяем пронизывающий его магнитный поток

$$\Phi_m = \int_S B_{zm1} \Big|_{z=0} dx dy \quad (2.93)$$

и наводимую в нем электродвижущую силу

$$E_m = -i\omega w \Phi_m . \quad (2.94)$$

При расчете магнитного потока по (2.93) использовано выражение для индукции магнитного поля над контуром. Поскольку контур с током принят в виде токового слоя и при  $z = 0$  соблюдается равенство нормальных составляющих индукции магнитного поля, то результаты вычисления наведенной электродвижущей силы в контуре, в рамках принятой модели, по величине магнитной индукции под контуром и над контуром совпадают.

Представим индукционную систему, состоящую из токового контура и проводящей полосы в виде последовательной электрической схемы замещения [26, 3]. Выражение для вносимого комплексного сопротивления токового контура, которое учитывает собственную индуктивность контура и влияние вторичной среды [3], получим из соотношения

$$z_m = -E_m / I_m . \quad (2.95)$$

В случае электропитания контура от источника напряжения  $U_m$  по найденному значению вносимого комплексного сопротивления легко определить ток контура

$$I_m = \frac{U_m}{z_m + r_a}$$

и полную электромагнитную мощность

$$S = \frac{1}{2} U_m^* I_m. \quad (2.96)$$

Реальная часть вносимого комплексного сопротивления характеризует активную мощность, передаваемую токовым контуром проводящей среде, которая выделяется в ней в виде тепла. Коэффициент полезного действия преобразования электромагнитной мощности в тепловую будет

$$КПД = \frac{\operatorname{Re}(z_m)}{\operatorname{Re}(z_m) + r_a}, \quad (2.97)$$

где  $r_a$  – собственное активное сопротивление токового контура.

Коэффициент мощности электромагнитной системы соответственно можно вычислить как

$$\cos \phi = \frac{\operatorname{Re}(z_m) + r_a}{|z_m + r_a|}. \quad (2.98)$$

Следует отметить, что определенное таким образом вносимое комплексное сопротивление не учитывает рассеивание магнитного потока за счет конечной высоты реальной токовой рамки. Погрешность расчета будет определена ниже. Здесь же заметим, что погрешность будет тем меньше, чем плотнее расположены массивные (как правило, водоохлаждаемые) витки.

Полученное решение для индукции магнитного поля позволяет определить составляющие плотности тока в полосе. Согласно  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$

$$j_{xm} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \left( \frac{\partial B_{zm3}}{\partial y} - \frac{\partial B_{ym3}}{\partial z} \right);$$

$$j_{ym} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \left( \frac{\partial B_{xm3}}{\partial z} - \frac{\partial B_{zm3}}{\partial x} \right).$$

Выполняя дифференцирование, получаем

$$j_{xm} = \frac{I_m w}{\mu_0 \mu \tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn} q_n D_{kn} \left( 1 - \frac{\eta_{2kn}^2}{\eta_{1kn}^2} \right) \times \left( e^{\eta_{2kn} z} + L_{kn} e^{-2\eta_{2kn}(h+s) - \eta_{2kn} z} \right) e^{p_k x} \text{sh } q_n y; \quad (2.99)$$

$$j_{ym} = \frac{I_m w}{\mu_0 \mu \tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{kn} p_k D_{kn} \times \left( \frac{\eta_{2kn}^2}{\eta_{1kn}^2} - 1 \right) \left( e^{\eta_{2kn} z} + L_{kn} e^{-2\eta_{2kn}(h+s) - \eta_{2kn} z} \right) e^{p_k x} \text{ch } q_n y. \quad (2.100)$$

Распределение температуры в полосе найдем из решения уравнения теплопроводности с внутренними источниками тепла. Принимая размер полосы по координате  $z$  теплотехнически тонким слоем, достаточно ограничиться решением двумерного уравнения теплопроводности

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + P_w - c_v v \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.101)$$

с граничными условиями

$$T = T_H, \quad x = -\frac{\tau}{2}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = \frac{\tau}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y = 0; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = \pm \frac{d}{2}, \quad (2.102)$$

где  $c_v$  и  $\lambda$  – удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала полосы;  $T_H$  – начальная температура полосы;

$$P_W = \frac{1}{2\sigma} \left( j_{xm}^* j_{xm} + j_{ym}^* j_{ym} \right) \quad (2.103)$$

– объемная плотность источников теплоты на поверхности полосы, значком «\*» отмечены комплексно-сопряженные величины.

Численный метод решения уравнения (2.101) с граничными и начальными условиями (2.102) приведен в [21, 22].

Анализ полученных выражений для компонентов электромагнитного поля при взаимодействии токового контура с проводящей полосой свидетельствует об определяющем влиянии пространственного распределения тока контура.

### **Токовый контур прямоугольной формы [27].**

Амплитуду  $j_{Sy}$  составляющей токовой нагрузки контура прямоугольной формы (рис. 2.6) со сторонами параллельными краям полосы зададим следующей функцией:

$$j_{Smy} = I_m w [\delta(x + b/2) - \delta(x - b/2)] \times \\ \times [\Theta(y + a/2) - \Theta(y - a/2)], \quad (2.104)$$

где  $\delta(\dots)$  – дельта функция Дирака,  $\Theta(\dots)$  – единичная обобщенная функция.

## Глава 2

Учитывая, что согласно уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{j}_s = 0$   
 $j_{Sxm} = -\int (\partial j_{Sym} / \partial y) dx$ , интегральное преобразование  
 пространственного распределения тока прямоугольного  
 контура по (2.74) равно

$$F_{kn} = 4\mu_0 \frac{\eta_1^2}{p_k q_n} \operatorname{sh}(p_k b/2) \operatorname{sh}(q_n a/2). \quad (2.105)$$

Согласно (2.95) с использованием (2.92) для  
 прямоугольного токового контура вносимое комплексное  
 сопротивление последовательной электрической схемы  
 замещения определяется выражением

$$z_m = \frac{8i\omega w^2}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{kn}}{p_k q_n \eta_{1kn}} \times \quad (2.106)$$

$$\times (M_{kn} - 1) \operatorname{sh}(p_k b/2) \operatorname{sh}(q_n a/2).$$

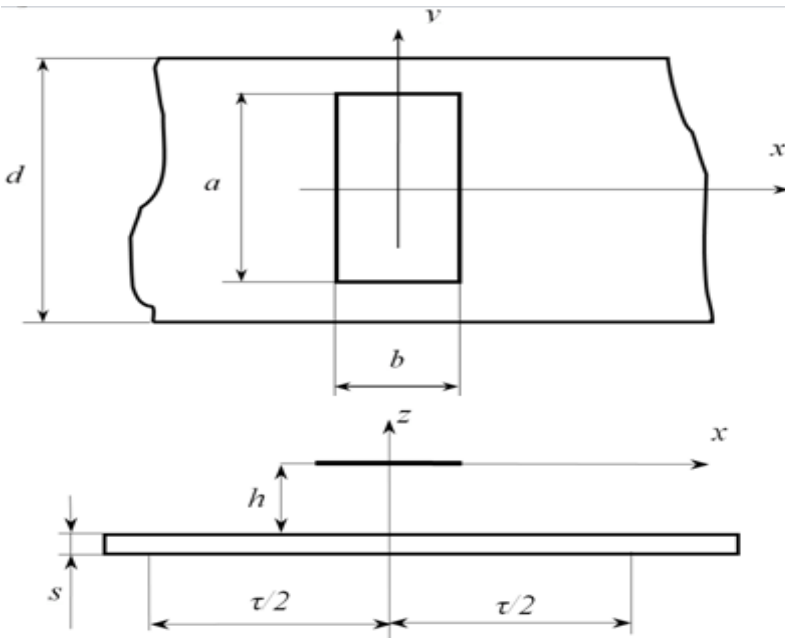


Рис. 2.6 Токовый контур прямоугольной формы

Поскольку токовая нагрузка контура представляется дельта-функцией Дирака по (2.104), то вычисление вносимого комплексного сопротивления с бесконечным индексом суммирования приведет к физически невозможному результату – бесконечно большой индуктивности. Поэтому количество членов ряда (2.106) следует ограничить так, чтобы полудлина наименьшей пространственной гармоники была приблизительно равна реальной толщине индуктирующей катушки, т.е.

$$2k-1 \approx \frac{\tau}{g}, \quad 2n-1 \approx \frac{d}{g}, \quad (2.107)$$

где  $g$  – толщина катушки.

Определим влияние геометрических размеров токовой рамки на распределение температуры в движущейся полосе. Для примера рассмотрим индукционный нагрев немагнитной полосы шириной  $d=0,6$  м и толщиной  $s=1$  мм, движущейся со скоростью  $v=0,1$  м/с. Тепло- и электрофизические параметры материала полосы соответствуют стали Ст3 при температуре выше температуры магнитных превращений. Величина тока в рамке  $I=1000$  А при частоте тока 2 кГц и числе витков  $w=4$ .

На рис. 2.7 представлено распределение приращения температуры  $T=T_n$  на поверхности полосы при  $b=0,5$  м и  $a=0,25$  м, а на рис. 2.8 – приращение температуры при  $b=0,25$  м и  $a=0,5$  м.

В обоих случаях распределение температуры оказывается резко неоднородным с явно выраженными зонами более высокой температуры под боковыми гранями токовой рамки, что объясняется более продолжительным временем пребывания указанных зон в области протекания вихревого тока. Очевидно, что представленные на рис. 2.7 и 2.8 распределения температуры характерны для

## Глава 2

индукционного нагрева движущейся полосы токовой рамкой прямоугольной формы [23].

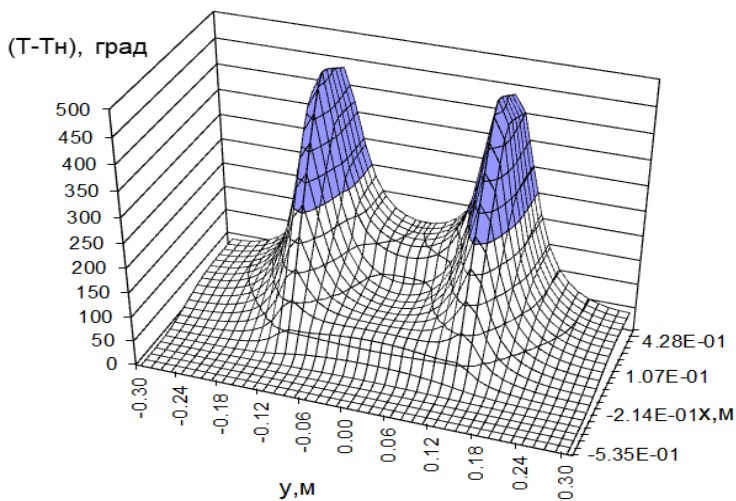


Рис. 2.7. Распределение температуры на поверхности полосы

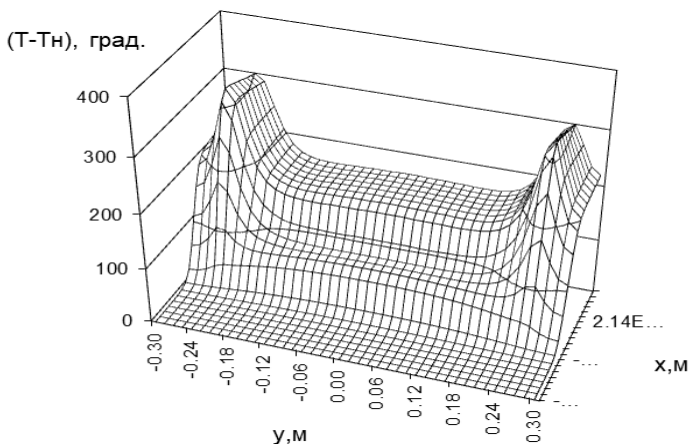


Рис. 2.8. Распределение температуры на поверхности полосы



**Токовый контур в виде ромба [27].** Пусть точка пересечения диагоналей ромба  $a$  и  $b$  совпадает с началом координат (рис. 2.9).

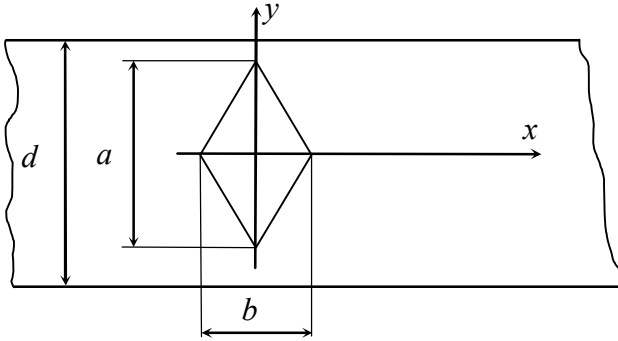


Рис. 2.9. Токовый контур в виде ромба

Амплитуда  $y$ -составляющей токовой нагрузки такого контура дается формулой

$$j_{Smy} = I_m w \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \\ \times \left\{ [\delta(x - \phi_1(y)) - \delta(x - \phi_2(y))] \left[ \Theta(y) - \Theta\left(y - \frac{b}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + [\delta(x - \phi_3(y)) - \delta(x - \phi_4(y))] \left[ \Theta\left(y + \frac{b}{2}\right) - \Theta(y) \right] \right\}, \quad (2.108)$$

где  $\phi_1 = ay/b - a/2$ ;  $\phi_2 = -ay/b + a/2$ ;  $\phi_3 = -ay/b - a/2$ ;  $\phi_4 = ay/b + a/2$  – уравнения отрезков прямых, образующих замкнутый контур.

Для представленного пространственного распределения тока по (2.74) находим

$$F_{kn} = -4\mu_0 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{p_k^2 + q_n^2}{\left(\frac{p_k b}{a}\right)^2 - q_n^2} \left[ \operatorname{ch}\left(p_k \frac{b}{2}\right) - \operatorname{ch}\left(q_n \frac{a}{2}\right) \right] \quad (2.109)$$

и соответствующее ему комплексное вносимое сопротивление

$$z_m = \frac{8i\omega\omega^2}{\tau d} \frac{b}{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{kn}}{\eta_{1kn}} \frac{\operatorname{ch}(p_k b/2) - \operatorname{ch}(q_n a/2)}{\left(\frac{p_k b}{a}\right)^2 + q_n^2} (M_{kn} - 1). \quad (2.110)$$

Графики распределения приращения температуры при индукционном нагреве полосы токовым контуром в виде ромба показаны на рис. 2.10 и 2.11. Режимные, тепло- и электрофизические параметры для приведенных графиков такие же как и в предыдущем примере. Для случая, приведенного на рис. 2.10,  $a = 0,5$  м,  $b = 0,25$  м, а на рис. 2.11 –  $a = 0,25$  и  $b = 0,5$  м.

Как видно из сопоставления графиков на рис. 2.10 и 2.11 характер распределения приращения температуры существенно зависит от геометрии токового контура. При  $b > a$  характер распределения температуры в полосе близок к случаю прямоугольной рамки. При  $b < a$  характер распределения температуры в полосе значительно изменяется. В большей степени нагревается середина полосы и снижается общая неравномерность нагрева по ширине. Очевидно, что комбинация прямоугольного и ромбического токовых контуров будет способствовать улучшению равномерности нагрева движущейся полосы по ширине.

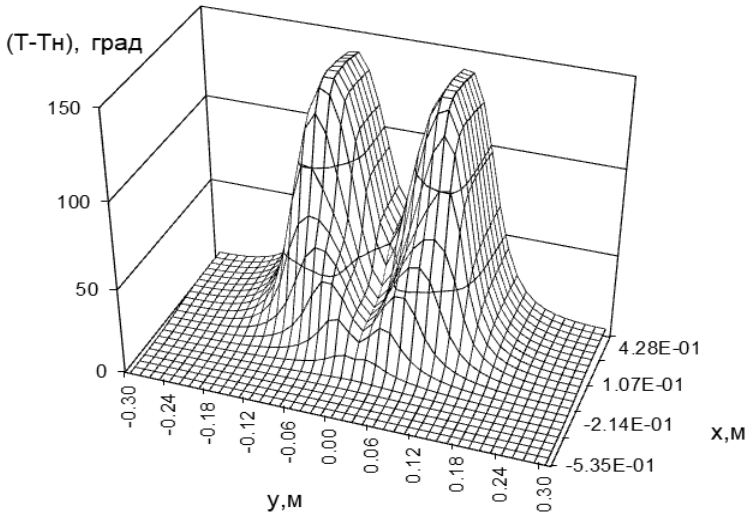


Рис. 2.10. Распределение температуры на поверхности полосы

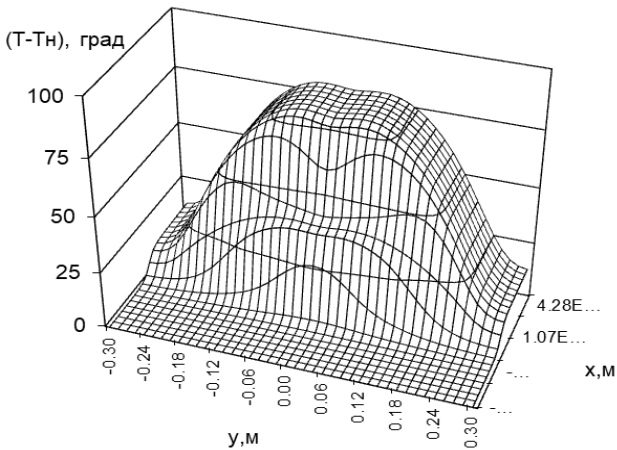


Рис. 2.11. Распределение температуры на поверхности полосы

**Токовый контур в виде эллипса** [28].  
 Пространственное распределение тока эллиптического контура (рис. 2.12)  $i = I_m w F(x, y)$  описывается функцией

$$F(x, y) = \delta\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1\right) \times \quad (2.111)$$

$$\times [\Theta(x+b) - \Theta(x-b)][\Theta(y+a) - \Theta(y-a)].$$

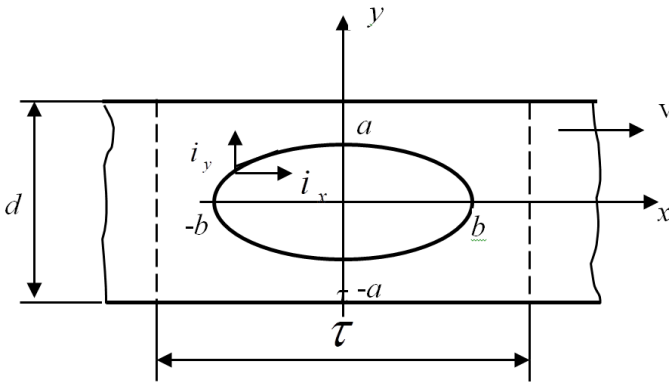


Рис. 2.12. Токовый контур в виде эллипса

С учетом формулы [12]

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x^i), \quad (2.112)$$

где  $x^i$  – корни первого порядка функции  $f(x)$ , составляющие токовой нагрузки в прямоугольной системе координат можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 j_{Smy} = & -I_m w \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{b^4}{a^2}}} \times \\
 & \times \left[ \delta \left( x - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right) + \delta \left( x + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right) \right]; \\
 j_{Smx} = & I_m w \frac{y}{\sqrt{x^2 \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \frac{a^2}{b^2} + a^2}} \times \\
 & \times \left[ \delta \left( x - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right) + \delta \left( x + \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

Согласно (2.74) интегральное преобразование пространственного распределения токового контура в виде эллипса выражается функцией

$$\begin{aligned}
 F_{kn} = & -4\mu_0 \left\{ p_k a \int_0^a \left\{ \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{y^2(b^2 - a^2) + a^4}} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \operatorname{sh} \left( p_k \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - y^2} \right) \operatorname{ch}(q_n y) \right\} dy + \right. \\
 & \left. + q_n b \int_0^b \left\{ \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{x^2(a^2 - b^2) + b^4}} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \operatorname{sh} \left( q_n \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} \right) \operatorname{ch}(p_k x) \right\} dx \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

Интегрируя по площади токового контура  $B_{z1}$  составляющую индукции магнитного поля при  $z=0$ , определяем магнитный поток, пронизывающий токовый контур,

$$\Phi_m = \int_{-b-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}}^b \int_{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}} B_{z1} dx dy$$

и по (2.95) с учетом (2.94) находим вносимое комплексное сопротивление

$$z_m = \frac{4i\omega w}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{kn}}{\eta_{1kn} q_n} (M_{kn} - 1) \times \int_0^b \operatorname{sh} \left( q_n \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} \right) \operatorname{ch} px dx. \quad (2.115)$$

Приведенные результаты для эллиптического контура могут быть легко трансформированы для случая кругового токового контура. Так, при  $a = b = r$  выражение (2.116) трансформируется в интегральное преобразование пространственного распределения кругового контура тока:

$$F_{kn} = -\frac{4\mu_0}{r} \left[ p_k \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \operatorname{sh} \left( p_k \sqrt{r^2 - y^2} \right) \operatorname{ch} (q_n y) dy + q_n \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \operatorname{sh} \left( q_n \sqrt{r^2 - x^2} \right) \operatorname{ch} (p_k x) dx \right]. \quad (2.116)$$

В результате многовариантных расчетов по описанной выше методике установлено, что эллиптические токовые контуры позволяют обеспечить более равномерный нагрев полосы по ширине по сравнению с токовыми контурами прямоугольной, ромбовидной и круговой форм. Далее приведем результаты расчетов распределения температуры по ширине полосы, движущейся с постоянной скоростью в магнитном поле, создаваемом токовым контуром эллиптической формы, обеспечивающим наибольшую равномерность нагрева.

На рис. 2.13 показано распределение приращения температуры  $(T - T_H)$  по полуширине полосы на выходе из зоны нагрева ( $x = \tau/2$ ) при следующих геометрических размерах эллипсоидального токового контура:  $a = 0,265$  м,  $b = 0,13$  м. Расчет выполнен для полосы шириной 0,6 м, толщиной  $\Delta = 1$  мм, движущейся со скоростью 0,1 м/с на дистанции  $h = 0,02$  м от токового контура. Величина тока в контуре принята  $I = 1000$  А, частота  $f = 2$  кГц, число витков  $w = 4$ . При заданных режимных параметрах электромагнитная система имеет активную мощность 38,5 кВт при КПД 88,5% и коэффициенте мощности 0,31.

На рис. 2.13 отмечены значения температуры в отдельных характерных точках. Разброс температуры свидетельствует о достаточно большой неоднородности распределения температуры по ширине полосы и возможном локальном перегреве отдельных участков полосы.

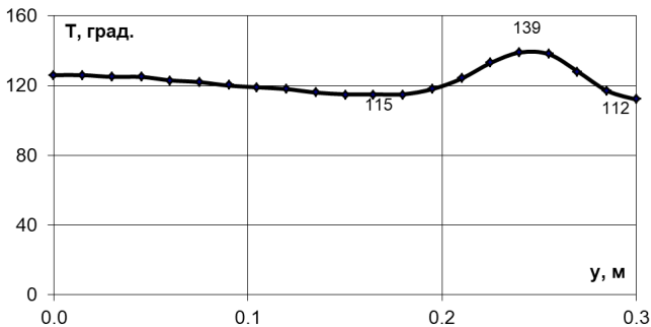


Рис. 2.13. Распределение температуры

Повысить равномерность нагрева полосы по ширине можно за счет комбинации нескольких токовых контуров.

Пусть над полосой установлены два соосных токовых контура эллиптической формы. Результирующий магнитный поток, являясь суперпозицией магнитных потоков обоих

контуров, наводит в токовых контурах соответствующие ЭДС:

$$E_1 = -i \omega w_1 \int_{S_1} (B'_{z_1} + B''_{z_1}) ds; \quad E_2 = -i \omega w_2 \int_{S_2} (B'_{z_1} + B''_{z_1}) ds, \quad (2.117)$$

где  $S_1$  и  $S_2$ ,  $w_1$  и  $w_2$  – площади и числа витков токовых контуров,  $B'_{z_1}$  и  $B''_{z_1}$  – магнитные индукции при  $z = 0$  первого и второго контуров соответственно.

Тогда вносимое комплексное сопротивление последовательной схемы замещения комбинации двух контуров определяется как

$$z_m = \frac{E_1 + E_2}{I_m}.$$

По магнитному потоку контуры могут быть включены согласно или встречно. При согласном включении магнитные индукции в (2.117) совпадают по знаку, а при встречном имеют противоположные знаки.

Как и магнитный поток, плотность индуцированных токов определяется суперпозицией плотностей токов, индуцированных каждым из контуров:

$$j_{xm} = j'_x + j''_x; \quad j_{ym} = j'_y + j''_y. \quad (2.118)$$

Объемная плотность тепловыделений рассчитывается по (2.103).

Распределение температуры в полосе, движущейся в магнитном поле двух эллиптических токовых контуров, расположенных соосно и включенных согласно, при  $x = \tau$  представлено на рис. 2.14. Приняты геометрические размеры контуров и число витков:  $a_1 = 0,275$  м,  $b_1 = 0,15$  м,  $w_1 = 4$ ,  $a_2 = 0,18$  м,  $b_2 = 0,15$  м,  $w_2 = 1$ . Остальные геометрические и режимные параметры соответствуют примеру на рис. 2.13.



При этом электромагнитная система, составленная из двух контуров, имеет активную мощность 63,3 кВт при КПД 91% и коэффициенте мощности 0,34.

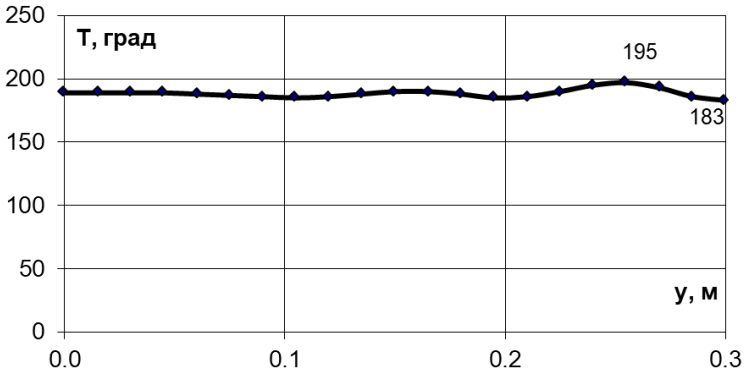


Рис. 2.14. Распределение температуры при нагреве полосы двумя токовыми контурами эллиптической формы

Неравномерность распределения температуры по ширине в случае использования комбинации двух контуров составляет 7%, что значительно меньше, чем при нагреве полосы одним токовым контуром (21%).

Последний пример показывает перспективность использования токовых контуров для устройств индукционного нагрева плоского проката металлов. Специальным выбором геометрических размеров токовых контуров удастся добиться равномерности нагрева полосы по ширине удовлетворяющей требованиям технологии термообработки. При этом энергетические показатели таких индукционных систем оказываются высокими, присущими устройствам индукционного нагрева поперечного магнитного поля.

### 2.2.2.2. Влияние конечной высоты сечения токового контура на энергетические характеристики индуктора

В подразделе 2.2.2.1 исследована зависимость равномерности нагрева лент по ширине от конфигурации токового контура, представленного в виде токового слоя. Ниже оценим влияние конечных размеров сечения токового контура на энергетические характеристики устройства индукционного нагрева.

Исследование электромагнитного поля выполним применительно к симметрично расположенным относительно ленты двум идентичным токовым контурам произвольной многоугольной конфигурации [30]. Тогда при согласном включении противоположащих токовых контуров на плоскости  $z = 0$  выполняются соотношения симметрии (рис. 2.15)

Представляя сечение токового контура прямоугольником высотой  $h_1$  и шириной  $c_1$ , плотность тока в контуре определяем следующей функциональной зависимостью:

$$j = \frac{I_m w}{h_1 c_1} \left[ \Theta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \Theta\left(z - \frac{h}{2} - h_1\right) \right] \times \quad (2.119) \\ \times \left[ \Theta\left(x - x_1 + \frac{c_1}{2}\right) - \Theta\left(x - x_1 - \frac{c_1}{2}\right) \right] e^{i\omega t},$$

где  $I_m$  – амплитудное значение тока,  $w$  – число витков в токовом контуре,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота тока,  $\Theta(\dots)$  – единичная обобщенная функция,  $i = \sqrt{-1}$ ,

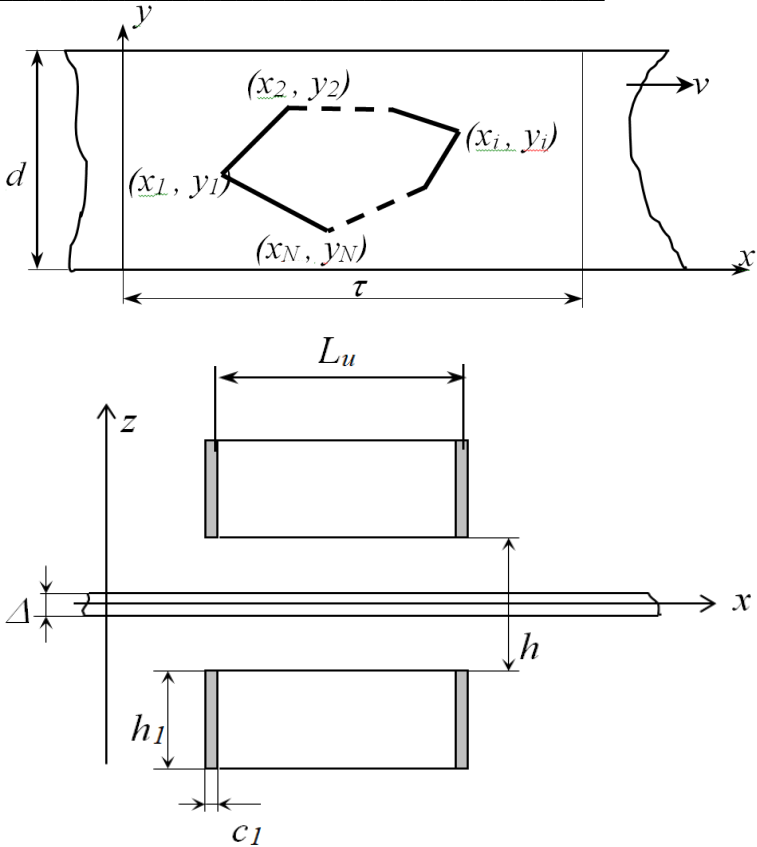


Рис. 2.15. Расчетная модель

$$\partial B_z / \partial z = 0, \quad B_x = 0, \quad B_y = 0. \quad (2.120)$$

С целью получения простых обзорных аналитических решений для электромагнитного поля устремим величину  $c_1$  к нулю и в результате предельного перехода найдем

$$j = \frac{I_m w}{h_1} \left[ \Theta \left( z - \frac{h}{2} \right) - \Theta \left( z - \frac{h}{2} - h_1 \right) \right] \delta(x - x_1) e^{i\omega t}, \quad (2.121)$$

где  $\delta(\dots)$  – дельта-функция Дирака.

Применительно к замкнутому токовому контуру, состоящему из прямолинейных отрезков, плотность тока имеет составляющие  $j_x$  и  $j_y$ , которые можно записать в виде

$$j_{xm} = \frac{I_m w}{h_1} \sum_{j=1}^N (k_j \sin \phi_j) \delta[x - (k_j y - b_j)] [\Theta(x - x_j) - \Theta(x - x_{j+1})] \times \\ \times [\Theta(y - y_j) - \Theta(y - y_{j+1})] \times \left[ \Theta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \Theta\left(z - \frac{h}{2} - h_1\right) \right]; \quad (2.122)$$

$$j_{ym} = \frac{I_m w}{h_1} \sum_{j=1}^N (\sin \phi_j) \delta[x - (k_j y - b_j)] [\Theta(x - x_j) - \Theta(x - x_{j+1})] \times \\ \times [\Theta(y - y_j) - \Theta(y - y_{j+1})] \left[ \Theta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \Theta\left(z - \frac{h}{2} - h_1\right) \right], \quad (2.123)$$

где  $N$  – число сторон многоугольника;  $(x_j, y_j)$  – координаты проекции вершин многоугольника на плоскости  $z = 0$ ;  $b_j = y_j k_j - x_j$ ;

$$\sin \phi_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{\sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}}; \quad k_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{y_{j+1} - y_j}.$$

В области, занятой токовым контуром, выполняется следующее уравнение для  $B_z$  составляющей индукции магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = -\mu_0 \left( \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right). \quad (2.124)$$

Выполнив осреднение уравнения (2.124) по высоте, получим

$$\left( \frac{\partial B_z^+}{\partial z} - \frac{\partial B_z^-}{\partial z} \right) = -\mu_0 h_1 \left( \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right) - h_1 \left( \frac{\partial^2 \bar{B}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{B}_z}{\partial y^2} \right), \quad (2.125)$$

где  $\bar{B}_z = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} B_z dz$  – среднее значение магнитной индукции в пределах высоты контура; значок «+» соответствует значению функции на верхней границе области занятой токовым контуром, а «-» – на нижней границе. Полагая отношение  $h_1^2/d^2$  величиной второго порядка малости с точностью до 5%, можем, не прибегая к решению уравнения (2.124), принять

$$\bar{B}_z \approx B_z^- = B_z^+. \quad (2.126)$$

Распределение магнитного поля в движущейся электропроводной полосе для каждой из компонент описывается уравнением магнитной индукции

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}_m}{\partial z^2} - i\mu\mu_0\gamma\omega\mathbf{B}_m - \mu\mu_0\gamma v \frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial x} = 0. \quad (2.127)$$

Пространство вне проводящей полосы и токового контура можно условно разделить на две подобласти – воздушный зазор между поверхностью полосы и токовым контуром ( $\Delta/2 \leq |z| \leq h/2$ ) и пространство над токовым контуром ( $|z| \geq (h/2 + h_1)$ ). Индукция магнитного поля в обеих областях описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}_m}{\partial z^2} = 0. \quad (2.128)$$

Для понижения размерности уравнений (2.127), (2.128) воспользуемся методом интегральных преобразований. Положим, что лента имеет неограниченные

размеры по осям  $0x$  и  $0y$ , а токовая нагрузка и магнитное поле имеет периодическую структуру с периодами  $2\tau$  и  $2d$  так, чтобы

$$\begin{aligned} B_x(x, y) &= B_x(-x, y); & B_{y,z}(x, y) &= -B_{y,z}(-x, y); \\ B_y(x, y) &= B_y(x, -y); & B_{z,x}(x, y) &= -B_{z,x}(x, -y). \end{aligned} \quad (2.129)$$

В соответствии с принятой периодизацией на длине полупериодов выполняются условия:

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, B_z = B_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, d; \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0, B_z = B_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \tau. \quad (2.131)$$

Важно отметить, что при введении периодизации магнитного поля по координате  $y$  с нечетной симметрией естественным образом удовлетворяется условие равенства нулю нормальной составляющей плотности тока на краях ленты ( $y = 0$  и  $y = d$ ). Периодизация магнитного поля вдоль продольной оси ленты осуществляется с полупериодом  $\tau$ . Чтобы исключить взаимное влияние искусственно периодизированной системы контуров друг на друга, для медленно движущейся проводящей среды величину  $\tau$  достаточно выбрать больше суммы максимального линейного размера контура вдоль оси  $0x - L_u$  и удвоенной величины зазора ( $\tau > L_u + 2h$ ) [44].

Выделим из уравнений (2.129), (2.130)  $B_z$  составляющую и выполним двухстороннее преобразование Лапласа [27] по координатам  $x$  и  $y$  с учетом принятого периодического изменения индукции магнитного поля:

$$\frac{d^2 \hat{B}_{zm}}{dz^2} - \eta_2^2 \hat{B}_{zm} = 0, \quad -\Delta/2 \leq z \leq \Delta/2; \quad (2.132)$$

$$\frac{d^2 \hat{B}_{zm}}{dz^2} - \eta_1^2 \hat{B}_{zm} = 0, \quad |z| \geq h/2 + h_1, \quad \Delta/2 \leq |z| \leq h/2, \quad (2.133)$$

где

$$\hat{B}_{zm}(p, q, z) = \frac{1}{1 - e^{-2p\tau}} \frac{1}{1 - e^{-2qd}} \int_0^{2\tau} \int_0^{2d} B_{zm}(x, y, z) e^{-px - qy} dx dy, \quad (2.134)$$

$$\eta_1^2 = -p^2 - q^2, \quad \eta_2^2 = i\mu\mu_0\sigma\omega + p\mu\mu_0\sigma\nu - p^2 - q^2.$$

Решения уравнений (2.132), (2.133) хорошо известны и записываются в виде сумм экспоненциальных функций с умножением на постоянные коэффициенты, определяемые из условий сопряжения на границах раздела областей, для которых записаны решения, условия ограниченности индукции магнитного поля на бесконечности и условия симметрии (2.120). Для сопряжения решений в области занятой токовым контуром, воспользуемся условиями (2.125) и (2.126), которые в преобразованных значениях имеют вид

$$\frac{\partial \hat{B}_{zm1}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{B}_{zm2}}{\partial z} = g + h_1 \eta_1^2 \hat{B}_{zm1}; \quad (2.135)$$

$$\hat{B}_{zm1} = \hat{B}_{zm2}, \quad (2.136)$$

где индекс «1» соответствует магнитному полю над токовым контуром, а индекс «2» – в воздушном зазоре под контуром;

$$g = \frac{4\mu_0 I_m w}{(1 - e^{-2p\tau})(1 - e^{-2qd})} \hat{G};$$

$$\hat{G} = \sum_{j=1}^N (p - k_j q) \sin \phi_j \times \\ \times \left( pk_j [\operatorname{ch}(px_{j+1}) \operatorname{sh}(qy_{j+1}) - \operatorname{ch}(px_j) \operatorname{sh}(qy_j)] - \right. \\ \left. - q [\operatorname{sh}(px_{j+1}) \operatorname{ch}(qy_{j+1}) - \operatorname{sh}(px_j) \operatorname{ch}(qy_j)] \right) / ((pk_j)^2 - q^2). \quad (2.137)$$

Дополняя (2.135), (2.136) условиями сопряжения решений на границе раздела проводящей полосы и воздушного зазора ( $z = \Delta/2$ ), заключающихся в равенстве нормальных составляющих индукции магнитного поля и их производных по  $z$ , находим решения для преобразованных значений нормальной составляющей магнитной индукции над индукторами —  $\hat{B}_{zm1}$ , в зазоре между полосой и индуктором —  $\hat{B}_{zm2}$  и в полосе —  $\hat{B}_{zm3}$ :

$$\hat{B}_{zm1} = -\frac{g}{2\eta_1 \left(1 + \frac{\eta_1 h_1}{2}\right) (1 - h_1 LM)} \frac{(1 - M e^{-\eta_1(h-\Delta)})}{e^{-\eta_1 \left(\frac{h}{2} + h_1\right)}} e^{-\eta_1 z}; \quad (2.138)$$

$$\hat{B}_{zm2} = -\frac{g e^{-\eta_1 \frac{h}{2}}}{2\eta_1 \left(1 + \frac{\eta_1 h_1}{2}\right) (1 - h_1 LM)} (e^{\eta_1 z} - M e^{-\eta_1(z-\Delta)}); \quad (2.139)$$

$$\hat{B}_{zm3} = -\frac{g e^{-\eta_1 \left(\frac{h}{2} - \frac{\Delta}{2}\right)}}{2\eta_1 \left(1 + \frac{\eta_1 h_1}{2}\right) (1 - h_1 LM) \operatorname{ch}\left(\eta_2 \frac{\Delta}{2}\right)} \frac{1 - M}{\operatorname{ch}\left(\eta_2 \frac{\Delta}{2}\right)} \operatorname{ch}(\eta_2 z), \quad (2.140)$$

где

$$M = \frac{\mu_0 \eta_2 \operatorname{sh}(\eta_2 \Delta/2) - \mu \eta_1 \operatorname{ch}(\eta_2 \Delta/2)}{\mu_0 \eta_2 \operatorname{sh}(\eta_2 \Delta/2) + \mu \eta_1 \operatorname{ch}(\eta_2 \Delta/2)}, \quad L = \frac{\eta_1 e^{-\eta_1(h-\Delta)}}{2 + \eta_1 h_1}.$$

Для определения  $B_x$  и  $B_y$  составляющих индукции магнитного поля воспользуемся выражением, полученным для  $B_z$  составляющей, и соотношениями  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  и  $\mu \mu_0 j_z = \operatorname{rot}_z \mathbf{B} = 0$ , после преобразования которых по (2.134) непосредственно получаем выражения, описывающие



искомые функции. Подробный вывод искомых соотношений детально описан в подразделе 2.2.2.1.

Устремляя высоту токового контура к нулю ( $h_1 \rightarrow 0$ ), выражения (2.138) – (2.140) сводятся к выражениям, полученным в предположении бесконечно тонкого токового слоя, что позволяет легко проанализировать влияние высоты токового контура на энергетические характеристики индуктора.

Оригиналы найденных решений определим по теореме разложения для мероморфной функции с бесконечно большим числом простых полюсов, определяемых нулями функций  $(1 - e^{-2p\tau})$  и  $(1 - e^{-2qd})$  в (2.137).

Так, нормальная составляющая индукции магнитного поля в воздушном зазоре представляется в виде

$$B_{zm2} = -\frac{I_m \mu_0 w}{\tau d} \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G_{kn} e^{-\eta_{1kn} \frac{h}{2}} (e^{\eta_{1kn} z} - e^{\eta_{1kn} \Delta} M_{kn} e^{-\eta_{1kn} z})}{2\eta_{1kn} \left(1 + \frac{\eta_{kn1} h_1}{2}\right) (1 - h_1 L_{kn} M_{kn})} e^{p_k x + q_n y}, \quad (2.141)$$

где

$$p_k = ik \frac{\pi}{\tau}, \quad k = -\infty, \dots, \infty; \quad q_n = in \frac{\pi}{d}, \quad n = -\infty, \dots, \infty, \quad (2.142)$$

а  $G_{kn} = \hat{G}(p_k, q_n)$ ,  $\eta_{1kn}$ ,  $\eta_{2kn}$ ,  $M_{kn}$ ,  $L_{kn}$  определяются согласно ранее приведенным формулам с учетом (2.142).

Для анализа влияния конечной высоты токового контура на энергетические характеристики индуктора будем использовать последовательную схему замещения, включающую последовательное соединение активного сопротивления токового контура  $r_1$ , реактивного

сопротивления  $x_\sigma$ , характеризующего потоки рассеяния в пределах высоты катушки, и комплексного вносимого сопротивления, учитывающего влияние воздушного зазора и проводящей полосы  $z_m$ .

Для определения  $z_m$  вычислим магнитный поток через площадь токового контура при  $z = h/2$  и соответствующую ему электродвижущую силу (ЭДС). Отношение наведенной ЭДС к току контура определяет вносимое комплексное сопротивление:

$$z_m = \frac{i\omega w^2 \mu_0}{\tau d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G_{kn} (1 - M_{kn} e^{-\eta_{1kn}(h-\Delta)})}{2\eta_{1kn} \left(1 + \frac{\eta_{kn1} h_1}{2}\right) (1 - h_1 L_{kn} M_{kn})} \times \sum_{j=1}^N \left( \frac{e^{p_k x_{j+1} + q_n y_{j+1}} - e^{p_k x_j + q_n y_j}}{p_k + \frac{q_n}{k_j}} \right). \quad (2.143)$$

Активное сопротивление многовитковой катушки  $r_1$  примем равным сопротивлению катушки постоянному току:

$$r_1 = \frac{\Pi_\circ \rho_1 w}{t}, \quad (2.144)$$

где  $\Pi_\circ$  – эквивалентный периметр токового контура,  $\rho_1$  – удельное сопротивление проводников,  $t$  – эффективное сечение витка по меди.

Такое представление активного сопротивления токового контура вполне оправдано при исполнении витков из многожильного провода (литцендрата), но требует уточнения для массивных проводников.

Расчет индуктивного сопротивления потоков рассеяния в пределах высоты катушки  $x_\sigma$ , в отличие от

вносимого комплексного сопротивления, можно выполнить с учетом конечных размеров сечения токового контура. Воспользуемся для этого методом расчета пазового рассеяния электрической машины, изложенным в [30]. По аналогии с этим методом имеем

$$x_{\sigma} = \omega w^2 \mu_0 \lambda \Pi_{\sigma}, \quad (2.145)$$

где

$$\lambda = \frac{2c_1^2 \ln(c_1 + h_1) + h_1^2 - 2c_1 h_1 - 2c_1^2 \ln(c_1)}{8h_1^2}. \quad (2.146)$$

При идентичном исполнении верхнего и нижнего контуров и их последовательном электрическом соединении, определив параметры схемы замещения, найдем ток в витках катушки при питании от источника напряжения:

$$I_m = \sqrt{2} U / [2(z_m + r_1 + ix_{\sigma})]. \quad (2.147)$$

Полная мощность, потребляемая из сети, коэффициент мощности и коэффициент полезного действия индукционного нагревателя соответственно определяются по следующим формулам:

$$S = UI^*, \quad \cos \phi = \operatorname{Re}(S) / |S|, \quad KИД = \operatorname{Re}(z_m) / (\operatorname{Re}(z_m) + r_1). \quad (2.148)$$

Количественное влияние высоты контура на энергетические параметры индуктора определяется множителем в знаменателе формулы (2.143). Увеличение высоты контура приводит к уменьшению комплексного сопротивления индуктора и существенному снижению потока электромагнитной мощности в нагреваемую полосу. На рис. 2.16 приведен график изменения активной мощности двухстороннего индуктора, состоящего из двух трехвитковых катушек, соединенных последовательно и подключенных к источнику тока 1000 А, частотой 2000 Гц в зависимости от высоты токового контура. Ширина полосы

## Глава 2

0,6 м, толщина 2 мм. Токовые контуры – квадраты со стороной 0,36 м. Проекции вершин квадратов на плоскость  $z = 0$  имеют следующие координаты: (0,3, 0,3), (0,6, 0,5), (0,8, 0,25), (0,5, 0,05). Удельная электропроводность полосы соответствует электропроводности стали Ст3 при температуре 900 °С, магнитная проницаемость равна магнитной постоянной  $\mu_0$ . Кроме общей тенденции к снижению потока электромагнитной мощности с увеличением высоты токового контура наблюдается также снижение коэффициента мощности индуктора (рис. 2.17).

Последнее, отчасти, обусловлено также увеличением индуктивности рассеяния в пределах высоты токового контура по (2.146).

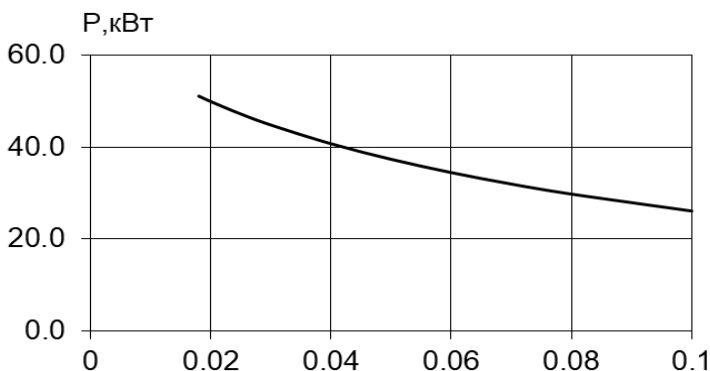


Рис. 2.16. График изменения активной электромагнитной мощности в зависимости от высоты контура

Таким образом, найдено аналитическое решение задачи об электромагнитном поле двухстороннего индуктора, выполненного в виде симметрично расположенных относительно полосы токовых контуров произвольной многоугольной конфигурации с учетом конечной высоты поперечного сечения проводников контура.

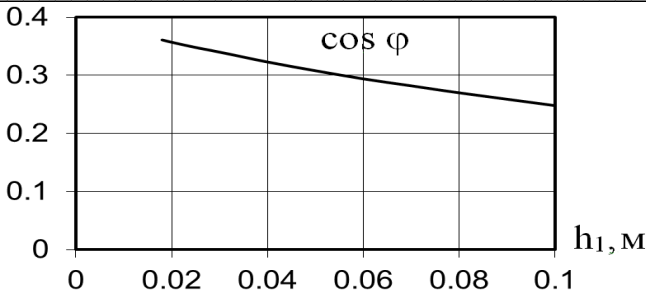


Рис. 2.17. График изменения коэффициента мощности в зависимости от высоты контура

Максимальные энергетические характеристики достигаются при минимально возможной высоте токового контура.

### 2.2.3. Электромагнитное поле пространственно распределенного токового контура

В подразделе 2.2.2 рассмотрено электромагнитное поле компланарных к проводящей среде токовых контуров канонических и произвольной конфигураций. В то же время в практике индукционного нагрева могут использоваться токовые контуры, расположенные некомпланарно нагреваемой поверхности [31, 32, 33].

Рассмотрим электромагнитные процессы в проводящей полосе при взаимодействии с токовым контуром, имеющим участки не параллельные полосе [34] (рис. 2.18).

Будем рассматривать симметричные относительно прямоугольной системы координат контуры. Начало координат поместим на оси симметрии полосы. Проводящая полоса шириной  $2d$  движется в направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $v$ . Электропроводность  $\gamma$  и относительная магнитная проницаемость  $\mu$  полосы приняты

## Глава 2

постоянными. Прямоугольный в проекции на плоскость  $xOy$  токовый контур, параллельный полосе на участке шириной  $2a_1$ , имеет симметричные участки, расположенные к плоскости полосы под некоторым углом  $\alpha = \arctg(k_1)$ ,  $k_1 = h_1/(a-a_1)$ .

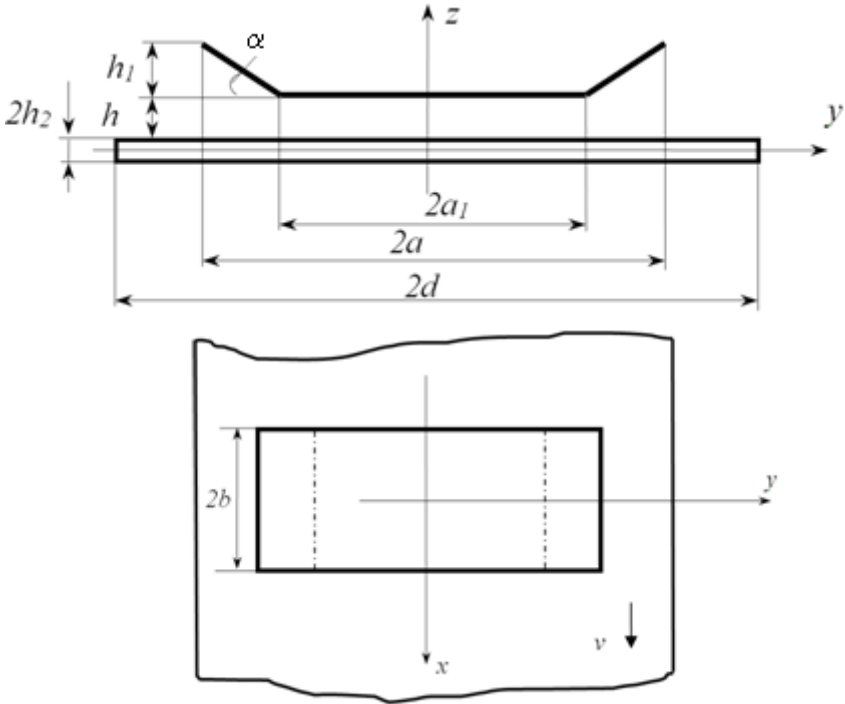


Рис. 2.18. Расчетная модель

Положим, что на оси симметрии полосы ( $z = 0$ ) выполняются условия симметрии индукции магнитного поля для двухстороннего согласно включенного индуктора –  $\partial B_z / \partial z = 0, B_x = B_y = 0$ .

В области, не занятой проводящей полосой  $|z| > h_2$ , уравнение индукции принимает следующий вид:

$$-\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{j}_S, \quad (2.149)$$

где  $\mathbf{j}_S = I_m w (\mathbf{i} j_{Sx} + \mathbf{j} j_{Sy} + \mathbf{k} j_{Sz}) e^{i\omega t}$ ,  $I_m$  – амплитуда тока в контуре,  $w$  – число витков,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота тока.

В проводящей полосе распределение амплитуды индукции магнитного поля с учетом гармонического изменения компонент электромагнитного поля описывается уравнением

$$\Delta \mathbf{B}_m - i\mu_0 \sigma \omega \mathbf{B}_m - \mu_0 \sigma v \frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial x} = 0. \quad (2.150)$$

Положим, что проводящая полоса бесконечно широкая и токовая нагрузка имеет периодическое продолжение вдоль оси  $Oy$  с нечетной симметрией, т.е.

$$\mathbf{j}_S(y) = -\mathbf{j}_S(y + 2d) = \mathbf{j}_S(y + 4d) = \mathbf{j}_S(-y). \quad (2.151)$$

При таком периодическом продолжении на боковых гранях полосы естественным образом выполняется условие равенства нулю  $j_y$  составляющей индуцированного тока.

Поскольку задача нахождения индукции магнитного поля линейная, следует предположить, что периодическому изменению токовой нагрузки вдоль оси  $Oy$  соответствует периодическое изменение компонент электромагнитного поля.

Выполним интегральное преобразование Фурье уравнений (2.149), (2.150) для  $B_z$  составляющей индукции магнитного поля по переменным  $x$  и  $y$ . Заметим, что в интегральном преобразовании

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} e^{ipx} dx = \frac{\partial B_z}{\partial x} e^{ipx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - ip B_z e^{ipx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - p^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_z e^{ipx} dx$$

первое и второе слагаемые равны нулю, так как индукция магнитного поля и ее первая производная равны нулю на бесконечности, исходя из физических соображений.

Применение же преобразования Фурье по переменной  $y$  для периодической функции, не затухающей на бесконечности, лишено смысла в том случае, если параметр преобразования является вещественным. Но если параметр преобразования Фурье принимается комплексным, то его величина может быть выбрана таким образом, чтобы  $(\partial B_z / \partial y) e^{iqy} \Big|_{-\infty}^{\infty}$  и  $iq B_z e^{iqy} \Big|_{-\infty}^{\infty}$  были равны нулю [35]. В таком случае уравнения

(2.149), (2.150) для  $B_z$  составляющей приводятся к виду

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_{z1}}{\partial z^2} - \eta_1^2 \hat{B}_{z1} = -\mu_0 \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial j_{Sy}}{\partial x} - \frac{\partial j_{Sx}}{\partial y} \right) e^{ipx+iqy} dx dy, \quad |z| > h_2; \quad (2.152)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{B}_{z2}}{\partial z^2} - \eta_2^2 \hat{B}_{z2} = 0, \quad |z| < h_2, \quad (2.153)$$

где  $\eta_1^2 = p^2 + q^2$ ,  $\eta_2^2 = (p^2 + q^2 + i\mu\mu_0\gamma\omega - i\mu\mu_0\gamma\nu\rho)$ ,

$$\hat{B}_z = \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} B_z e^{ipx+iqy} dx dy. \quad (2.154)$$

Для  $B_z$  составляющей индукции магнитного поля можем записать четыре граничных условия: на бесконечности ( $z = \infty$ ) —  $B_{z1} = 0$ ; на оси симметрии ( $z = 0$ ) —  $\partial B_{z2} / \partial z = 0$ ; на границе раздела проводящей полосы и воздуха ( $z = h_2$ ) —  $B_{z1} = B_{z2}$ ,  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{z1}}{\partial z} = \frac{\partial B_{z2}}{\partial z}$ . Последнее равенство получено из условия равенства тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля и уравнения  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , выполняющегося по обе стороны границы раздела сред.

Решение уравнения (2.153) с учетом условия на оси симметрии имеет вид



$$\hat{B}_{z2} = \hat{B}_{z0} \operatorname{ch}(\eta_2 z), \quad (2.155)$$

где  $\hat{B}_{z0}$  – величина  $\hat{B}_{z2}$  при  $z = 0$ . Тогда на границе раздела сред

$$\hat{B}_{z1} = \hat{B}_{z0} \operatorname{ch}(\eta_2 h_2);$$

$$\frac{\partial \hat{B}_{z1}}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{B}_{z2}}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \eta_2 \hat{B}_{z0} \operatorname{sh}(\eta_2 h_2). \quad (2.156)$$

Уравнение (2.152) с условиями (2.156) составляет задачу Коши, решение которой дается формулой [36]

$$\begin{aligned} \hat{B}_{z1} = & \frac{1}{\eta_1} \int_{h+h_2}^{h+h_1+h_2} \hat{f}(\tau) \operatorname{sh}(\eta_1(z-\tau)) d\tau + \\ & + \hat{B}_{z0} \left[ \operatorname{ch}(\eta_2 h_2) \operatorname{ch}(\eta_1 z) + \frac{1}{\mu} \frac{\eta_2}{\eta_1} \operatorname{sh}(\eta_2 h_2) \operatorname{sh}(\eta_1 z) \right], \end{aligned} \quad (2.157)$$

где  $\hat{f}(\tau)$  – правая часть уравнения (2.152), финитная функция, определенная на интервале  $h + h_2 < |z| < h + h_1 + h_2$ .

Принимая во внимание, что на бесконечности  $\hat{B}_{z1} = 0$  из (2.157) находим

$$\hat{B}_{z0} = \eta_1^{-1} \left[ \operatorname{ch}(\eta_2 h_2) + \frac{1}{\mu} \frac{\eta_2}{\eta_1} \operatorname{sh}(\eta_2 h_2) \right]^{-1} \int_{h+h_2}^{h+h_1+h_2} \hat{f}(z) e^{-\eta_1 z} dz. \quad (2.158)$$

Таким образом, определено значение  $\hat{B}_{z0}$  в решении (2.155), описывающее распределение  $B_z$  составляющей индукции в проводящей полосе и пространстве над полосой (2.157).

Очевидно, что для определения распределения индукции, необходимо задать пространственное

распределение токовой нагрузки. Зададим составляющие токовой нагрузки (рис. 2.18) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 j_{Sy} = I_m w e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ & \delta(z - (h + h_2)) [\delta(x - b) - \delta(x + b)] \times \\
 & \times [\Theta(y + a_1 + 4nd) - \Theta(y - a_1 + 4nd)] + \\
 & + \cos(\gamma) \delta(z + k_1 y + k_1 a_1 - h - h_2) [\delta(x - b) - \delta(x + b)] \times \\
 & \times [\Theta(y + a + 4nd) - \Theta(y - a_1 + 4nd)] + \\
 & + \cos(\gamma) \delta(z - k_1 y + k_1 a_1 - h - h_2) [\delta(x - b) - \delta(x + b)] \times \\
 & \times [\Theta(y - a_1 + 4nd) - \Theta(y - a + 4nd)] \}; \quad (2.159)
 \end{aligned}$$

$$j_{Sx} = I_m w e^{i\omega t} [\delta(y + a) - \delta(y - a)] [\Theta(x + b) - \Theta(x - b)], \quad (2.160)$$

где  $\delta(\dots)$  – дельта-функция Дирака,  $\Theta(\dots)$  – единичная обобщенная функция,  $n = -\infty, \dots, \infty$ .

Преобразование Фурье правой части уравнения (2.152) с учетом заданного пространственного распределения тока контура (2.159), (2.160) равно

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(z) = -4\pi\mu_0 I_m w e^{i\omega t} \left\{ & \frac{q}{pd} \sin(pb) \delta(z - h - h_1 - h_2) \times \\
 & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - q_n) \sin(qa) + \\
 & + \frac{P}{qd} \sin(pb) \delta(z - h - h_1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - q_n) \sin(qa_1) + \\
 & + \cos(\gamma) \frac{P}{dk_1} \sin(pb) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - q_n) \times \\
 & \times \cos \left[ \frac{q}{k_1} z + q \left( a_1 - \frac{h + h_2}{k_1} \right) \right] \right\}. \quad (2.161)
 \end{aligned}$$

Заметим, что несобственный интеграл от периодической функции (2.159), изменяющейся в соответствии с (2.151), преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{iqy} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(2qd+\pi)} \int_{-d}^d \phi(y) e^{iqy} dy. \quad (2.162)$$

С учетом формулы [36]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n\pi)$$

правая часть (2.162) приводится к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{iqy} dy = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left[ 2d \left( q - (2n-1) \frac{\pi}{2d} \right) \right] \int_{-d}^d \phi(y) e^{iqy} dy.$$

По свойству дельта-функции Дирака

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x)$$

окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{iqy} dy = \frac{\pi}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[q - q_n] \int_{-d}^d \phi(y) e^{iqy} dy, \quad (2.163)$$

где

$$q_n = (2n-1) \frac{\pi}{2d}.$$

Интеграл в (2.158) также вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned}
 & \int_{h+h_2}^{h+h_1+h_2} \hat{f}(z) e^{-\eta_1 z} dz = -4\pi\mu_0 I_m w e^{i\omega t} \times \\
 & \times \left\{ \frac{q}{pd} \sin(pb) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - q_n) \sin(qa) e^{-\eta_1(h+h_1+h_2)} + \right. \\
 & + \frac{P}{qd} \sin(pb) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - q_n) \sin(qa_1) e^{-\eta_1(h+h_2)} + \\
 & + \cos(\gamma) \frac{P}{dk_1} \sin(pb) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(q - q_n) e^{-\eta_1(h+h_2)} \times \\
 & \left. \times \left[ \frac{\frac{q}{k_1} (e^{-\eta_1 h_1} \sin(qa) - \sin(qa_1)) - \eta_1 (e^{-\eta_1 h_1} \cos(qa) - \cos(qa_1))}{\left(\frac{q}{k_1}\right)^2 + \eta_1^2} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, распределение  $\hat{B}_z$  составляющей индукции магнитного поля определено. Для определения  $\hat{B}_x$  и  $\hat{B}_y$  составляющих индукции магнитного поля в проводящей полосе воспользуемся фактом равенства нулю  $j_z$  составляющей плотности индуцированного тока в полосе [14], который является следствием периодичности токовой нагрузки и бесконечных размеров полосы вдоль оси  $Oy$ , принятых в математической модели. Имеем

$$j_z = \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = 0.$$

Кроме того, в полосе, безусловно, выполняется равенство  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , откуда

$$-\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}.$$

Выполнив преобразование Фурье последних двух уравнений, получим

$$-ip\hat{B}_y + iq\hat{B}_x = 0; \quad -ip\hat{B}_x - iq\hat{B}_y = -\partial\hat{B}_z/\partial z.$$

Решая полученные уравнения относительно  $\hat{B}_x$  и  $\hat{B}_y$ , получаем их значения через производную  $\hat{B}_z$  составляющей, и после выполнения операций дифференцирования имеем

$$\hat{B}_{x2} = -ip \frac{\eta_2}{\eta_1^2} \hat{B}_{z0} \operatorname{sh}(\eta_2 z); \quad (2.164)$$

$$\hat{B}_{y2} = -iq \frac{\eta_2}{\eta_1^2} \hat{B}_{z0} \operatorname{sh}(\eta_2 z). \quad (2.165)$$

Токи, индуцированные в полосе, имеют две составляющие –  $j_x$  и  $j_y$ :

$$j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

В преобразованном виде с учетом (2.164), (2.165) и (2.155) выражения для плотности тока приобретают следующий вид:

$$\hat{j}_x = \frac{iq}{\mu\mu_0} \left( \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} - 1 \right) \hat{B}_z; \quad (2.166)$$

$$\hat{j}_y = \frac{ip}{\mu\mu_0} \left( 1 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \right) \hat{B}_z. \quad (2.167)$$

Обратные преобразования Фурье полученных выражений компонент электромагнитного поля выполняются по формуле

$$B = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{B}(p, q) e^{-ipx-iqy} dp dq .$$

Результатом интегрирования по  $q$  ввиду особенности дельта-функции Дирака является замена величины  $q$  на  $q_n = \pi(2n-1)/(2d)$ . В результате имеем

$$j_x = \frac{I_m w e^{i\omega t}}{\pi d \mu \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i q \left( \frac{\eta_{2n}^2}{\eta_{1n}^2} - 1 \right) B_{nz=0} \operatorname{ch}(\eta_{2n} z) e^{-iq_n y} e^{-ipx} dp; \quad (2.168)$$

$$j_y = \frac{I_m w e^{i\omega t}}{\pi d \mu \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i p \left( 1 - \frac{\eta_{2n}^2}{\eta_{1n}^2} \right) B_{nz=0} \operatorname{ch}(\eta_{2n} z) e^{-iq_n y} e^{-ipx} dp, \quad (2.169)$$

где

$$B_{nz=0} = \frac{\mu_0 F_n}{\eta_{1n} \left[ \operatorname{ch}(\eta_{2n} h_2) + \frac{1}{\mu} \frac{\eta_{2n}}{\eta_{1n}} \operatorname{sh}(\eta_{2n} h_2) \right]}, \quad (2.170)$$

$$F_n = -e^{-\eta_{1n}(h+h_2)} \sin(pb) \left\{ \frac{q_n}{p} \sin(q_n a) e^{-\eta_{1n} h_1} + \frac{p}{q_n} \sin(q_n a_1) \right\} + \cos(\gamma) \frac{p}{k_1} \left( \frac{q_n}{k_1} (e^{-\eta_{1n} h_1} \sin(q_n a) - \sin(q_n a_1)) - \right. \\ \left. - \eta_{1n} (e^{-\eta_{1n} h_1} \cos(q_n a) - \cos(q_n a_1)) \right) / \left[ \left( \frac{q_n}{k_1} \right)^2 + \eta_{1n}^2 \right], \quad (2.171)$$

$\eta_{1n}$ ,  $\eta_{2n}$  определяются по (2.154) с заменой  $q$  на  $q_n$ .

По найденному распределению плотности токов в полосе определяется распределение источников тепла

$$P_w = \frac{j_{xm}^* j_{xm}^* + j_{ym}^* j_{ym}^*}{2\sigma}.$$

Распределение температуры в полосе найдем из решения уравнения теплопроводности с внутренними источниками тепла. Как и выше, ограничимся решением двумерного уравнения теплопроводности (2.101) с граничными условиями (2.102), принимая плотность источников тепла постоянной по толщине и равной значению плотности источников тепла на поверхности. Такое допущение, разумеется, может привести к определенным погрешностям в определении абсолютной температуры, но не влияет на относительное распределение температуры по ширине полосы.

На рис. 2.19 представлено распределение температуры на выходе из зоны нагрева ленты толщиной 1 мм и шириной 600 мм (кривые 1 и 2), движущейся со скоростью 0,1 м/с. Кривая 1 рассчитана при  $2b = 190$  мм,  $2a = 510$  мм и  $\gamma = 0^\circ$ , т.е. токовый контур располагается в одной плоскости  $z = h = 15$  мм.

Кривая 2 рассчитана при  $2b = 190$  мм,  $2a_1 = 270$  мм и  $\angle\gamma = 12^\circ$ , что соответствует подъему крайних участков токового контура на  $h_1 = 25$  мм. Обе кривые соответствуют  $I_m w = 4000$  А и частоте тока  $f = 2000$  Гц. Электро- и теплофизические параметры нагреваемой полосы соответствуют свойствам нержавеющей стали. Более высокая среднеинтегральная температура при нагреве компланарным токовым контуром по сравнению с пространственно распределенным контуром объясняется увеличением эквивалентного воздушного зазора и, как следствие, снижением коэффициента мощности.

Сравнение кривых 1 и 2 свидетельствует о эффективном воздействии геометрии токового контура на

равномерность нагрева полосы по ширине. Так, подъем крайних зон токового контура длиной 120 мм на угол  $12^\circ$  позволяет снизить неравномерность нагрева полосы до 16%. Уже такая неравномерность нагрева в некоторых технологических процессах термообработки (нанесение защитных покрытий) может быть допустимой.

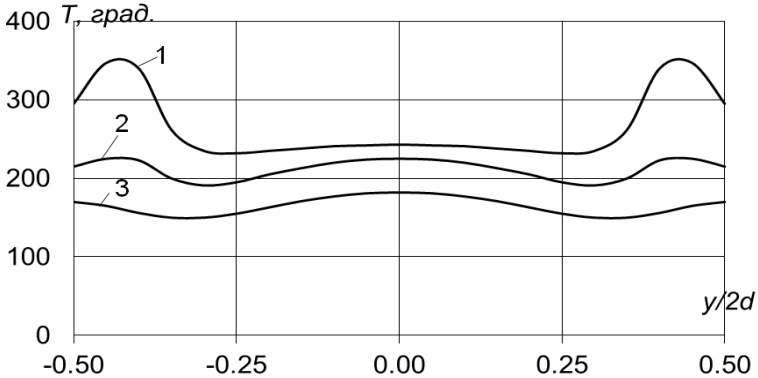


Рис. 2.19. Распределение температуры по ширине ленты

На рис. 2.19 приведено также распределение температуры при ширине ленты 500 мм (кривая 3). Геометрические размеры токового контура в этом случае отличаются от примера, проиллюстрированного кривой 2, только изменением угла подъема крайних зон –  $\angle\gamma = 33^\circ$ . Неравномерность нагрева в этом случае 19%.

Таким образом, изменением угла подъема краевых зон токового контура прямоугольной формы можно весьма эффективно управлять распределением температуры по ширине полосы, в том числе и при изменении ее типоразмера.

При практической реализации такой токовый контур может быть заменен системой трех контуров, один из которых расположен параллельно нагреваемой ленте, а два других располагаются в краевых зонах полосы под углом к ней.



### 2.3. Выводы к главе 2

1. При индукционном нагреве ферромагнитных лент в индукторах поперечного магнитного потока с ферромагнитным сердечником электродинамическая стабилизация положения ленты по центру зазора достигается в диапазоне средних частот (400 – 800 Гц) в зависимости от величины напряжения (тока) питания индуктора.

2. Токовыми контурами канонической формы (прямоугольник, ромб, круг, эллипс), компланарными поверхности нагреваемой ленты, не обеспечивается равномерный нагрев лент конечной ширины.

3. Для достижения равномерного нагрева лент по ширине целесообразно применять комбинации токовых контуров, соотношения геометрических размеров которых определяются типоразмером и электрофизическими параметрами лент.

4. Для расширения диапазона типоразмеров нагреваемых лент целесообразно использовать пространственно распределенные токовые контуры прямоугольной формы с изменяющимся углом наклона крайних зон контура или трехконтурные индукционные системы.

### **ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ЛЕНТ**

#### **3.1. Электромагнитные и тепловые характеристики высокочастотного индукционного нагрева электропроводных лент**

Одной из основных задач индукционного способа термической обработки металлических лент является обеспечение определенного температурного режима нагрева ленты [1]. Металлическая лента нагревается в процессе ее перемещения в переменном электромагнитном поле индуктора. Заданный температурный режим определяется, в первую очередь, распределением джоулевых тепловыделений, связанных с протеканием индуцированных токов в электропроводной среде.

Поиск геометрии электромагнитных систем индукционного нагрева электропроводных тел по условию, накладываемому на распределение поля или связанных с ним характеристик, по существу является задачей синтеза в теории электромагнитного поля. В этой главе обратная задача формулируется как оптимизационная параметрическая задача для определенного класса конфигураций контуров.

Решение обратной задачи при учете совместного проявления тепловых и электромагнитных процессов в движущихся электропроводных средах с трехмерной структурой полей представляет собой важную и в то же время трудную в расчетном отношении проблему. Здесь

оправданным оказывается использование приближенных методов расчета [2, 3], например, асимптотических, которые представлены в главе 1 и позволяющие учесть наиболее существенные геометрические, электро- и теплофизические особенности электромагнитных систем. В этом случае удастся найти основные геометрические параметры электромагнитной системы при заданных условиях распределения количества тепловой энергии, выделившейся в процессе движения ленты в поле индуктора. Найденные геометрия системы и распределение температуры ленты могут быть исходными при использовании более точных, но и более трудоемких методов расчета.

В данном подразделе рассматривается высокочастотный индукционный нагрев электропроводных лент. Поэтому принимается, что поле создается индуктором без сердечника, выполненным в виде катушечной рамки в общем случае пространственной конфигурации. Такой контур пространственной конфигурации [4, 5] показан на рис. 3.1 жирной линией.

Распределение температуры в ленте определяется, в первую очередь, количеством переданной активной энергии электромагнитного поля, которое обуславливает равное ей количество выделяющегося тепла. На распределение температуры влияют также такие факторы, как теплопроводность и теплопередача с поверхности излучением. Только в случае незначительного влияния указанных факторов распределение температуры будет определяться величиной переданной тепловой энергии. В данном подразделе температура ленты считается относительно невысокой, что позволяет не учитывать теплопередачу излучением.

Рассмотрим электромагнитные и теплофизические характеристики электромагнитной системы высокочастотного индукционного нагрева металлических лент с позиции возможности использования приближенных

математических моделей. При этом помимо электромагнитных параметров уделим внимание условиям, позволяющим при разработке математических моделей не учитывать явления теплопроводности.

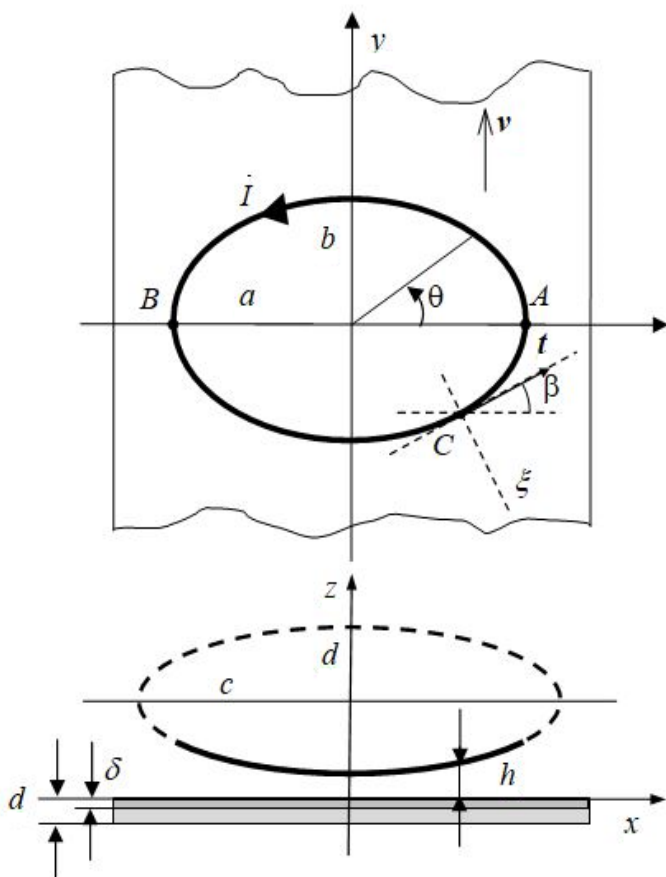


Рис. 3.1. Геометрия электромагнитной системы для определения основных параметров процесса нагрева

### 3.1.1. Математическая модель электромагнитной системы высокочастотного нагрева металлических лент

Считается, что переменное магнитное поле создается индуктором, который можно представить контуром с переменным током  $I$ , расположенным над движущейся со скоростью  $v$  плоской электропроводной лентой толщиной  $d$ . В металлической ленте, которая обладает электропроводностью  $\gamma$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu$ , вследствие протекания вихревых токов выделяется тепловая энергия.

При использовании высоких частот вследствие поверхностного эффекта индуцированный ток распределяется только в тонком поверхностном слое ленты и при выполнении условия

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{d} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \mu_0 \gamma}} \ll 1, \quad (3.1)$$

где  $\delta$  – глубина проникновения поля, применима математическая модель индуктора в виде контура с током, расположенного над электропроводным полупространством [6].

Как было показано, существенное упрощение математической модели может быть получено при выполнении условия малости введенного в главе 1 параметра

$$\varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{1}{h} \frac{\mu}{\sqrt{\omega \mu \mu_0 \gamma}}, \quad (3.2)$$

где  $h$  – расстояние от точек контура до поверхности раздела сред. В квазистационарном случае решение для поля над электропроводной средой может быть записано в виде асимптотического ряда для величины поля (1.41) – (1.44) и

плотности потока активной мощности  $p_z$  внутрь электропроводного тела (1.47). Члены ограниченного ряда представляют собой функции от поля линейного тока самого контура или его зеркального отражения от границы раздела сред. Их выражения в виде одномерных интегралов могут быть легко вычислены. С ростом частоты поля влияние старших членов ряда уменьшается и на практике достаточно ограничиться лишь несколькими первыми слагаемыми. Будем учитывать, что в устройствах высокочастотного нагрева металлических лент выполняется условие малости параметра  $\varepsilon_2$ .

Дальнейшее упрощение расчетной модели связано с удаленностью области, в которой необходимо определять поле, от контура с током. В установках индукционного нагрева индуктор располагают вблизи поверхности металлической ленты и для области пространства вблизи проводника

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_d = d_3/D \ll 1, \quad (3.3)$$

где  $d_3$  – расстояние от точек области до проводника или его зеркального отражения относительно плоской границы раздела сред,  $D$  – характерный размер контура. Для точек на поверхности  $d_3 = (h^2 + \xi^2)^{1/2}$ .

Будем считать, кроме того, что угол наклона  $\alpha$  (рис. 1.13) касательной к контуру  $t$  мал, что позволяет, пренебрегая возникающими ошибками (1.49) и (1.52), считать ток направленным параллельно плоской граничной поверхности.

Указанные ограничения, характерные для высокочастотного индукционного нагрева металлических лент, дают возможность для описания электромагнитного поля использовать модель локально двумерного поля.

Для высокочастотного нагрева, когда параметр  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  оказывается достаточно малым, можно учитывать только

несколько первых членов разложения в асимптотический ряд выражений для векторного потенциала  $\dot{\mathbf{A}}$  (1.55), индукции магнитного поля  $\dot{\mathbf{B}}$  (1.57) и плотности потока электромагнитной энергии  $p_z$  внутрь металлической поверхности (1.63), которая определяет поверхностную плотность выделяющейся тепловой мощности. Вначале, прежде чем выполнять конкретные расчеты, проанализируем характерные значения электромагнитных и тепловых параметров высокочастотного индукционного нагрева металлической ленты. В этом случае удовлетворительная точность, достаточная для выполнения оценочных расчетов, достигается при учете лишь первого члена разложения в ряд по параметру  $\varepsilon$ . Тогда в модели локально двумерного поля при  $z = 0$  имеем

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0 \dot{I}_0 \mathbf{t}}{\pi} \frac{\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \frac{h}{(\xi^2 + h^2)}; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{B}}_\xi + \dot{\mathbf{B}}_z = & -\frac{\mu_0 \dot{I}_0}{\pi} \left\{ \frac{h\mathbf{e}_\xi - \xi\mathbf{e}_z}{\xi^2 + h^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\mu}{\sqrt{i\omega\mu\mu_0\gamma}} \frac{(\xi^2 - (z+h)^2)\mathbf{e}_\xi + 2\xi(z+h)\mathbf{e}_z}{(\xi^2 + h^2)^2} \right\}; \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$p_z = \frac{I^2 \zeta}{2\pi^2 h^2} \cdot \frac{1}{(1 + \xi^2 / h^2)^2}, \quad (3.6)$$

где  $\zeta = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}}$  – действительная часть величины поверхностного импеданса.

Выражения (3.4) – (3.6) получены в предположении отсутствия движения электропроводной среды в магнитном поле. Оценим правомерность такого допущения для процессов индукционного нагрева движущейся металлической ленты. Для этого сравним напряженность

электрического поля на поверхности раздела сред  $z = 0$ , обусловленную переменным магнитным полем  $\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\dot{\mathbf{A}}$ , где векторный потенциал определен в (3.4), и напряженность электрического поля, связанную с движением в магнитном поле  $\dot{\mathbf{E}}_v = \mathbf{v} \times \dot{\mathbf{B}}$ .

В соответствие с (3.4) вектор  $\dot{\mathbf{E}}$  имеет только касательную к поверхности составляющую:

$$\dot{\mathbf{E}}(z = 0) = \dot{E}_t \mathbf{t} = -\frac{i\sqrt{2}\zeta}{\pi} \frac{h}{\xi^2 + h^2} e^{i\pi/4} \mathbf{t}. \quad (3.7)$$

Видно, что  $E_t$  принимает максимальное значение  $E_{t \max}$  непосредственно под контуром при  $\xi = 0$ .

Составляющая напряженности электрического поля  $\dot{\mathbf{E}}_v$ , касательная к поверхности, с учетом (3.5) будет

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_v(z = 0) &= \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \dot{B}_z(z = 0) = \\ &= -\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \frac{i2\sqrt{2}\zeta}{\pi\omega} \frac{\xi h}{(\xi^2 + h^2)^2} e^{-i\pi/4}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из последнего выражения видно, что непосредственно под проводником контура  $\dot{\mathbf{E}}_v(\xi = 0, z = 0) = 0$ . Напряженность электрического поля, обусловленная движением электропроводной среды в магнитном поле, достигает максимального значения  $E_{v \max}$  в точке  $\xi_{\max} = h/\sqrt{3}$ , где оно оказывается равным

$$\dot{\mathbf{E}}_{v \max} = -\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \frac{i\zeta}{\pi\omega h^2} \frac{9\sqrt{2}}{8\sqrt{3}} e^{-i\pi/4}. \quad (3.9)$$

Для сравнения напряженностей полей введем параметр, равный их отношению:

$$\varepsilon_v = \frac{|\dot{\mathbf{E}}_v|}{|\dot{\mathbf{E}}|} = \frac{9}{8\sqrt{3}} \frac{v}{\omega h}. \quad (3.10)$$



В случае, если  $\varepsilon_v \ll 1$ , распределение электромагнитного поля и индуцированных токов в рассматриваемой системе будет таким же, как и при скорости  $v = 0$ . Так, например, при  $v \sim 1$  м/с,  $h \sim 3$  см, характерных для индукционных установок термической обработки металлических лент, уже для частот  $\omega \geq 2\pi \cdot 50$  рад/с расчет электромагнитных полей может проводиться без учета движения лент. Учитывая, что параметр  $\varepsilon_v$  оказывается малым, в данном подразделе распределение электромагнитного поля будет проводиться без учета скорости электропроводной ленты.

Необходимо отметить, что выражение (3.10) для параметра  $\varepsilon_v$  получено с использованием формул (3.4) и (3.5), где уже предполагается условие малости другого параметра  $\varepsilon_2$ , что имеет место для достаточно больших частот поля.

### **3.1.2. Поверхностная плотность потока энергии электромагнитного поля в нагреваемую металлическую ленту**

Рассмотрим процесс передачи электромагнитной энергии элементу объема металлической ленты  $\Delta V = \Delta x \Delta y d$ , который движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в направлении координаты  $y$ . Без ограничения общности будем считать, что в момент времени  $t$  элемент объема находится в точке с координатами  $x, y = y_0 + vt$ , где  $y_0$  – координата, в которой находится рассматриваемый объем в момент времени  $t = 0$ . Считается, что процесс нагрева начинается в области, где поле отсутствует при  $y \rightarrow -\infty$ . К моменту времени  $t$  элементу объема будет в общем случае передана энергия

$$\begin{aligned} \Delta W(x, y) &= \Delta x \Delta y \int_{-\infty}^t p_z(x, y_0 + vt) dt = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y}{v} \int_{-\infty}^y p_z(x, y) dy. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Объемная плотность энергии  $w(x, y)$ , полученной элементом ленты, достигшем в процессе движения положения с координатами  $x, y$ , оказывается

$$w(x, y) = \frac{\Delta W}{\Delta x \Delta y d} = \frac{1}{vd} \int_{-\infty}^y p_z(x, y) dy, \quad (3.12)$$

где распределение по ширине ленты количества выделившегося тепла характеризуется величиной

$$P(x, y) = \int_{-\infty}^y p_z dy, \quad (3.13)$$

которую можно назвать линейной плотностью потока переданной энергии в нагреваемую ленту.

Суммарное количество электромагнитной энергии, переданной в течение всего процесса нагрева, характеризуется линейной плотностью потока всей выделившейся энергии  $P(x) = P(x, \infty)$ . Результирующая температура определенного участка ленты зависит от величины  $P(x)$ , а в случае незначительной теплопередачи эта величина непосредственно определяет температуру соответствующего участка ленты. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделяться распределению по ширине ленты величины  $P(x)$ .

Как следует из (3.6), характерным размером области, в пределах которой происходит передача электромагнитной энергии в металл, является высота  $h$  расположения элемента контура над поверхностью раздела сред. В процессе движения ленты передача электромагнитной энергии в среду происходит неравномерно. Выделение тепла незначительно

вдали от контура с током и резко увеличивается, когда участок проводящей среды проходит под контуром.

На рис. 3.2 показано распределение относительной величины плотности потока электромагнитной энергии (3.6) в направлении, перпендикулярном направлению протекания тока контура [2, 13].

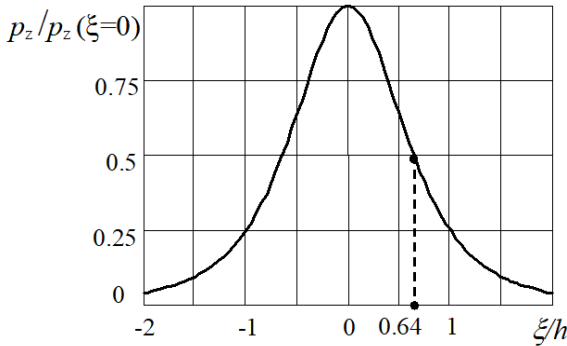


Рис. 3.2. Изменение плотности потока активной энергии в направлении, перпендикулярном направлению протекания тока контура

На рисунке отмечено значение расстояния  $\xi_{1/2}/h = 0,64$ , при котором плотность потока энергии снижается вдвое. Характерным размером, который будет использован в дальнейшем, служит также значение  $\xi_{\max}/h$ , при котором модуль производной  $p_z$  по координате  $\xi$  будет иметь наибольшее значение

$$\xi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{5}} h \approx 0,45h. \quad (3.14)$$

В связи с тем, что линейная плотность переданной энергии  $P(x)$  зависит от характерного времени, в течение которого соответствующий элемент ленты находился под контуром, то ясно, что  $P(x)$  будет зависеть от ориентации участка контура относительно направления скорости  $\mathbf{v}$ . При

этом влияние геометрии контура оказывается различным для участков вдали от краев (точка  $C$  на рис. 3.1) и вблизи края контура, где направление касательной к контуру параллельно вектору скорости ленты (точки  $A$  и  $B$  на рис. 3.1) [7, 8]. Оценим величину  $P(x)$  отдельно для двух указанных участков контура.

### 3.1.2.1. Линейная плотность потока энергии поля, переданной металлическому листу вдали от края контура

Влияние удаленных участков контура на процесс нагрева будет незначительным, поскольку плотность потока электромагнитной энергии в проводящую среду быстро уменьшается с удалением от элемента контура с током. В этом случае при интегрировании в (3.13) можно пренебречь кривизной контура вблизи выделенной точки  $x_C$  и считать, что поле создано только прямолинейным проводником (рис. 3.3). Реальная геометрия контура показана на рисунке пунктирной кривой.

Выполняя интегрирование, найдем

$$P(C) = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x_C, y(\xi, \beta)) dy = \frac{I^2 \zeta}{2\pi h_C \cos \beta}, \quad (3.15)$$

где  $y(\xi, \beta) = y_C - \frac{\xi}{\cos \beta}$ . Видно, что количество выделяющейся тепловой энергии будет тем больше, чем больше угол наклона участка контура  $\beta$ .

Заметим, из (3.15) следует, что для обеспечения равномерного по ширине движущейся полосы суммарного количества выделяющегося тепла, необходимо выбрать профиль зазора между контуром и проводящей средой из условия

$$h_c \cos\beta = \text{const}. \quad (3.16)$$

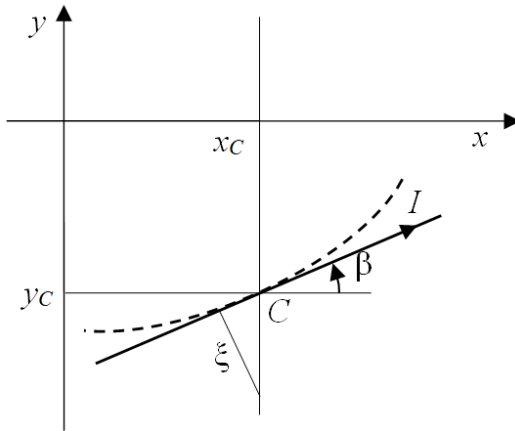


Рис. 3.3. Реальная геометрия контура показана на рисунке пунктирной кривой

Последнее условие означает, что равномерное по ширине тепловыделение в листе может быть достигнуто либо под прямолинейными участками плоского контура, либо под криволинейными участками пространственного контура с соответствующим образом изменяющимся расстоянием до поверхности металлического листа.

### 3.1.2.2. Линейная плотность потока энергии поля вблизи края контура

Выражение (3.15) для линейной плотности тепловыделений  $P(x)$  и соответственно условие (3.16) не будут справедливыми для участков перемещающейся ленты под контуром вблизи его края (координата  $x$  находится в малой окрестности координаты  $x_d$ ). Здесь при интегрировании по (3.13) необходимо учитывать конечный

радиус кривизны и зависимость угла наклона  $\beta$  от координаты  $y$ .

Для выполнения оценок заменим реальную геометрию контура дугой окружности постоянного радиуса  $R$ , равного радиусу кривизны контура в точке  $A$  (рис. 3.4).

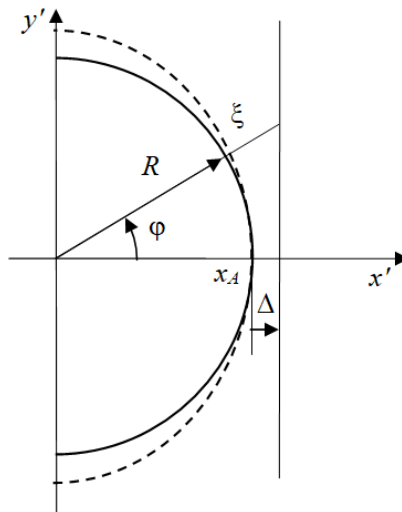


Рис. 3.4. К оценке линейной плотности переданной энергии вблизи края контура

Пунктирная кривая на рисунке соответствует действительной конфигурации контура, а сплошная – полуокружности радиуса  $R$ . Величина  $P(x)$  определяется вблизи края контура, когда отношение  $\Delta/R$  мало, и поэтому погрешность, связанная с отличием геометрии контура от дуги окружности, будет незначительной. Интегрирование плотности потока электромагнитной энергии по (3.13) будем проводить в пределах азимутального угла  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ , учитывая тем самым, что влияние удаленных участков контура на величину линейной плотности переданной энергии незначительно. На рис. 3.4 показаны декартовы

координаты  $x', y'$ , которые отсчитываются от центра кривизны, величина  $\Delta$  отсчитывается от края контура в направлении координаты  $x'$ .

Расстояние  $\xi$  и координата  $y'$ , выраженные через введенные параметры, будут

$$\xi = \frac{R + \Delta}{\cos \varphi} - R, \quad y' = R \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.17)$$

Подставляя эти значения в (3.13), находим выражение для линейной плотности переданной энергии вблизи края контура  $P(x_A + \Delta)$  в виде

$$P(x_A + \Delta) = \frac{2I^2 \zeta R}{\pi^2 h_A^2} J(h^*, \Delta^*). \quad (3.18)$$

Здесь  $h^* = h/R$ ,  $\Delta^* = \Delta/h$ , функцией  $J(h^*, \Delta^*)$  является

$$J(h^*, \Delta^*) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\left[ \cos^2 \varphi + \left( \frac{1 - \cos \varphi}{h^*} - \Delta^* \right)^2 \right]^2}. \quad (3.19)$$

В частном случае непосредственно под краем контура при  $\Delta = 0$  удастся получить простую оценку интеграла (3.19). Действительно, учитывая, что  $(h^*)^2 \ll 1$  и выполняя

замену переменных  $z = \sqrt{\frac{2}{h^*}} \sin \frac{\varphi}{2}$ , без учета зависимости  $h^*$

от угла  $\varphi$  найдем

$$J(h^*, 0) \approx \sqrt{2h^*} \int_0^{\sqrt{1/h^*}} \frac{dz}{(1+z^4)^2} = \sqrt{h^*} \left( \frac{3\pi}{8} + O(h^{*2}) \right). \quad (3.20)$$

Подставляя найденное значение в (3.18), запишем выражение для линейной плотности выделившегося тепла в электропроводной среде после ее прохождения под краем контура с током в точке  $A$ :

$$P(x_A) = \frac{3I^2 \zeta R^{1/2}}{4\pi h_A^{3/2}}. \quad (3.21)$$

Сравнение (3.21) и (3.15) показывает, что с увеличением высоты  $h$  тепловыделение вблизи края падает быстрее, чем вдали от него и, кроме того, вблизи края необходимо учитывать радиус кривизны контура, с ростом которого возрастает количество переданной электромагнитной энергии.

### 3.1.3. Оценка основных параметров процесса нагрева

#### 3.1.3.1. Выравнивание температуры по толщине металлической ленты

Характерным размером в поперечном к ленте направлении, в пределах которого происходит передача электромагнитной энергии в металл, является глубина проникновения поля  $\delta$ , которая для высокочастотного способа нагрева обычно значительно меньше толщины ленты. Выделившееся тепло затем распространяется за счет теплопроводности вглубь металлического листа. Если этот процесс протекает достаточно быстро, то через определенное время по толщине листа установится одинаковая температура. Сравним характерное время установления температуры по толщине  $\tau_d$  с характерным временем нагрева ленты  $\tau_p$ . Это необходимо для того, чтобы определить, в каких случаях нужно учитывать совместно процессы выравнивания температуры и тепловыделения, а когда эти задачи можно разделить.

Так как в реальных условиях толщина ленты  $d$  значительно меньше высоты  $h$ , которая определяет размеры области действия поля в плоскости ленты, то для оценки времени  $\tau_d$  можно рассматривать одномерную задачу



распространения тепла, выделившегося в тонком поверхностном слое внутри полупространства. Температура в произвольной точке среды определяется из выражения [9]

$$T(z, t) = \frac{Q}{c\rho\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{z^2}{4at}}, \quad z \leq 0, \quad (3.22)$$

где  $Q$  – поверхностная плотность выделившегося количества тепла,  $a = \lambda / c\rho$  – температуропроводность, определяемая через коэффициент теплопроводности  $\lambda$  удельную теплоемкость  $c$  и плотность среды  $\rho$ ,  $t$  – время.

Если через определенное время температура данного элемента листа металла станет однородной по толщине, то при отсутствии теплоотдачи она окажется равной

$$T_\infty = \frac{Q}{c\rho d}. \quad (3.23)$$

В качестве оценки времени  $\tau_d$  установления однородной температуры примем время, через которое в (3.22) на границе  $z = 0$  температура примет значение  $T_\infty$ , то есть  $T(0, \tau_d) = T_\infty$  (заметим, что такое условие возможно, так как оценка проводится для теплопередачи в полупространстве, а не в листе ограниченной толщины). Отсюда получим оценку времени установления температуры:

$$\tau_d \sim \frac{c\rho d^2}{\pi\lambda}. \quad (3.24)$$

В качестве времени нагрева листа  $\tau_p$  может быть выбрано характерное время прохождения участка металлической ленты под элементом проводника:  $\tau_p = h/v$  для участков металлического листа вдали от края контура и  $\tau_p = D/v$  для участков листа вблизи края контура.

Судить о том, успевает ли установиться однородная температура в процессе нагрева, можно по величине отношения  $\tau_d / \tau_p$  :

$$\varepsilon_d = \frac{\tau_d}{\tau_p} = \begin{cases} \frac{c\rho d^2 v \cos\beta}{\pi\lambda h}, & \text{вдали от краев (точки C);} \\ \frac{c\rho d^2 v}{\pi\lambda D}, & \text{вблизи точек A и B.} \end{cases} \quad (3.25)$$

В табл. 3.1 приведены значения  $\varepsilon_d$  для лент толщиной  $d = 10^{-3}$  м и  $d = 3 \cdot 10^{-3}$  м [перед наклонной чертой и после нее даны значения, соответствующие верхнему и нижнему выражениям в (3.25)]. Выбраны следующие значения размеров индуктора и скорости, характерные для индукционного способа нагрева:  $D = 0,2$  м,  $h = 3 \cdot 10^{-2}$  м,  $\cos\beta = 1$ ,  $v = 10^{-1}$  м/с. Даны значения параметра  $\varepsilon_d$  при нагреве лент из следующих материалов: алюминия ( $c = 8,8 \cdot 10^2$  Дж/кг·К,  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 2,1 \cdot 10^2$  Вт/м·К); латуни ( $c = 3,8 \cdot 10^2$  Дж/кг·К,  $\rho = 8,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 85,5$  Вт/м·К); стали ( $c = 4,6 \cdot 10^2$  Дж/кг·К,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 45,4$  Вт/м·К).

Таблица 3.1. Значения параметра  $\varepsilon_d$

Толщина $d$ , м	Алюминий	Латунь	Сталь
$10^{-3}$	$\frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{1,8 \cdot 10^{-3}}$	$\frac{4 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-3}}$	$\frac{8,4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}}$
	$\frac{0,11}{1,6 \cdot 10^{-2}}$	$\frac{0,36}{5,5 \cdot 10^{-2}}$	$\frac{0,75}{1,1 \cdot 10^{-1}}$

Из представленных данных видно, что практически всегда температура по толщине становится однородной уже во время прохождения ленты под соответствующими

участками контура. Исключение касается толстых лент, движущихся достаточно быстро (нагрев должен осуществляться индукторами большой мощности). Однако и в этом случае температура становится однородной за время, соответствующее прохождению листа металла под всем контуром индуктора.

Исходя из выполненной оценки, в математических моделях индукционного нагрева температура металлических лент может быть принята везде однородной по толщине за исключением участков, проходящих в данный момент времени под контуром с током.

### **3.1.3.2. Теплопередача теплопроводностью вдоль поверхности металлической ленты**

При прохождении элемента металлической ленты под проводником в металл вводится тепловая энергия, которая затем переносится движением в направлении скорости перемещения ленты. С другой стороны, температура ленты непосредственно под контуром резко возрастает, и из-за возникшего градиента температуры появляются потоки тепла, обусловленные теплопроводностью. В данном случае задачей является сравнение двух процессов теплопередачи вдоль поверхности листа: теплопроводностью и переносом тепла движением среды. Параметры процессов теплопередачи оказываются различными для участков ленты, проходящих под контуром в промежуточных точках  $C$  и у краев контура вблизи точек  $A$  и  $B$  (рис. 3.1). Поэтому, как и прежде, рассмотрим эти участки отдельно.

Теплопередача вблизи промежуточных точек контура. Оценку выполним для случая, когда градиент температуры, а значит и тепловой поток, максимальные, а именно в точке  $C$ , для которой проводник ориентирован перпендикулярно вектору скорости,  $\beta = 0$ . Будем вначале предполагать, что изменение температуры ленты вследствие теплопроводности

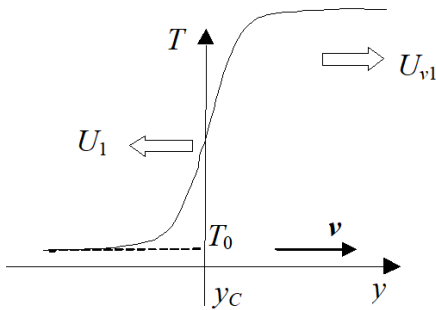


Рис. 3.5. Направления тепловых потоков под промежуточными участками контура

мало по сравнению с изменением температуры, связанной с передачей энергии электромагнитным полем. Это предположение подтвердим полученными затем результатами.

В рамках сделанного предположения прирост температуры обусловлен наличием источников тепла в виде

поступающей энергии электромагнитного поля. Объемная плотность энергии  $w(x, y)$  в (3.12), полученная элементом ленты, достигшим в процессе движения положения с координатами  $x, y$ , вследствие теплоемкости материала ленты, приведет к приросту температуры данного элемента:

$$\Delta T(x, y) = T(x, y) - T_0 = \frac{1}{c\rho} \int_{-\infty}^y p_z(x, y) dy, \quad (3.26)$$

где  $T_0$  – температура перед нагревом.

Наличие градиента температуры и движения среды обуславливают соответствующие тепловые потоки. Рис. 3.5 качественно иллюстрирует направления потоков тепловой энергии, связанной с теплопроводностью  $U_1$  и переносом тепла движением среды  $U_{v1}$

Вследствие теплопроводности поток тепла, направленный в сторону, обратную движению, будет

$$U_1(\xi) = -\lambda \frac{dT}{dy} \Delta x d = -\frac{\lambda \Delta x}{c\rho v} p_z(\xi, h). \quad (3.27)$$

Непосредственно под контуром при  $\xi = 0$  достигается максимальное значение  $U_{1max} = U_1(0)$ .

Сравним  $U_{1max}$  с максимальным потоком тепла, переносимого движением нагретого металла:

$$U_{v1} = c\rho v\Delta x d(T(\infty) - T_0), \quad (3.28)$$

где  $(T(\infty) - T_0)$  определяется по (3.16) при  $y \rightarrow \infty$  и поэтому

$$U_{v1} = \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} p_z(\xi, h) d\xi. \quad (3.29)$$

Для характеристики теплопередачи теплопроводностью в направлении вдоль вектора скорости по сравнению с теплопередачей движением введем следующий параметр:

$$\varepsilon_{L1} = \left| \frac{U_{1max}}{U_{v1}} \right| = \frac{\lambda}{c\rho v} \cdot \frac{p_z(0, h)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_z(\xi, h) d\xi}. \quad (3.30)$$

Подставляя значение  $p_z(\xi, h)$  из (3.6) и проведя вычисления, находим окончательное выражение для  $\varepsilon_{L1}$ :

$$\varepsilon_{L1} = \frac{2\lambda}{\pi c\rho h v}. \quad (3.31)$$

Для лент из алюминия, латуни и стали при  $h = 3 \cdot 10^{-2}$  м и скорости движения  $v = 10^{-1}$  м/с значения параметра  $\varepsilon_{L1}$  приведены в таблице 3.2.

Из таблицы видно, что во всех случаях и даже при скорости в несколько сантиметров в секунду за счет скачка температуры в области проводника контура теплопередачей теплопроводности можно пренебречь по сравнению с переносом тепла за счет движения нагретого металла.

Таблица 3.2. Значения параметров  $\varepsilon_{L1}$ ,  $\varepsilon_{L2}$ 

Параметры	алюминий	латунь	сталь
$\varepsilon_{L1}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{L2}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$

Теплопередача вблизи краев контура. Вблизи краев контура с наружной его части градиент температуры направлен перпендикулярно движению нагреваемого металла. Ввод тепла происходит на достаточно протяженном участке. Для проведения оценок будем считать, что тепло подводится равномерно на протяжении участка, равного характерному размеру контура  $D$ .

Количество тепла, поступившего в участок ленты малой длины  $\Delta y$  шириной  $2\xi$ , составит

$$\Delta W_{v2} = \int_{-\xi}^{\xi} p_z(\xi, h) \Delta y \Delta t d\xi, \quad (3.32)$$

где  $\Delta t = D/v$  – время нагрева участка.

Количество тепла, отданного теплопроводностью с боковой поверхности участка, будет

$$\Delta W_2 = - \int_{-D/2v}^{D/2v} \lambda \frac{\partial T(\xi, y)}{\partial \xi} d\Delta y dt = - \frac{\lambda d\Delta y}{v} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{\partial T(\xi, y)}{\partial \xi} dy. \quad (3.33)$$

На рис. 3.6 показано направление потока тепловой энергии, связанного с теплопроводностью. Учтен поток тепла только со стороны, внешней по отношению к контуру. Это обусловлено тем, что в практике термической обработки металлических лент конфигурация контура выбирается такой, чтобы обеспечить наиболее однородное по ширине распределение температуры. Удаленные от края контура участки обеспечивают несимметричное распределение температуры. Результирующее распределение с учетом

тепловыделений вблизи края качественно показано на рис. 3.6.

Полагая, что в пределах длины  $D$  края контура тепло равномерно поступает в выделенный элемент объема, и предполагая, что  $\Delta W_2$  мало по сравнению с  $\Delta W_{v2}$ , получаем, что температура линейно растет по мере перемещения вдоль координаты  $y$ :

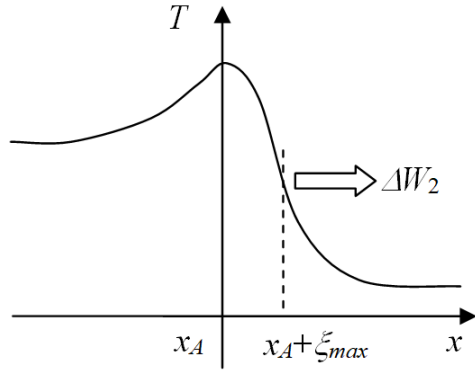


Рис. 3.6. Направление потока тепла вблизи края контура

$$T(\xi, y) - T_0 = \frac{p_z(\xi, h)}{c\rho dv} y, \quad \xi \geq 0. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.33), запишем

$$\Delta W_2 = \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \frac{\Delta y D^2}{2v^2} \cdot \frac{\partial (p_z(\xi, h))}{\partial \xi}. \quad (3.35)$$

Отношение поступившей энергии в элементы ленты шириной  $2\xi$  к отданной вследствие теплопроводности имеет вид

$$\frac{\Delta W_2}{\Delta W_{v2}} = \frac{D}{2v} \cdot \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \frac{\partial (p_z(\xi, h))}{\partial \xi} \bigg/ \int_{-\xi}^{\xi} p_z(\xi, h) d\xi. \quad (3.36)$$

С учетом (3.6) последний сомножитель в (3.36) после выполнения операций дифференцирования и интегрирования примет вид

$$F(\chi) = \frac{\partial (p_z(\xi, h))}{\partial \xi} \bigg/ \int_{-\xi}^{\xi} p_z(\xi, h) d\xi =$$

$$= \frac{16\chi}{h^2(1+\chi^2)^2 \cdot [\chi + (1+\chi^2)\operatorname{arctg}(\chi)]}, \quad (3.37)$$

где  $\chi = \xi/h$ .

Как видно из (3.37), отношение энергий зависит от ширины выделенного участка. Наибольшая величина  $\Delta W_{2 \max}$  будет при таком  $\chi = \chi_{\max}$ , где производная температуры по  $\xi$  имеет максимальное значение. Это соответствует максимальному значению производной  $\frac{\partial (p_z(\xi, h))}{\partial \xi}$ .

Учитывая (3.6), находим  $\chi_{\max} = 1/\sqrt{5}$ . В этой точке выражение (3.37) принимает конкретное значение, равное  $F(\chi_{\max}) = 2,6$ .

Безразмерный параметр  $\varepsilon_{L2}$ , равный отношению тепловой энергии  $W_{2 \max}$ , отдаваемой участком проводящей среды, который перемещается вблизи края контура, к энергии  $W_{v2}$ , поступающей в этот участок, с учетом (3.36) следующий:

$$\varepsilon_{L2} = \frac{W_{2 \max}}{W_{v2}} = 1,3 \cdot \frac{\lambda}{c\rho} \cdot \frac{D}{vh^2}. \quad (3.38)$$

В таблице 3.2 представлены значения  $\varepsilon_{L2}$  для прежних параметров нагрева. Видно, что в большинстве случаев теплоотдача теплопроводностью вблизи краев остается незначительной по сравнению с теплопритоком, обусловленным джоулевой диссипацией электромагнитной энергии. Только при относительно небольших скоростях тепловые потоки могут оказаться сравнимыми, особенно для материалов с высоким значением температуропроводности (алюминий, медь и др.).

На основании выполненных оценок основных параметров нагрева движущихся металлических лент в переменном высокочастотном поле индукторов без



сердечников вытекают следующие положения, которые могут быть использованы при разработке математических моделей рассматриваемых процессов:

1) По толщине в любой точке металлических лент вне области непосредственно под контуром с током температуру можно считать однородной.

2) В направлениях вдоль поверхности нагреваемой металлической ленты теплопередача за счет теплопроводности пренебрежимо мала по сравнению с теплопереносом, обусловленным движением среды и теплопритоком за счет джоулевой диссипации электромагнитной энергии. В этом смысле процесс нагрева можно назвать адиабатическим нагревом тонких металлических лент. Прирост температуры в любой точке движущейся ленты (с ограничениями, приведенными в предыдущем пункте) будет

$$\Delta T(x, y) = \frac{P(x, y)}{c\rho v d}, \quad (3.39)$$

где  $P(x, y) = \int_{-\infty}^y p_z(x, y) dy$  – линейная плотность потока выделившейся тепловой энергии.

### 3.1.4. Примеры расчета распределения температуры по ширине металлической ленты

Сделанные выводы иллюстрируются ниже путем сравнения результатов расчета температуры латунной ленты, проведенных в предположении адиабатического нагрева и с учетом теплопроводности. Лента толщиной  $d = 3 \cdot 10^{-3}$  м и шириной 0,6 м нагревается, проходя под плоским круглым контуром радиуса  $a = 0,25$  м. Расстояние между контуром и латунной лентой  $h = 0,04$  м. По контуру протекает ток с

частотой  $f = 10^4$  Гц. Расчеты проведены для двух значений скорости ленты:  $v = 0,25$  м/с и  $v = 0,01$  м/с.

При выбранных исходных данных параметры  $\varepsilon_d, \varepsilon_{L1}$  и  $\varepsilon_{L2}$  имеют значения, приведенные в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Значения параметров  $\varepsilon_d, \varepsilon_{L1}$  и  $\varepsilon_{L2}$  процесса нагрева латунной ленты

$v, \text{ м/с}$	$\varepsilon_d$	$\varepsilon_{L1}$	$\varepsilon_{L2}$
0,25	$0,68 / 5,4 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$
0,01	$2,7 \cdot 10^{-2} / 2,2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,1

Видно, что во всех случаях температура по толщине ленты успевает выровняться за время прохождения участков ленты под контуром с током. Исключение составляет значение для промежуточных точек контура в случае, когда  $\varepsilon_d = 0,68$ . Однако и при этом значении температура выравнивается уже за время перемещения ленты на расстояние, в несколько раз превышающее  $h$ , и все еще значительно меньшим, чем время прохождения под всем контуром. Из данных таблицы 3.3 также следует, что вдоль поверхности ленты для скорости  $v = 0,25$  м/с процесс является адиабатическим. Однако для скорости ленты  $v = 0,01$  м/с (обычно скорости лент в технологических процессах значительно больше этого значения) процесс нельзя считать адиабатическим и при нахождении распределения температуры необходимо учитывать теплопроводность ленты.

Сделанные заключения подтверждаются конкретными расчетами распределения температуры по ширине ленты на расстоянии вдоль направления движения 0,5 м от центра кругового контура. На рис. 3.7 и 3.8 сплошные кривые

соответствуют результатам, полученным с использованием асимптотического метода расчета в предположении адиабатического нагрева. Пунктирные кривые соответствуют данным совместного решения электромагнитной и тепловой задач, полученные методом, в котором не накладывались ограничения на параметры нагрева [10].

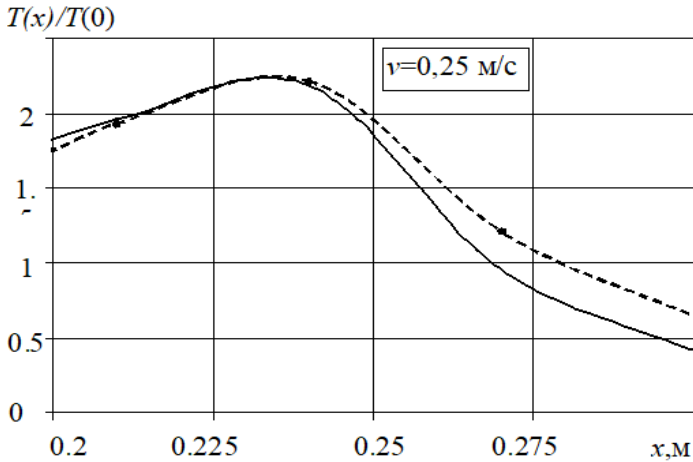


Рис. 3.7. Распределение температуры при  $v = 0,25 \text{ м/с}$

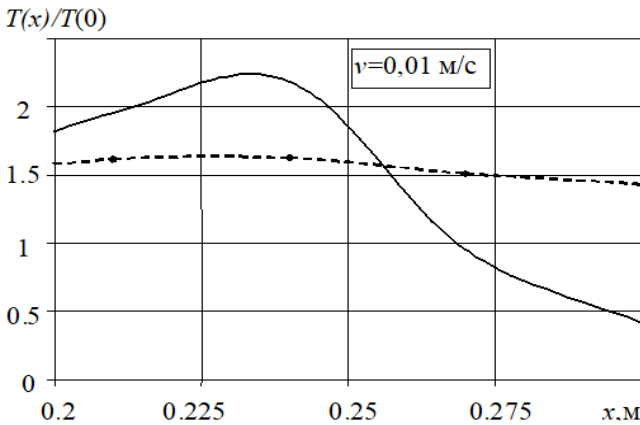


Рис. 3.8. Распределение температуры при  $v = 0,01 \text{ м/с}$

Видно, что при скорости ленты  $v = 0,25 \text{ м/с}$  результаты двух подходов удовлетворительно согласуются друг с другом, и в этом случае действительно выполняется условие адиабатического нагрева. Некоторое различие в области за контуром обусловлено расхождением в результатах расчета плотности потока электромагнитной энергии указанными способами, а не пренебрежением явлением теплопроводности.

Для скорости ленты  $v = 0,01 \text{ м/с}$ , как это следует и из оценок параметров, и из результатов конкретного расчета (рис. 3.8), нагрев нельзя считать адиабатическим процессом. Явление теплопроводности приводит к существенному выравниванию температуры нагреваемой металлической ленты. Расчет в этом случае необходимо проводить с учетом совместного влияния нагрева индуцированными токами и теплопередачи, связанной с теплопроводностью и движением среды.

### **3.2. Влияние геометрических параметров контуров пространственной конфигурации на распределение джоулевых тепловыделений в проводящем полупространстве**

Подраздел 3.2 посвящен вопросам применения разработанных приближенных способов расчета трехмерных электромагнитных полей и плотности потока электромагнитной энергии к задачам нахождения геометрии пространственных контуров с током (задачам синтеза). Подобные задачи возникают во многих практических приложениях. В данной работе основное внимание уделяется исследованию геометрии контуров и распределения электромагнитных полей при условии обеспечения заданного (обычно равномерного по ширине ленты) суммарного тепловыделения в движущейся проводящей среде. Помимо практической направленности в области индукционных

способов термической обработки металлов такие исследования имеют самостоятельный характер для анализа распределения электромагнитного поля, созданного с помощью пространственных контуров, определенного класса геометрической конфигурации.

Среди наиболее перспективных методов нагрева в последнее время рассматривается нагрев с использованием индуктора без сердечника, выполняемого в виде катушечной рамки и питающегося от источника повышенной частоты. Преимуществом высокочастотного способа индукционного нагрева является возможность достижения высокой плотности передаваемой энергии, которую практически невозможно получить при низких частотах [11].

Как было показано, распределение по ширине электропроводной ленты суммарной линейной плотности потока электромагнитной энергии  $P(x) = P(x, y \rightarrow \infty)$ , которая определяет результирующую температуру ленты, зависит от следующих факторов: взаимной ориентации направления тока в контуре и скорости движения ленты, расстояния точек контура от поверхности ленты и от радиуса кривизны у края контура. Так как характерное время нахождения в электромагнитном поле точек ленты под краем контура обычно значительно больше, чем в остальной его части, то вблизи края интенсивность потока электромагнитной энергии необходимо уменьшить. Для обеспечения равномерного распределения температуры нагреваемой ленты возможны два подхода. Первым эффективным способом для этого является увеличение расстояния от контура до поверхности ленты. Это означает, что контур должен иметь пространственную конфигурацию, в котором его края приподняты и удалены от проводящей поверхности на расстояние большее, чем его центральная часть. Другой подход заключается в использовании контуров с переменным радиусом кривизны, который уменьшается

при приближении к краю контура, например плоский эллиптический контур с необходимыми длинами полуосей.

Для задания конфигурации контура с приподнятыми краями будем считать, что контур располагается на цилиндрической поверхности, которая в сечении имеет максимальные размеры  $2c$  и  $2d$  (рис. 3.1). Проекция контура на поверхность раздела сред представляет собой эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ . Геометрию контура такого класса можно описать следующими параметрическими уравнениями в пространстве:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\theta), \\ y &= b \cdot \sin(\theta), \\ z &= h_0 + d \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a}{c} \cdot |\cos(\theta)| \right)^n} \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

где  $\theta$  – полярный угол,  $h_0$  – минимальное расстояние от контура до проводящей поверхности.

Уравнения (3.40) описывают определенный класс пространственных кривых, которые характеризуются тремя безразмерными параметрами:  $d/h_0$ ,  $a/c$ ,  $n$ . В частном случае при  $n = 2$  в проекции на плоскость  $xOz$  эти уравнения описывают пространственную кривую, расположенную на поверхности эллиптического цилиндра с полуосями  $c$  и  $d$ . Чем больше показатель степени  $n$ , тем более резко изменяется расстояние от контура до плоскости в области  $x \approx c$ .

Переход от плоских к пространственным контурам усложняет проблему поиска геометрических параметров контуров, и поэтому оправданным является использование приближенных методов расчета электромагнитного поля и

плотности потока электромагнитной энергии в проводящую среду.

Покажем, что при расчете электромагнитного поля, создаваемого токовым контуром пространственной конфигурации, можно использовать модель локально двумерного поля, которая основана на замене поля пространственного контура полем прямолинейных проводников, ориентированных вдоль проекции касательной на плоскость раздела сред.

В качестве конкретного примера выберем токовый контур пространственной геометрии, который в проекции на плоскость  $xOy$  представляет окружность  $a = b = 0,25$  м с минимальным расстоянием до плоскости  $h_0 = 0,02$  м. Конфигурация контура соответствует следующим геометрическим параметрам:  $a/c = 0,5$ ;  $d/h_0 = 10$ ;  $n = 2$ . Электрофизические параметры среды типичны для латунной ленты:  $\mu = 1$ ,  $\gamma = 1,25 \cdot 10^7$  Ом<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup>. Частота поля – 10000 Гц. При этом глубина проникновения электромагнитного поля в проводящую среду составляет  $\delta = 1,42 \cdot 10^{-3}$  м.

В таблице 3.4 представлены два малых параметра:  $\varepsilon_2$  характеризует возможность использования асимптотического разложения,  $\varepsilon_3$  связан с возможностью применения приближения локально двумерного поля (максимальные погрешности приведены в третьей строке). На рис. 3.9 представлены зависимости распределения линейной плотности потока выделившейся тепловой энергии  $P(x)$  под контуром пространственной геометрии описанного класса, рассчитанные с использованием трехмерной модели с асимптотическим разложением (кривая 1) и с помощью модели локально двумерного поля (кривая 2). Зависимости  $P(x)$  для двух сравниваемых моделей на рис. 3.4 построены в абсолютных единицах.

Таблица 3.4. Значения параметров  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 

	$\varepsilon_2 = \sqrt{2}\delta/h$	$\varepsilon_3 = h/a$
$\theta = \pi/2$	0,1	0,08
$\theta = 0$	0,043	0,19
$\alpha_{\max} = 6^\circ$	$\delta_{\parallel} = 5,7 \cdot 10^{-3}$	$\delta_{\perp} = 0,039$

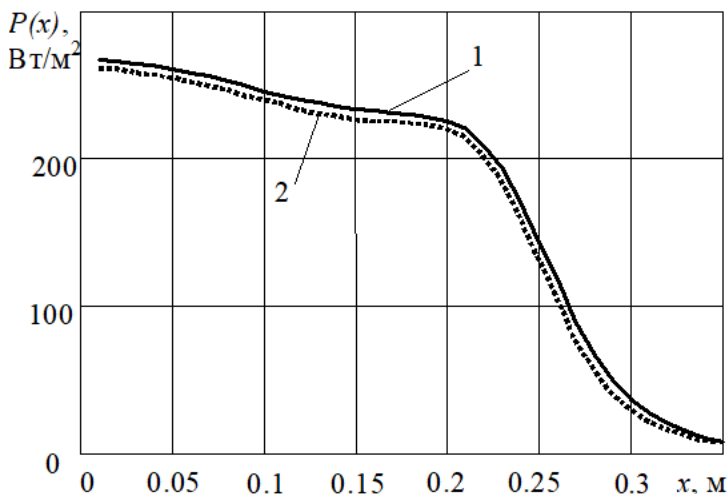


Рис. 3.9. Сравнение результатов расчета по трехмерной и локально двумерной моделям

Из рис. 3.9 видно, что расхождение результатов расчета, полученных с помощью модели локально двумерного поля и трехмерной модели расчета электромагнитного поля, созданного контуром пространственной конфигурации, не превышает нескольких процентов. Однако в силу специфики решаемых задач поиска геометрии контуров достаточно иметь зависимость  $P(x)$  в относительных единицах, например, нормированную на значение  $P(0)$ . В этом случае для относительных величин расхождение результатов, полученных по двум моделям,



оказывается значительно меньше, так как обе кривые в абсолютных единицах почти повторяют друг друга.

Расхождение в результатах расчета помимо пренебрежения кривизной реального контура обусловлено еще и тем, что участки контура не параллельны границе раздела сред. В этой связи в последней строчке таблицы 3.4 приведен максимальный угол наклона касательной к контуру и возникающие по этой причине ошибки применения модели локально двумерного поля:  $\delta_{\parallel}$  (1.49) и  $\delta_{\perp}$  (1.53). Величина относительных погрешностей также не превышает единиц процента, что позволяет сделать вывод о возможности применения для поиска геометрии систем упрощенной модели локально двумерного поля. В дальнейшем будут рассматриваться контуры, при расчете которых, как и в данном примере, отмеченные факторы не приводят к существенным погрешностям.

В связи с тем, что согласно формуле (1.63) плотность потока электромагнитной энергии в проводящую среду снижается с увеличением расстояния от элемента контура до плоскости как  $p_z \sim 1/h^2$ , то с помощью геометрических параметров  $d/h_0, a/c, n$  можно существенно влиять на характер распределения величины  $p_z$ . На рис. 3.10 в качестве примера показаны значения  $p_z^* = p_z(\theta) / p_z(\theta = \pi/2)$  непосредственно под проводником пространственного контура при разных значениях геометрических параметров.

Если для плоского контура линейная плотность потока выделившейся энергии  $P(x)$  наибольшая у краев, то изменением параметров можно добиться уменьшения в этой области величины  $p_z(\theta = 0)$  и тем самым уменьшить линейную плотность  $P(x = a)$ .

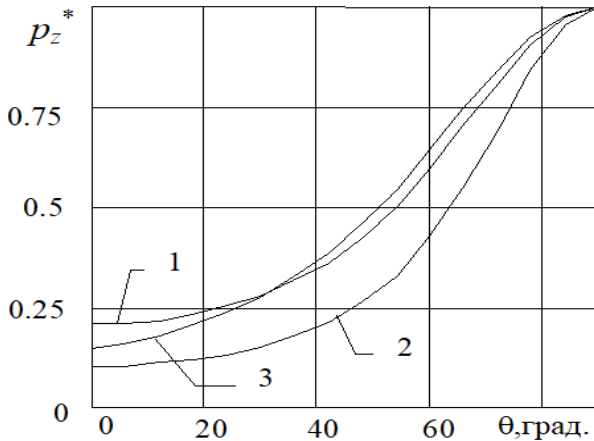
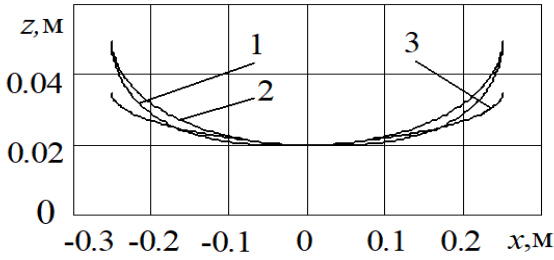


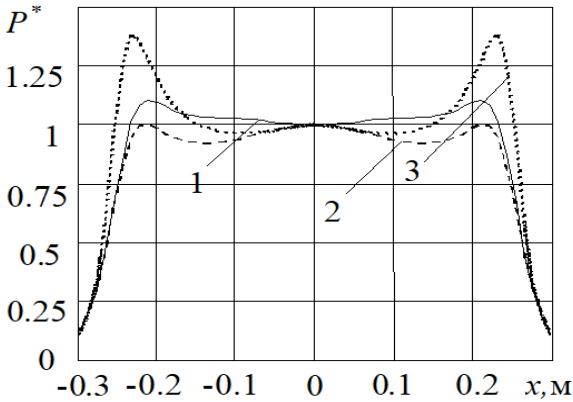
Рис. 3.10. Плотность потока активной энергии для пространственных контуров в точках под проводником: 1 –  $c/h_0=10$ ,  $d/h_0=5$ ; 2 –  $c/h_0=7,5$ ,  $d/h_0=5$ ; 3 –  $c/h_0=5$ ,  $d/h_0=1$

Изменением геометрических параметров  $d/h_0$ ,  $a/c$ ,  $n$  удастся существенным образом влиять на конфигурацию пространственного контура, что оказывает непосредственное влияние на распределение поверхностной плотности потока энергии поля и, как результат, на результирующее распределение температуры по ширине металлического листа. Рис. 3.11, а иллюстрирует влияние геометрических параметров на профиль контура в плоскости  $xOz$  при  $a = b = 0,25$  м.

Влияние различных параметров контуров на относительную величину линейной плотности тепловыделений  $P^* = P(x)/P(0)$  показано на рис. 3.11, б. Расчеты проведены при электрофизических параметрах, типичных для латунных поверхностей и идентичных, рассмотренным ранее.



а)



б)

Рис. 3.11. Проекция контуров на плоскость  $xOz$  (а) и распределение нормированного значения линейной плотности потока тепловой энергии  $P^*(x)$  по ширине ленты (б) при

$$1 - a/c = 1 : 1 - d/h_0 = 1.5, n = 3; \quad 2 - d/h_0 = 1.5, n = 2;$$

$$3 - d/h_0 = 0.75, n = 1.5$$

Из представленных зависимостей видно, что при почти плоской конфигурации контура и малой крутизне поднятия краев контура (кривая 3) наблюдается существенный рост линейной плотности тепловыделений под краем контура, т.е. в области с повышенной интенсивностью тепловыделений. Увеличение расстояния от

краев контура до нагреваемой поверхности уменьшает значение  $P^*(x=a)$  под краем контура с током. Варьированием параметра  $n$  удается изменить распределение  $P^*(x)$  по ширине ленты (кривые 1 и 2).

### **3.3. Геометрические параметры контуров с током для обеспечения определенного характера нагрева металлических лент**

Применительно к практике, например, при индукционном способе нагрева проводящих лент геометрические параметры токонесущего контура, создающего высокочастотное поле, должны быть выбраны так, чтобы обеспечить какой-либо заданный характер распределения температуры. Требования к условиям нагрева проводящей среды определяются условиями технологического процесса термической обработки и могут отличаться для различных материалов и видов обработки [14].

В этой работе находится конфигурация токовых контуров определенного класса, описание которых ограничено конкретными параметрами. В этом случае решение может быть найдено с определенными ограничениями. Задача формулируется как задача нахождения указанных параметров, подчиненных системе ограничений в форме равенств, при которых достигается максимум или минимум определенной функции. Такая постановка сводит задачу синтеза к задаче параметрической оптимизации [15].

Далее определим оптимальные геометрические параметры пространственных контуров с приподнятыми краями  $h = \text{var}$  и постоянным радиусом кривизны  $R = \text{const}$  (проекция контура на плоскую поверхность раздела сред представляет окружность). Геометрические конфигурации

определим при трех различных условиях требуемого тепловыделения. Отдельно обсудим возможность использования плоских контуров, параллельных границе раздела сред  $h = \text{const}$  с переменным радиусом кривизны  $R = \text{var}$ . В силу большого объема вычислений при решении оптимизационных задач для поиска геометрических параметров используется приближенная математическая модель локально двумерного поля.

### 3.3.1. Пространственные контуры с круглой формой проекции на поверхность раздела сред ( $h=\text{var}$ , $R=\text{const}$ )

Вначале воспользуемся полученными выше результатами по приближенному определению линейной плотности потока энергии под краем контура (3.21) и вдали от края (3.15). Выполним оценку основного геометрического фактора, который позволяет добиться относительно равномерного распределения суммарной тепловой энергии по ширине движущейся металлической ленты – отношения высоты расположения края контура к высоте участка контура, удаленного от края.

Равенство результирующей температуры ленты, прошедшей под краем контура и вдали от него, что равносильно равенству величин линейной плотности переданной энергии

$$P(x_A) = 2P(x_C) \quad (3.41)$$

на основании (3.15) и (3.21) приводит к следующему условию, накладываемому на геометрические параметры:

$$\frac{3 R^{1/2} h_C \cos \beta}{4 h_A^{3/2}} = 1, \quad (3.42)$$

где  $h_C \cos \beta = h_0$ .

Последнее соотношение позволяет связать три величины: радиус кривизны  $R$  (в данном случае радиус

окружности), минимальное расстояние от контура до поверхности  $h_0$ , максимальную удаленность проводника контура от поверхности  $h_A$ . Соответствующая зависимость в логарифмическом масштабе для отношений  $h_0/R$  и  $h_A/R$  показана на рис. 3.12 сплошной линией.

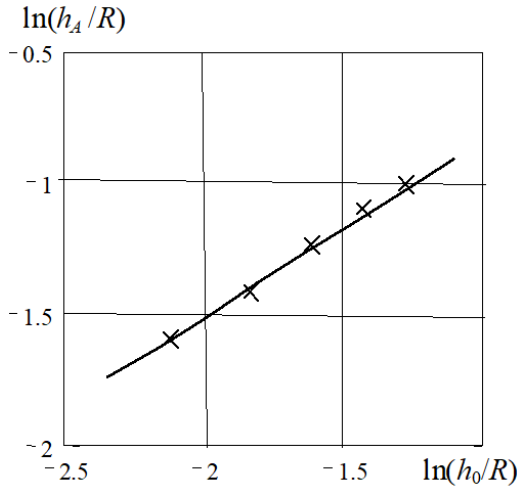


Рис. 3.12. Аппроксимация  $\ln \frac{h_A}{R} = \frac{2}{3} \left( \ln \frac{h_0}{R} + \ln \sqrt{\frac{3}{4}} \right)$ ;

× – полный расчет с использованием асимптотического разложения ( $a = b = 0,25$  м,  $a/c = 0,8$ ,  $\mu = 1$ ,

$$\gamma = 1,25 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}, f = 10^3 \text{ Гц})$$

Равенство температуры в двух точках даже при выборе контура постоянного радиуса кривизны  $a = b$  (пренебрегая незначительным отклонением радиуса кривизны от постоянного значения из-за пространственного характера контура) может быть обеспечено бесчисленным числом способов для разных значений других

геометрических параметров  $d/h_0, a/c, n$ . На рис. 3.12 отдельными точками отмечены результаты расчета с использованием асимптотического разложения величины  $h_A/a$  в зависимости от  $h_0/a$  при выбранном значении параметра  $a/c=0,8$  для ряда других значений геометрических параметров  $d/h_0, n$ .

Сравнение показывает, что даже достаточно грубая оценка дает удовлетворительное соответствие как показателя степени роста высоты  $h_A$  на краю при изменении высоты  $h_0$  в центре, так и абсолютных значений соотношения этих величин.

### 3.3.1.1. Температура не меньше заданного значения

Соотношение (3.42) вместе с тем дает лишь оценку равенства результирующей температуры для двух конкретных значений координаты вдоль ширины ленты. Кроме того, равенство в двух точках не свидетельствует о степени неравномерности температуры в остальной части ленты. Поэтому наложим дополнительное условие, необходимое по технологическим требованиям термической обработки. Сформулируем задачу оптимизации как задачу поиска геометрических параметров контура при условии равенства результирующей температуры в центре ленты и в определенной точке ширины

$$P(0) = P(x_m), \quad (3.43)$$

где  $x_m$  – максимальный поперечный размер, на котором необходимо обеспечить требуемые условия нагрева. В качестве дополнительного условия потребуем, чтобы в промежуточных точках температура не была меньше значения в выбранных конкретных точках  $x = 0, x = x_m$ :

$$-x_m \leq x \leq x_m : P(x) \geq P(0) \quad (3.44)$$

Пример решения этой задачи показан на рис. 3.13, где представлены относительные значения плотности тепловыделений  $P^* = P(x)/P(0)$  под контуром радиуса  $a = 0,25$  м. Считается, что контур расположен на минимальной высоте  $h_0 = 0,02$  м от поверхности. Решения находятся для значений отношения глубины проникновения поля к наименьшему расстоянию от контура до поверхности металла  $\delta/h_0 = 0,025$  при высокочастотном индукционном нагреве полосы из стали. В рассмотренном случае выбирается  $x_m = a$ . Видно, что на такой ширине наблюдается существенная неравномерность тепловыделений.

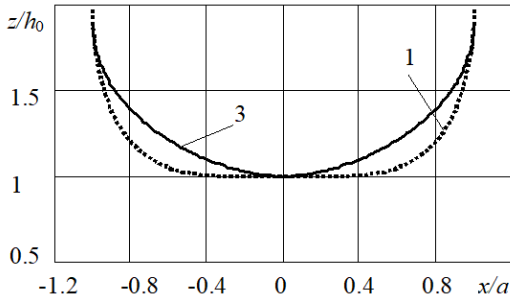
Проведенный анализ показал, что минимальная неравномерность будет при  $c = a$ . В этом случае задача (3.43), (3.44) имеет бесконечно много решений и по существу позволяет найти только зависимость параметра  $d/h$  от  $n$ . Поэтому было поставлено еще дополнительное оптимизационное условие минимизации отклонения тепловыделений от значений в центре и на краю:

$$\Delta P_{\min} = [P(x) - P(0)]_{\min}. \quad (3.45)$$

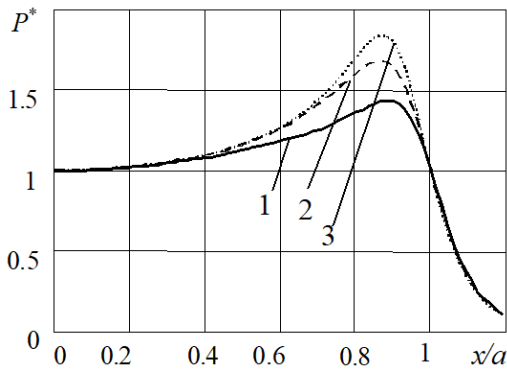
Наилучшие найденные параметры оказались равными  $d/h = 1$ ;  $n = 4,45$ .

На рис. 3.13, а представлены проекции на плоскость  $xOz$  нескольких контуров, соответствующих решению задачи (3.43), (3.44) и обеспечивающих распределение тепловыделений, проиллюстрированных кривыми на рис. 3.13, б. Наиболее приемлемое распределение тепловыделений представлено зависимостью 1.





а)



б)

Рис. 3.13. Проекция контуров на плоскость  $xOz$  (а) и зависимости  $P^*(x)$  для случая, когда температура не меньше заданного значения 1 -  $d/h = 1, n = 4,45$  ;  
 2 -  $d/h = 1,25, n = 10,5$  ; 3 -  $d/h = 1,5, n = 16,5$

При выбранном  $x_m = a$  минимально возможная степень неравномерности тепловыделений  $\Delta P_{\min} / P(0)$  оказывается достаточно большой. Снизить эту неравномерность можно только, если требовать выполнения (3.43) на меньшем интервале  $x_m < a$ .

### 3.3.1.2. Температура не выше заданного максимального значения

Задача поиска геометрии решается как задача нахождения геометрических параметров при условии

$$P(x) \leq P(0), \quad (-x_m \leq x < x_m). \quad (3.46)$$

В связи с тем, что зависимости  $P(x)$  носят немонотонный характер и обычно имеют локальный максимум вблизи края контура, то в данном случае условие (3.46) может быть дополнено равенством линейной плотности выделившегося тепла не в произвольной, заранее выбранной точке (как в (3.43)), а в точке  $x_0$  локального максимума  $P$ :

$$P(0) = P_{\max}(x_0). \quad (3.47)$$

Положение координаты локального максимума задается условием

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (3.48)$$

Положение точки  $x_0$  является неизвестной величиной, которая определяется в процессе решения.

На рис. 3.14 представлены некоторые решения задачи (3.47), (3.48). Как и в предыдущем случае, задача не является однозначной и позволяет получить лишь зависимость показателя степени  $n$  от величины  $d/h$  при выбираемом  $c/a$ . Задача становится однозначной, если задать еще одно дополнительное условие. Это условие может быть выбрано, например, исходя из конкретной постановки практической задачи. Так, кривая 1 соответствует условию, что под краем контура при  $x_m = a$  отклонение от  $P(0)$  будет минимальным, т.е. прежнему условию (3.45).

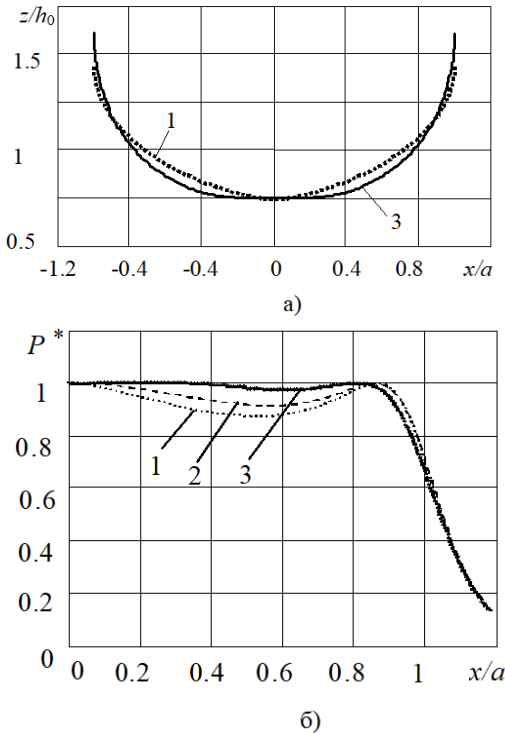


Рис. 3.14. Проекция контуров на плоскость  $xOz$  (а) и зависимости  $P^*(x)$  (б) для случая, когда температура не выше заданного максимального значения  $1 - d/h = 1,4$ ;  $n = 1,55$ ;  $2 - d/h = 1,5$ ;  $n = 2$ ;  $3 - d/h = 1,75$ ;  $n = 2,7$

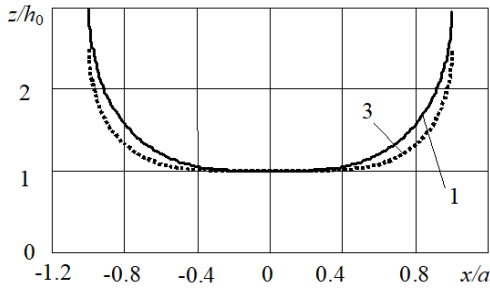
Как видно из представленных кривых, в области  $x > x_0$  линейная плотность выделившейся тепловой энергии, а значит, согласно (3.39), и результирующей температуры достаточно быстро уменьшается. Неравномерность температуры на промежутке  $(-x_m \leq x < x_m)$  будет обусловлена именно этой областью нагреваемой металлической ленты. В данном случае  $x_m < a$  и для

рассматриваемого примера степень неравномерности меньше, чем для задачи (3.43), (3.44) при  $x_m = a$ , но все же остается значительной. При этом, как видно из рисунка, степень неравномерности существенным образом зависит от значения  $x_0 < a$  и очень быстро падает с уменьшением  $x_0$ .

В рассматриваемой оптимизационной задаче используются те же исходные данные, что и в предыдущей задаче. Минимальное отклонение линейной плотности тепловыделения по ширине электропроводной поверхности будет для параметра  $c = a$ . На рис. 3.10, а представлены проекции на плоскость  $xOz$  двух контуров (кривая 1 и 3), обеспечивающих распределения линейной плотности выделившейся тепловой энергии, проиллюстрированные на рис. 3.14, б (зависимости 1 и 3). Наиболее приемлемое распределение тепловыделений представлено зависимостью 3 на рис. 3.14, б.

#### **3.3.1.3. Геометрические параметры контура при минимальном отклонении температуры на заданной ширине**

Наиболее часто на практике необходимо осуществить как можно более равномерный нагрев изделия на определенной ширине поверхности [16]. В этом случае сразу необходимо минимизировать отклонения линейной плотности тепловыделений на заданной ширине, не требуя выполнения условия (3.44) или (3.46). На рис. 3.15 представлены результаты исследований при выполнении оптимизационного условия на разной ширине  $x_m$  для  $c = a$ . Как видно из найденных зависимостей, сама величина максимального отклонения  $|\Delta P|_{\max}$  тепловыделений резко снижается при уменьшении ширины  $x_m$  (кривая 3) по сравнению с радиусом токового контура.



а)

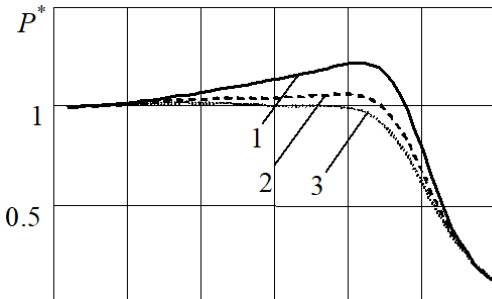


Рис. 3.15. Проекция контуров на плоскость  $xOz$  (а) и зависимости  $P^*(x)$  (б) при минимальном отклонении температуры на заданной ширине:

1 –  $d/h = 1,5$ ;  $n = 4,3$ ;  $x_m = 0,25$  м; 2 –  $d/h = 1,8$ ;  $n = 3,4$ ;  $x_m = 0,23$  м; 3 –  $d/h = 2$ ;  $n = 3,2$ ;  $x_m = 0,21$  м

На рис. 3.16 представлены минимально возможные отклонения линейной плотности тепловыделений  $\Delta P^*$  для данного класса геометрии контура. Полученные зависимости дают возможность находить необходимые поперечные размеры контура по заданному уровню неравномерности тепловыделений. При этом параметры  $n$  и  $d/h$  обеспечивают минимально возможные значения отклонения  $|\Delta P^*|_{\max}$  при выбранном  $a$  и  $x_m$  или минимальный радиус  $a$  при

заданном уровне  $|\Delta P|_{\max}$  и ширине  $x_m$ , на которой эти отклонения допускаются.

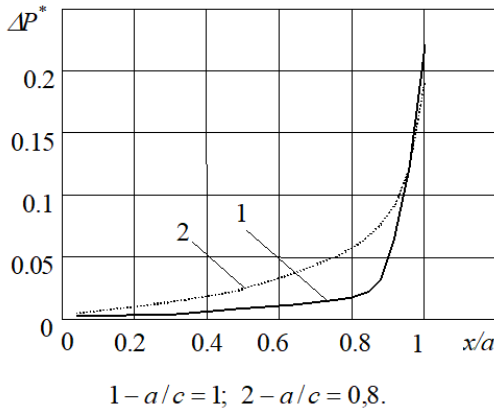


Рис. 3.16. Минимально возможные отклонения линейной плотности тепловыделений  $\Delta P^*$

Конфигурации индукторов в виде катушечной рамки, оптимизированные по определенным условиям, позволяют подтвердить не только корректность оценки условий (4.42), накладываемых на геометрические параметры для обеспечения равенства температуры в крайних точках ленты  $P(x_A) = 2P(x_C)$ , но и условие (3.16)  $h_C \cos \beta = \text{const}$  постоянства линейной плотности потока активной энергии на участках, удаленных от края контура.

Так, в качестве примера на рис. 3.17, а и 3.17, б для разных условий оптимизации и существенно отличающихся свойств материалов и воздействующей частоты поля показаны найденные профили зазора и соответствующие относительные значения линейной плотности тепловыделений  $P^* = P(x)/P(0)$ .

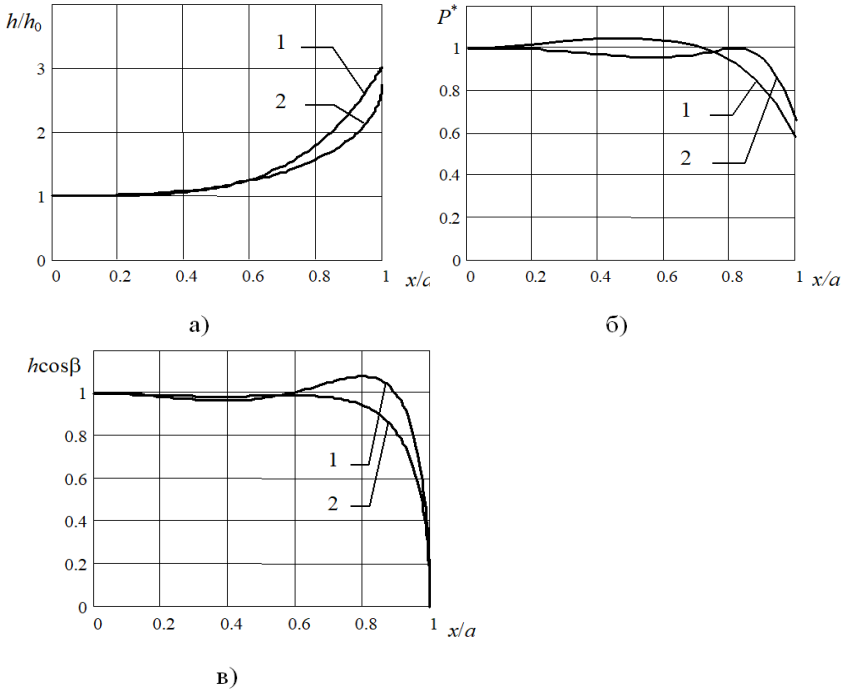


Рис. 3.17. Оптимизация линейной плотности потока энергии на ширине ленты  $x_m = 0,2$  м для индуктора с параметрами

$$a = b = 0,25 \text{ м}, h_0 = 0,02 \text{ м} :$$

1 –  $\gamma = 1,25 \cdot 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 2 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ ,  $a/c = 0,8$ ,  $d/h_0 = 8,4$ ,  $n = 3,82$ ;  
 2 –  $\gamma = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ ,  $\mu = 10$ ,  $f = 10^5 \text{ Гц}$ ;  $a/c = 1$ ,  $d/h_0 = 1,75$ ,  $n = 2,70$

Кривые 1 соответствуют профилю, при котором обеспечивается минимальное отклонение тепловыделений  $P(x)$  от значения  $P(0)$  на ширине в пределах  $-x_m \leq x \leq x_m$ . Кривые 2 соответствуют условию, когда линейная плотность тепловыделений не превышает значения в центральной точке  $P(x) \leq P(0)$  на той же ширине ленты. Как видно из представленных зависимостей (рис. 3.17, в), соотношение (3.16) действительно может служить оценкой постоянства линейной плотности потока активной энергии на участках, удаленных от краев контура.

Рассмотренные способы оптимизации геометрии токовых контуров дают возможность обеспечить необходимый характер распределения результирующей температуры нагреваемой поверхности. Однако на протяжении нагревания распределение температуры не является равномерным вследствие того, что разные участки поверхности проходят под соответствующими участками токонесящего контура в разные моменты времени. Этот факт иллюстрируют рис. 3.18 и 3.19.

На рис. 3.18 представлено распределение температур при нагревании поверхности пространственным контуром, изображенным кривой 3 на рис.3.11. На рис. 3.19 проиллюстрировано распределение температур ленты при нагревании токовым контуром с параметрами  $d/h_0 = 1,75$  и  $n = 2,7$ , что дает возможность получить более равномерную результирующую температуру нагревания по ширине поверхности, чем представленную на рис. 3.18.

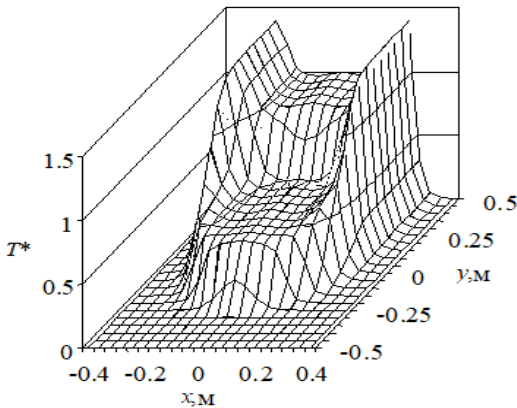


Рис. 3.18. Распределение температур при нагреве поверхности токовым контуром с параметрами  $d/h = 0,75$  и  $n = 1,5$



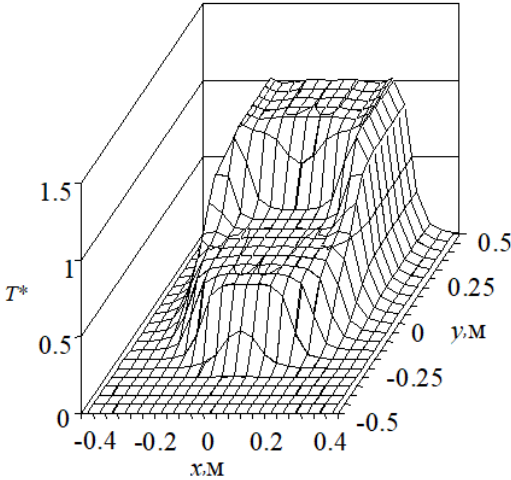


Рис. 3.19. Распределение температур при нагреве поверхности токовым контуром с параметрами  $d/h = 1,75$  и  $n = 2,7$

Видно, что нагревание индукторами в виде токнесущих контуров сопровождается возникновением температурных градиентов вдоль направления движения ленты в процессе нагрева. Это обстоятельство должно учитываться в связи с возможностью появления термомеханических напряжений в металле [30, 31].

### 3.3.2. Плоские контуры эллиптической формы ( $h = \text{const}$ , $R = \text{var}$ )

Из (3.42) следует, что эффективным может оказаться не только использование пространственных контуров с приподнятыми краями, но и применение плоских контуров с относительно небольшим радиусом кривизны в точке  $A$  [8]. В этой связи рассмотрим контуры эллиптической формы с длинами полуосей  $b < a$  (рис. 3.1), для которых, как было показано в [5], выделение джоулева тепла вблизи краев

уменьшается. Найдем геометрические параметры контуров, для которых выполняется условие (3.42) при  $x_C = 0$ .

Минимальный радиус кривизны контура эллиптической формы будет в точке  $A$ , где его величина оказывается  $R = b^2/a$ . Подставляя это значение в (3.42), находим оценку отношения длин полуосей эллипса, при котором линейная плотность выделившейся тепловой энергии одинакова в центральной точке  $x = 0$  и под краем контура  $x = a$ :

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{h}{a}}. \quad (3.49)$$

На рис. 3.20 приведены результаты полного расчета для двух значений отношения  $h/a$ . Кривые 2 показывают относительные значения линейной плотности переданной энергии с отношением полуосей эллипса в соответствие с (3.49). Видно, что тепловыделения в точках  $x = 0$  и  $x = a$  практически совпадают. Распределение выделившейся тепловой энергии по ширине ленты становится значительно более равномерным по сравнению с плоским контуром круглой формы ( $h = \text{const}$ ), расчетные данные для которых представлены кривыми 1.

Относительно использования контуров плоской формы необходимо отметить, что несмотря на более простую конфигурацию по сравнению с пространственными контурами, из-за того, что для эллиптического контура  $\beta \neq 0$  (рис. 3.1) при удалении от края контура в области  $0 \leq |x| < a$  будет повышенное тепловыделение. Данная особенность видна из характера зависимостей величины  $P(x)$  при  $x < x_A$  (кривые 2).

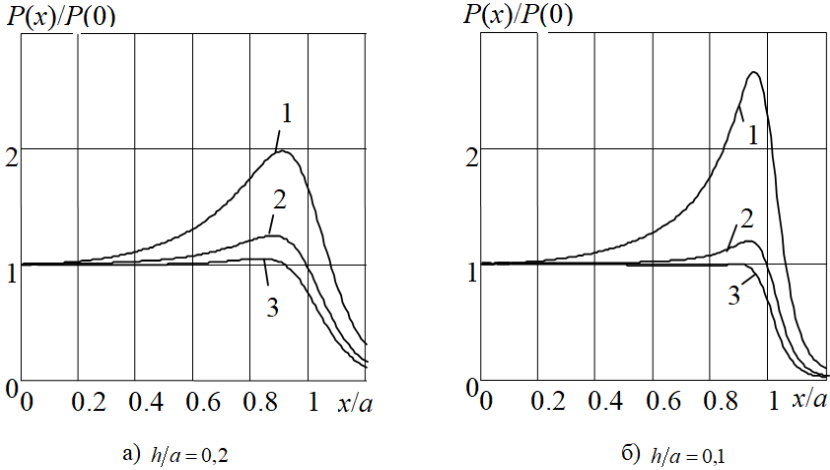


Рис. 3.20. Линейная плотность выделившейся тепловой энергии для эллиптического контура

Степень неравномерности тепловыделений по ширине ленты с использованием плоских контуров эллиптической формы можно значительно уменьшить в пределах несколько меньших, чем поперечный размер контура  $a$ . Для этого отношение полуосей эллипса  $b/a$  необходимо выбрать меньшим, чем то, которое обеспечивает выполнение условия (3.49). На рис. 3.20 кривые 3 соответствуют отношению полуосей эллипсов, составляющих 80% от отношения полуосей, выбранных в соответствие с (3.49). Видно существенное уменьшение степени неравномерности линейной плотности выделившейся энергии, в том числе и тогда, когда контур расположен ближе к поверхности ленты и соответственно абсолютные значения интенсивности тепловыделений возрастают.

### **3.4. Особенности применения асимптотического метода для исследования индукционного нагрева электропроводных лент с учетом их ограниченной ширины**

#### **3.4.1. Математическая модель для расчета электромагнитного поля токового контура над проводящей поверхностью ограниченной ширины**

Реальные тела всегда имеют ограниченные размеры, поэтому рассматриваемая до сих пор математическая модель контура с током, расположенного над проводящим полупространством, имеет вполне определенную область применения. Она справедлива в том случае, если участки контура и часть полупространства, в котором определяется электромагнитное поле, удалены от краев плоского электропроводного тела на достаточно большое расстояние. В ряде задач, имеющих практическое значение, расстояния от системы токов, возбуждающих электромагнитное поле, до края электропроводного тела становятся соизмеримыми с расстоянием от контура до плоской границы раздела сред.

Подобная задача возникает, например, при разработке устройств высокочастотного нагрева листов металла ограниченной ширины, нагрева участков электропроводных изделий вблизи их краев [17, 18], определении электромагнитного поля рассеяния технологических устройств, когда электроразрядные контуры расположены вблизи электропроводных тел, исследовании поперечного краевого эффекта [19 – 22] и других. В подобных случаях должна быть использована такая математическая модель, в которой учитываются особенности протекания индуцированных токов у края электропроводной среды.

Принципиальная сторона электромагнитных явлений поперечного краевого эффекта в приближении плоскопараллельного поля исследована А.И. Вольдеком [23].

Для принятой автором модели с высокой степенью обоснованности доказано равенство нулю вторичного поля на боковых границах поверхности, с учетом которого было получено решение и проведен исчерпывающий анализ основных процессов.

В работах Т.А. Веске [24], Н.М. Охременко [25] исследовано пространственное распределение электромагнитных полей в плоских индукционных устройствах и проводящих средах ограниченной ширины, позволившее определить границы применимости приближения плоскопараллельного поля, уточнить структуру и особенности распределения электромагнитного поля. Решение, полученное в [25], соответствует сформулированной в [24, 26] физической модели "периодического чередования индукторов" у края проводящей поверхности. Индукторы располагаются по обе стороны проводящей поверхности, обеспечивая требуемые условия на боковой поверхности.

В работе [26] сформулированы применительно к индукционному способу нагрева металлических изделий условия достижения требуемой равномерности распределения плотности потока энергии по ширине полосы металла с учетом поперечного краевого эффекта и положения проводящей поверхности относительно индуктора. Полученные выражения учитывают вторичное поле в областях за пределами контура, однако, представлены в виде бесконечных рядов, что затрудняет анализ и снижает точность расчетов. Выполненные приближенные расчеты с использованием ограниченного числа членов ряда указывают на существование под краями контура индуктора резко неоднородного распределения поля.

В данном подразделе для учета ограниченной ширины проводящей среды применяется метод многократных зеркальных отражений или метод «чередования индукторов» относительно нормальных плоскостей, проходящих через

края проводящей среды [25] (рис. 3.21). В этом случае оказывается возможным, как и прежде, использовать метод расчета поля контуров, расположенных над бесконечной проводящей средой. Результирующее поле будет суперпозицией полей, обусловленных протеканием тока исходного контура и контуров, зеркально отраженных от нормальных плоскостей. У края поверхности суммарная нормальная составляющая плотности тока внутри металла должна быть равна нулю. Чтобы обеспечить это условие, токи в отраженных контурах должны менять свое направление относительно тока исходного контура.

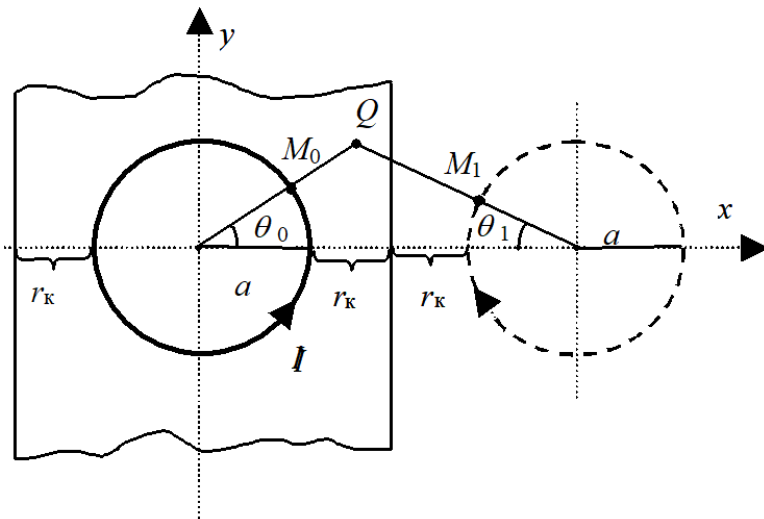


Рис. 3.21. Учет поля отраженного контура

Теоретически при наличии полосы, ограниченной с двух сторон, отражений будет бесконечно много. Однако контур располагается достаточно близко к границе раздела сред и наиболее сильное электромагнитное поле существует лишь в относительно узкой пространственной области вблизи контура. Поэтому поле зеркально отраженных

контуров необходимо учитывать только в том случае, если контур находится одновременно и достаточно близко от края полосы. Более того, в этом случае достаточно учесть лишь поле одного отраженного контура [27], как показано на рис. 3.21 [28, 29]. Применение такой модели для расчета поля вблизи края полосы возможно при выполнении следующих условий малости параметров:

$$h, r, r_1, r_k \ll D,$$

где  $r, r_1$  – расстояния от элемента тока и его зеркального отражения до точки наблюдения соответственно;  $D$  – характерный размер контура, в данном случае – диаметр контура;  $r_k$  – расстояние от контура до края проводящей поверхности;  $h$  – высота расположения контура над проводящей поверхностью. При этом условие  $r_k \ll D$  необходимо лишь в случае, если требуется расчет поля вблизи края. Если край находится достаточно далеко от контура и условие нарушается, то в этом случае и поле самого отраженного контура оказывается малым.

Погрешность, возникающая при учете только тока ближайшего отраженного контура, не превышает погрешности, связанной с локальной заменой контура прямолинейными токами. Такое заключение можно сделать на основании того, что при локальной замене не учитывается поле участков контура вдали от рассматриваемой области. Аналогично, если определяется поле у одного из краев полосы, то контур, отраженный от противоположного края, будет располагаться на расстоянии порядка  $D$  от точки наблюдения, как и удаленные участки контура.

При проведении расчетов с использованием модели локально двумерного поля необходимо учесть, что минимальное расстояние от двух контуров до точки наблюдения будет различным, отличаться будут и ориентации токов в спрямленных участках. Так, на рис. 3.21

точки  $M_0$  и  $M_1$  являются ближайшими точками контуров к точке наблюдения  $Q$ . Различными будут не только расстояния  $\xi_0$  и  $\xi_1$ , но и для пространственных контуров высоты их расположения  $h_0$  и  $h_1$  в этих точках. Поэтому, например, в формулах для плотности потока электромагнитной энергии

$$p_z(x, y) = p_{z0}(\xi_0(l_0), h_0(l_0)) + p_{z1}(\xi_1(l_1), h_1(l_1)) \quad (3.50)$$

необходимо учитывать параметрическую зависимость этих величин от положения точек  $M_0$  и  $M_1$  на соответствующих контурах.

Если контур в проекции на плоскость границы раздела сред представляет собой окружность радиуса  $a$ , то локальные координаты  $\xi_0$  и  $\xi_1$  можно выразить через декартовы координаты  $x$  и  $y$ , радиус  $a$  и расстояние до края  $r_k$ . В этом случае отрезки  $M_0Q$  и  $M_1Q$  являются соответственно продолжениями линий  $QO_0$  и  $QO_1$ , соединяющих точку  $Q$  с центрами окружностей. Отсюда вытекают выражения для  $\xi_0$  и  $\xi_1$ :

$$\xi_0 = \sqrt{x^2 + y^2} - a; \quad \xi_1 = a - \sqrt{(2a + 2r_k - x)^2 + y^2}. \quad (3.51)$$

Высоты  $h_0$  и  $h_1$  можно выразить через углы  $\theta_0$  и  $\theta_1$ :

$$\theta_0 = \arctg\left(\frac{y}{x}\right); \quad \theta_1 = \arctg\left(\frac{y}{2a + 2r_k - x}\right). \quad (3.52)$$

В том случае, когда контур расположен вблизи края проводящей среды, распределение индуцированных токов и



соответственно электромагнитного поля и плотности потока электромагнитной энергии изменяется по сравнению со случаем, когда контур расположен вдали от края. При наличии края индуцированные токи замыкаются вблизи него, чем обеспечивается более равномерное распределение  $p_z$ .

На рис. 3.22 в качестве примера изображены зависимости действительной составляющей вертикальной компоненты вектора Пойнтинга под круговым контуром  $a = 0,25$  м при различных расстояниях от контура до края проводящей поверхности  $r_k$ , нормированные на значение этой величины под контуром при  $r_k = \infty$ . Контур расположен на высоте  $h = 0,03$  м над проводящей поверхностью, электрофизические свойства которой являются типичными для материала из латуни ( $\gamma = 1,25 \cdot 10^7$  Ом $^{-1} \cdot$  м $^{-1}$ ,  $\mu = 1$ ). Глубина проникновения электромагнитного поля в проводящую среду для рассмотренного случая будет  $\delta = 8,2 \cdot 10^{-4}$  м.

Кривые 1, 2 и 3 показывают распределение  $p_z$  при последовательно увеличивающемся расстоянии от контура до края. Видно, что выравнивание плотности потока электромагнитной энергии между краем и контуром наиболее существенно при  $r_k/h = 0,5$ . Это выравнивание уменьшается при увеличении расстояния  $r_k$ . На рис. 3.22 показана также кривая 4, иллюстрирующая значения  $p_z$ , полученные методом интегральных преобразований и разложения в ряды Фурье [17]. Видно удовлетворительное совпадение результатов, полученных различными способами для системы круговой токовый контур – проводящая полоса ограниченной ширины.

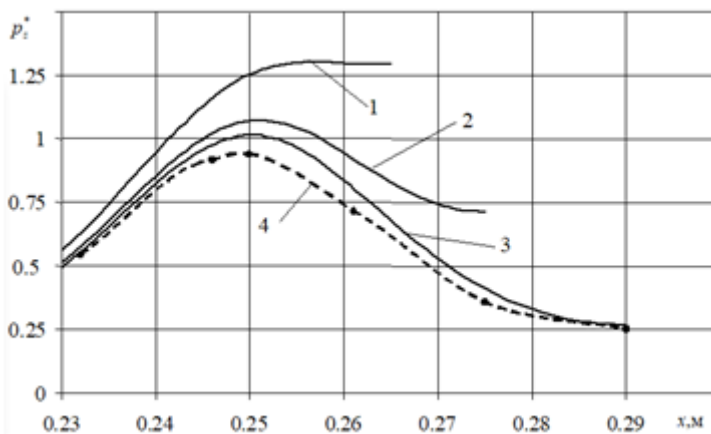


Рис. 3.22. Зависимости  $p_z = p_z(x)$ ;  
 1 –  $r_k = 0,015$  м; 2 –  $r_k = 0,025$  м; 3,4 –  $r_k = 0,04$  м.

Таким образом, показано, что разработанный приближенный способ расчета электромагнитного поля и плотности потока электромагнитной энергии применим и к расчету систем с проводящей средой ограниченной ширины. Объем необходимых вычислений при этом определяется лишь добавлением поля токов еще одного контура.

### 3.4.2. Геометрические параметры электромагнитной системы индукционного нагрева металлической ленты ограниченной ширины при минимальной неравномерности температуры по ее ширине

Наиболее часто на практике необходимо осуществить как можно более равномерный нагрев поверхности по всей ширине. В этой связи рассматривается лишь одно оптимизационное условие: минимального отклонения линейной плотности выделившейся тепловой энергии на ширине металлической ленты. По этому условию, как и

ранее, определяются геометрические параметры выбранного класса контуров пространственной конфигурации.

Расчеты проведены с использованием модели локально двумерного электромагнитного поля с учетом края проводящей поверхности для значений параметра отношения глубины проникновения поля к минимальной высоте расположения контура:  $\delta/h_0 = 0,07$  - при индукционном нагреве латунной поверхности и  $\delta/h_0 = 0,016$  - при индукционном нагреве стальной ленты. Принято, что минимальная высота расположения контура с током над проводящей поверхностью из латуни составляет  $h_0 = 0,02$  м, а для стали –  $h_0 = 0,03$  м, ширина ленты во всех случаях  $L = 0,5$  м.

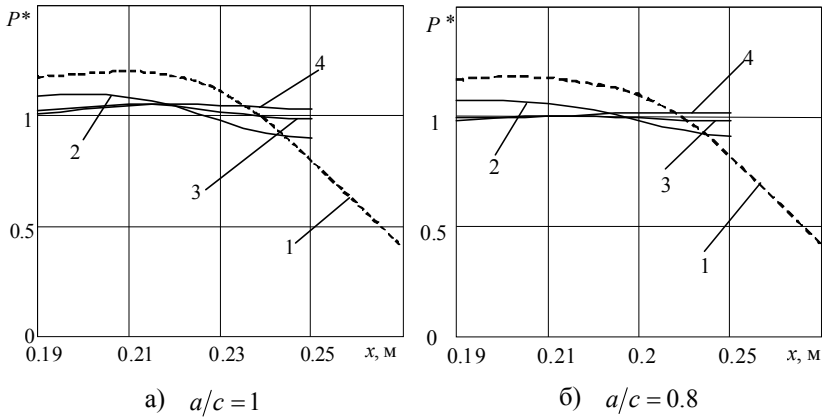
На всех представленных ниже рисунках пунктирная кривая 1 соответствует случаю, когда края поверхности не учитываются и расчет линейной плотности тепловыделений проводится с использованием модели для поля контуров с током, расположенных над бесконечной проводящей средой. На рис. 3.23 и 3.24 представлены относительные значения плотности тепловыделений  $P^* = P(x)/P(0)$  для латунной и стальной лент соответственно. Показаны зависимости при различных расстояниях  $r_k$  до края лент.

На рис. 3.23 показано распределение относительных значений плотности тепловыделений для двух значений параметра  $a/c$ : рис. 3.23, а соответствует  $a/c = 1$ ; рис. 3.23, б –  $a/c = 0,8$ .

Минимальная неравномерность тепловыделений реализуется при расстоянии до края ленты  $r_k = 0,01$  м (кривая 3). При этом найденные геометрические параметры пространственного контура при минимальной неравномерности линейной плотности потока энергии для случая  $a/c = 1$  оказываются  $d/h_0 = 2,05$ ,  $n = 2,17$ , а для

$a/c = 0,8$  оптимальные геометрические параметры равны  $d/h_0 = 6,2$ ,  $n = 3,14$ .

Как видно из представленных рисунков, наличие края проводящей поверхности позволяет получить значительно меньшую неравномерность плотности тепловыделений по сравнению со случаем безграничной проводящей среды (кривая 1).



1 –  $d/h = 1,6$ ;  $n = 3,27$ ;  $r_k = \infty$ ;  
 2 –  $d/h = 1,9$ ;  $n = 2,56$ ;  $r_k = 0,015\text{м}$ ;  
 3 –  $d/h = 2,05$ ;  $n = 2,17$ ;  $r_k = 0,01\text{м}$ ;  
 4 –  $d/h = 2,15$ ;  $n = 2,16$ ;  $r_k = 0,007\text{м}$ .

1 –  $d/h = 6,3$ ;  $n = 4,4$ ;  $r_k = \infty$ ;  
 2 –  $d/h = 6,1$ ;  $n = 3,54$ ;  $r_k = 0,015\text{м}$ ;  
 3 –  $d/h = 6,2$ ;  $n = 3,14$ ;  $r_k = 0,01\text{м}$ ;  
 4 –  $d/h = 6,4$ ;  $n = 3,08$ ;  $r_k = 0,007\text{м}$ .

Рис. 3.23. Зависимости  $P^*(x)$  при минимальном отклонении температуры листа из латуни

Неравномерность тепловыделений для найденных оптимальных геометрических параметров контуров при  $r_k = 0,01\text{м}$  составляет: для  $a/c = 0,8 - 1,5\%$ , для  $a/c = 1 - 4\%$ . Столь малые значения находятся на грани точности используемой методики расчета. Поэтому они свидетельствуют на самом деле лишь о порядке величины

отклонения, которая оказалась совсем незначительной для практического использования результатов.

При индукционном способе нагрева ленты из стали относительные значения плотности тепловыделений  $P^*$  под контуром при различных значениях  $r_k$  представлены для  $a/c = 1$  на рис. 3.24, а и для  $a/c = 0,8$  на рис. 3.24, б.

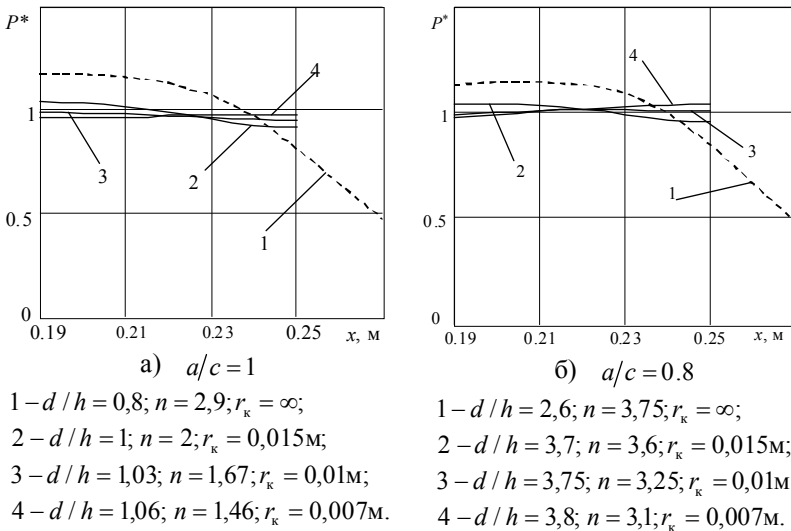


Рис. 3.24. Зависимости  $P^*(x)$  при минимальном отклонении температуры стального листа

Оптимальные зависимости, соответствующие минимальной неравномерности тепловыделений, реализуются также при  $r_k = 0,01\text{ м}$  (кривая 3). При этом в двух случаях найдены следующие оптимальные параметры: для  $a/c = 1$  геометрические параметры контура равны  $d/h_0 = 1,03$ ,  $n = 1,67$ ; для  $a/c = 0,8$  они будут  $d/h_0 = 3,75$ ,

### Глава 3

$n = 3,25$ . Минимальная неравномерность тепловыделений в этих случаях также составляет единицы процентов. Это позволяет заключить, что и для стальных изделий ограниченной ширины выбором оптимальной геометрии индуктора возможно достигнуть практически однородного распределения результирующей температуры.

Из проведенного анализа видно, что минимальная неравномерность тепловыделений для рассматриваемого класса контуров пространственной конфигурации имеет место, когда расстояние до края проводящей поверхности  $r_k$  будет 0,01 м, а безразмерный параметр –  $a/c = 0,8$ .

Геометрия контуров, предназначенных для равномерного нагрева проводящей поверхности ограниченной ширины, отличается от геометрии контуров, необходимых для нагрева проводящей поверхности в локальной области. Для иллюстрации на рис. 3.25 изображены проекции на плоскость  $xOz$  двух пространственных контуров.

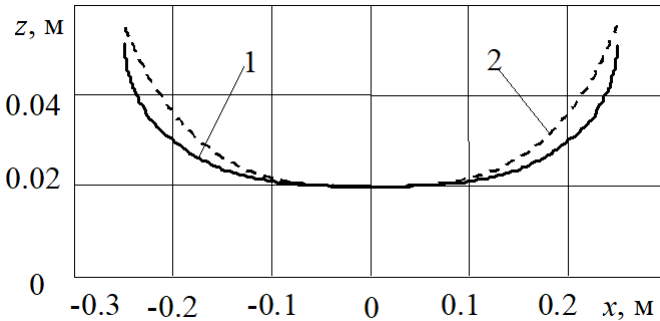


Рис. 3.25. Проекция пространственных контуров на плоскость  $xOz$

Кривая 1 соответствует контуру для нагрева локальной области неограниченной по ширине поверхности ( $a/c = 1$ ,  $d/h_0 = 1,6$ ,  $n = 2,9$ ). Кривая 2 дает профиль контура

для нагрева ленты ограниченной ширины ( $a/c = 0,8$ ,  $d/h_0 = 6,2$ ,  $n = 3,14$ ).

Видно, что при учете края контуры оптимальной конфигурации должны удаляться от поверхности на большее расстояние с крутизной подъема меньшей, чем у контуров для нагрева локальной области "безграничных" поверхностей.

В целом можно заключить, что использование пространственных контуров определенного класса позволяет значительно уменьшить степень неравномерности нагрева проводящих лент как в локальной области, так и по всей их ширине.

### 3.5. Выводы к главе 3

1. Для индукционного способа нагрева электропроводных лент обоснована целесообразность использования индукторов в виде токовых контуров пространственной конфигурации с приподнятыми над поверхностью краями. Показано, что выбором геометрических параметров контуров такой конфигурации удастся существенно влиять на характер распределения плотности потока электромагнитной энергии в проводящую среду и добиться значительного снижения степени неравномерности температур по ширине ленты по сравнению с традиционным подходом, при котором используются плоские контуры с током.

2. Установлено, что при взаимном перемещении контуров с переменным током и тонких металлических лент нагрев высокочастотными индукционными токами может происходить так, что температура в любой точке по толщине ленты постоянна, а в направлении вдоль поверхности процесс нагрева можно считать адиабатическим.

3. Оптимальные геометрические конфигурации индукторов в виде пространственных токовых контуров найдены при следующих важных практических условиях: линейная плотность потока электромагнитной энергии не превышает заданного максимального значения; не опускается ниже заданного минимального значения; имеет минимальное отклонение от среднего значения на определенной ширине.

4. При нагреве металлических лент по всей ширине выбор оптимальной геометрии индуктора с учетом влияния краев позволяет получить значительно меньшую неравномерность плотности тепловыделений по сравнению со случаем нагрева локальной области металлической ленты. Найдено, что при учете края контуры оптимальной конфигурации должны удаляться от поверхности на большее расстояние с меньшей крутизной подъема, чем контуры для нагрева локальной области ленты.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

### ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами. *Технічна електродинаміка*. 1999. № 3. С.3-9.

2. Rudnev V., Loveless D., Cook R., Black M. Handbook of induction heating. Marcel Dekker Inc., 2003. 777 p.

3. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И. Влияние импульсного электрического тока высокой плотности на прочность металлических материалов и напряженно-деформированное состояние элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 2014. 276 с.

4. Babutsky A., Chrysanthou A., Ioannou J. Influence of pulsed electric current treatment on corrosion of structural metals. *Strength of materials*. 2009. Vol. 41. No 4. P. 387-391.

5. Батыгин Ю.В., Головащенко С.Ф., Чаплыгин Е.А. Магнитно-импульсное притяжение немагнитных материалов. *Электричество*. 2014. № 2. С. 40-52.

6. Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Т.3. Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями. – Харьков: ХНАДУ, 2009. 240 с.

7. Acero J., Alonso R., Burdio J.M., Barragan L.A., Puyal D. Analytical Equivalent Impedance for a Planar Induction Heating System. *IEEE Transaction on Magnetics*. 2006. Vol. 42. No 1. P. 84-86.

8. Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле линейного проводника с током, параллельного граничной плоскости «воздушная среда – проводящее полупространство». *Электричество*. 1997. № 12. С. 55-61.

## Список использованных источников

9. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле импульсного тока, протекающего над проводящим полупространством. Киев: Ин-т электродинамики АН Украины. Ин-т электродинамики, 1992. 37 с. (Препринт / АН Украины, Ин-т электродинамики; №721).

10. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.

11. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Изд. Иностран. лит., 1958. 501 с.

12. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с.

13. Шимони К. Теоретическая электротехника. М.: Мир, 1964. 775 с.

14. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Ч.3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. 352 с.

15. Vasetsky Yu.M., Dziuba K.K. Three-Dimensional Quasi-Stationary Electromagnetic Field Generated by Arbitrary Current Contour Near Conducting Body. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 1. С. 3–12.

16. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Аналитический метод расчета электромагнитного поля и плотности потока мощности в системе токовый контур – проводящее полупространство. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки*. 2000. Ч. 2. С. 16–19.

17. Васецкий Ю.М., Дзюба К.К. Аналитический метод расчета квазистационарного трехмерного электромагнитного поля тока, протекающего по контуру произвольной конфигурации вблизи электропроводного тела. *Технічна електродинаміка*. 2017. № 5. С. 7–17.

18. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. К.: Техника, 1974. 352 с.

19. Vasetsky Yu., Mazurenko I., Dziuba K. Features of distribution of three-dimensional quasi-stationary electromagnetic

Список использованных источников

field in a system with flat interface between media. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 2017. Vol. 7. N 1. P. 69–74.

20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

21. Васецкий Ю.М. Электромагнитное поле пространственного контура с током над плоской поверхностью проводящего тела с сильным скин-эффектом. *Электричество*. 2014. № 3. С. 55-61.

22. Найфэ А. Введение в методы возмущений: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 535с.

23. Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 3 т. М.: Наука, 1974. 672 с.

24. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

25. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенная модель для расчета переменного магнитного поля произвольного контура с учетом вихревых токов в проводящем полупространстве. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Моделювання електронних, енергетичних та технологічних систем*. 1999. Ч. 1. С. 88-93.

26. Vasetsky Yu. Mazurenko I., Dziuba K. Conditions for Application of Asymptotic Method to Electromagnetic Field Analysis in System of “a Current Loop – an Electroconducting Body”. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 2014. Vol. 4. № 1. P. 91-96.

27. Слухоцкий А.Е., Немков В.С., Павлов Н.А., Бамунэр А.В. Установки индукционного нагрева. Л.: Энергоиздат, 1981. 325 с.

28. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Геометрия токовых контуров для равномерного индукционного нагрева плоских металлических изделий ограниченной ширины. *Технічна електродинаміка*.

Список использованных источников

*Тематичний випуск: Силова електроніка та енергоефективність*. 2001. Ч. 3. С. 92-95.

29. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенные математические модели электромагнитных систем с пространственными токовыми контурами, расположенными над проводящей средой. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки*. 2002. Ч. 4. С. 3-7.

30. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Приближенный способ расчета электромагнитного поля вблизи токового контура, расположенного над проводящим полупространством. *Електротехніка і електроенергетика*. 2000. № 2. С. 85-89.

31. Васецкий Ю.М. Асимптотические методы решения задач электродинамики в системах с массивными криволинейными проводниками. Киев: Наукова думка, 2010. 271 с.

32. Слухоцкий А.Е., Рыскин С.Е. Индукторы для индукционного нагрева. Л.: Энергия, 1974. 264 с.

33. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 720 с.

34. Аналітичний та чисельний розрахунок квазістаціонарного тривимірного електромагнітного поля струмового контура поблизу електропровідного середовища / Васецкий Ю.М., Кучерява І.М., Мазуренко І.Л., Дзюба К.К. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 4. С. 10-13.

35. Затухання неоднорідного електромагнітного поля струмового контура в електропровідному півпросторі / Васецкий Ю.М., Кучерява І.М., Мазуренко І.Л., Дзюба К.К. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 5. С. 11-14.

## ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1. Немков В.С. Индукционный нагрев цилиндрических оболочек стенки. *Известия АН СССР. Энергетика и транспорт*. 1979. №3. С. 109-114.

2. Немков В.С., Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. Л.: Энергоатомиздат, 1988. 280 с.

3. Установки индукционного нагрева / Слухоцкий А.Е., Немков В.С., Павлов Н.А., Бамунер А.В.; под ред. А.Е.Слухоцкого. Л.: Энергоиздат, 1981. 328 с.

4. Немков В.С. Расчет индукционных систем на основе магнитных схем я замещения. *Электротехника*. 1978. №12. С. 36-39.

5. Немков В.С. Расчет плоских индукторов с магнитопроводами на основе магнитных схем замещения. *Электротермические процессы и установки*. Чебоксары. 1984. С. 60-65.

6. Нейман Л.Д., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 2 т. Л.: Энергоиздат, 1981. 416 с.

7. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

8. Виштак П.А., Крутилин В.А., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Магнитное поле в зазоре линейных индукционных машин с концентрическими обмотками *Техническая электродинамика*. 1984. № 1. С. 15-20.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Серия: Теоретическая физика, Т.8. М.: Наука, 1982. 620 с.

10. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.

11. Dughiero F., Lupi S., Muhlhauer A., Nikanorov A. TFH – transverse flux jetton heating of non ferrous and precious

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

metal strips: result of a EU research project. *The Int. Journ. For Comp. and Mathem. in Electrical and Electronic Eng. (COMPEL)*. 2003. Vol.22. № 1. P.134-148.

12. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложением в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.

13. Виштак П.А., Крутилин В.А., Ращепкин А.П. Определение магнитных полей и энергетических характеристик линейного однофазного индуктора для нагрева тонких металлических лент. *Электромеханические преобразователи энергии: Сборник науч. трудов*. Киев: Наукова думка, 1986. С. 71-74.

14. Ращепкин А.П. О двух предельных решениях для анализа поперечного краевого эффекта в индукционных МГД-машинах. *Магнитная гидродинамика*. 1978. №4. С.107-111.

15. Постников И.М. Проектирование электрических машин. Киев: Госэнергоиздат, 1960. 910с.

16. Нейман Л.Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. Л.: Госэнергоиздат, 1949. 190с.

17. Gieras J.F. Analytical method of calculating the electromagnetic field and power losses in ferromagnetic halfspace, taking into account saturation and hysteresis. *Proc. IEEE*. 1977. Vol. 124. № 11. P. 1098-1104.

18. Герасим А.Г., Климовицкий В.Д., Шариков А.М. Параметры массивного ротора асинхронного двигателя. *Электротехника*. 1983. № 7. С. 35-37.

19. Fireteanu V., Tudorache T. Electromagnetic Forces in Transverse Flux Induction Heating. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2000. Vol. 36. №4. P. 1792-1795.

20. Neau Y., Paya B., Tudorache T., Fireteanu V. Numerical Evaluation and Experimental Validation of Eddy Currents and Electromagnetic Forces in Transverse Flux Induction Heating of Magnetic Steel Sheets. *Proc. The 3-rd*

Список использованных источников

International Symposium on Electromagnetic Processing of Materials. Nagoya (Japan). 2000. P. 211-217.

21. Виштак П.А., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Влияние асимметрии фазных токов линейного индуктора на равномерность нагрева полосы. *Технічна електродинаміка*. 1996. № 5. С. 33-37.

22. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев плоского проката в индукторах с симметрированными электрическими параметрами. *Технічна електродинаміка*. 2000. № 3. С. 3-7.

23. Никаноров А.Н. Моделирование, исследование и разработка индукционной системы для нагрева лент в поперечном магнитном поле. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.09.10 / ЛЭТИ. Л.: 1989. 15 с.

24. Ван дер Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 507 с.

25. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1968. 198 с.

26. Вольдек А.И. Индукционные магнетогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. Л.: Энергия, 1970. 272 с.

27. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами. *Технічна електродинаміка*. 1999. № 3. С. 3-9.

28. Виштак Т.В., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев полосы токовыми контурами канонических форм. *Технічна електродинаміка*. 2003 №1. С.63-68.

29. Костенко М.П., Пиотровский Л.М. Электрические машины. Ч.2. – Л.: Энергия, 1973. – 648 с.

30. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Влияние конечной высоты сечения токового контура на энергетические характеристики индуктора при нагреве

Список использованных источников

движущейся полосы. *Технічна електродинаміка*. 2003. № 5. С. 60-64.

31. Слухоцкий А.С., Рыскин С.Е. Индукторы для индукционного нагрева. Л.: Энергия, 1974. 264 с.

32. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Геометрия токовых контуров для равномерного индукционного нагрева плоских металлических изделий ограниченной ширины. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Силова електроніка та енергоефективність*. 2001. Ч. 3. С. 92–95.

33. Васецкий Ю.М., Мазуренко І.Л. Конфігурація просторових контурів зі струмом для забезпечення необхідного характеру тепловиділень у провідному середовищі. *Вісник національного університету "Львівська політехніка"*. 2001. № 421. С. 23-28.

34. Виштак Т.В., Кондратенко И.П. Электромагнитное поле пространственно распределенного токового контура, расположенного над проводящей полосой. *Вісник Кременчуцького державного університету. Кременчук: КДГУ*, 2005. Вып. 4/2005 (33). С. 115-118.

35. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 638 с.

36. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.



Список использованных источников  
**ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3**

1. Rudnev V., Cook R., Loveless D., Black M. Induction heat treatment. Marcel Dekker Inc., 1997. 872 p.

2. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Оценка параметров для приближенных математических моделей электромагнитных систем с вихревыми токами. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки*. 2006. Ч. 2. С. 7-12.

3. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенная модель для расчета переменного магнитного поля произвольного контура с учетом вихревых токов в проводящем полупространстве. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Моделювання електронних, енергетичних та технологічних систем*. 1999. Ч. 1. С. 88-93.

4. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Параметры электромагнитных и тепловых процессов для приближенных математических моделей высокочастотного индукционного нагрева электропроводных лент. *Технічна електродинаміка*. 2010. № 5. С. 10-17.

5. Vasetskyi Yu., Mazurenko I. Approximation mathematical models of electromagnetic and thermal processes at induction heating of metal strips. *Computation Problems of Electrical Engineering*. 2011. N 1. P. 45-50.

6. Vasetsky Yu., Mazurenko I. Approximations models of 3-D electromagnetic fields induced by current of spatial contour placed above conducting half-space. *Computational Problems of Electrical Engineering. Proceeding of IV International Workshop*. 2002. P.130 –133.

7. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Геометрические параметры электромагнитных систем для высокочастотного индукционного нагрева металлических лент. *Технічна електродинаміка*. 2009. № 5. С. 9-15.

## Список использованных источников

8. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Оценка геометрических параметров высокочастотных электромагнитных систем по заданному условию джоулевой диссипации в движущейся металлической полосе *Вісник національного університету "Львівська політехніка"*. 2009. № 654. С. 23-28.

9. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 479 с.

10. Виштак Т.В., Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев полосы токовыми контурами канонической формы. *Технічна електродинаміка*. 2003. № 1. С. 63-68.

11. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов. М.: Металлургия, 1974. 400 с.

12. Васецкий Ю.М., Мазуренко И.Л. Конфігурація просторових контурів зі струмом для забезпечення необхідного характеру тепловиділень у провідному середовищі. *Вісник національного університету "Львівська політехніка"*. 2001. № 421. С. 23-28.

13. Vasetsky Yu., Mazurenko I. Parameters of electromagnetic systems with eddy currents for using in approximate mathematical models. *Computation Problems of Electrical Engineering. Proceedings of the VII Intern. Workshop*. 2006. P. 190-193.

14. Слухоцкий А.С., Рыскин С.Е. Индукторы для индукционного нагрева. Л.: Энергия, 1974. 264 с.

15. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 607 с.

16. Слухоцкий А.Е., Немков В.С., Павлов Н.А., Бамунэр А.В. Установки индукционного нагрева. Л.: Энергоиздат, 1981. 325 с.

Список использованных источников

17. Кондратенко И.П., Ращепкин А.П. Индукционный нагрев движущейся полосы токовыми контурами. *Технічна електродинаміка*. 1999. № 3. С. 3-9.

18. Красновидова Т.Б., Артышевский П.П. Особенности нагрева листовых материалов индукторами поперечного потока. *Электротехническая промышленность. Серия 1. Электротермия*. 1983. №3. С. 3-4.

19. Вилнитис А.Я., Дриц М.С. Концевой эффект в линейных асинхронных двигателях. Рига: Зинатне, 1981. 258 с.

20. Демирчян К.С., Кузнецов В.Ф., Боронин В.И. Поверхностный эффект в электроэнергетических устройствах. Л.: Наука, 1983. 280 с.

21. Немков В.С., Демидович В.Б. Теория и расчет устройств индукционного нагрева. Л.: Энергоатомиздат, 1988. 279 с.

22. Новиков И.И. Теория термической обработки металлов. М.: Metallургия, 1974. 400 с.

23. Вольдек А.И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. Л.: Энергия, 1970. 272 с.

24. Веске Т.А. Решение уравнений электромагнитного поля плоской линейной индукционной машины с учетом вторичного поперечного и толщинного краевых эффектов. *Магнитная гидродинамика*. 1965. № 1. С. 87-96.

25. Охременко Н.М. Исследование пространственного распределения магнитных полей и электрических явлений в индукционных насосах. *Магнитная гидродинамика*. 1965. № 1. С. 97-110.

26. Виштак П.А. Структура электромагнитных полей и джоулевых тепловыделений в роторе линейных индукционных машин: дис. канд. техн. наук: 05.09.01 / Національна академія наук України. Інститут електродинаміки. Київ: 1997. 187 с.

### Список использованных источников

27. Каплянский А.Е., Лысенко А.П., Полотовский А.С. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1972. 446 с.

28. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Геометрия токовых контуров для равномерного индукционного нагрева плоских металлических изделий ограниченной ширины. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Силова електроніка та енергоефективність*. 2001. Ч. 3. С. 92-95.

29. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенные математические модели электромагнитных систем с пространственными токовыми контурами, расположенными над проводящей средой. *Технічна електродинаміка. Тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки*. 2002. Ч. 4. С. 3-7.

30. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. К.: Наукова думка, 1965. 204 с.

31. Боли Б., Уэнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 518 с.

*Наукове видання*

Національна академія наук України  
Інститут електродинаміки

**ВАСЕЦЬКИЙ** Юрій Макарович  
**КОНДРАТЕНКО** Ігор Петрович  
**РАЩЕПКІН** Анатолій Павлович  
**МАЗУРЕНКО** Ірина Леонідівна

**ЕЛЕКТРОМАГНІТНА ВЗАЄМОДІЯ  
СТРУМОВИХ КОНТУРІВ З ЕЛЕКТРОПРОВІДНИМ  
СЕРЕДОВИЩЕМ**

(Російською мовою)

Редактор Н.В. Новік  
Комп'ютерна верстка І.Л. Мазуренко

Підп. до друку 04.02.2019. Формат 60×84/16. Папір офс. №1.  
Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. 12.2. Обл. вид. арк. 12.  
Тираж 300 прим. Ціна за домовленістю.

---

Віддруковано у друкарні ТОВ “Про Формат”,  
01042, м. Київ, пр. Миру, 7, оф. 45.