

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ТЕХНІЧНОЇ ТЕПЛОФІЗИКИ

В.П. БАБАК,  
В.С. ЄРЕМЕНКО, Ю.В. КУЦ,  
М.В. МИСЛОВИЧ, Л.М. ЩЕРБАК

# МОДЕЛІ ТА МІРИ У ВИМІРЮВАННЯХ

За редакцією члена-кореспондента  
НАН України В.П. БАБАКА

---

*ПРОЕКТ*  
*«НАУКОВА КНИГА»*

---

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2019

**Моделі та міри у вимірюваннях:** Монографія / В.П. Бабак, В.С. Єременко, Ю.В. Куц, М.В. Мислович, Л.М. Щербак; за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака. — Київ: Наукова думка, 2019. — 208 с. ISBN 978-966-00-1692-7

У монографії розглянуто сучасні методи створення моделей та мір у вимірюваннях, фізичні та ймовірнісні міри, моделі, простори та базиси сигналів і полів, детерміновані та ймовірнісні моделі та міри кутових величин і приклади їх використання на колі та у фазових вимірюваннях, моделі і міри для діагностування в електроенергетиці, у безеталонних вимірюваннях характеристик композитних матеріалів.

Для наукових співробітників, інженерів, а також для викладачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів, що займаються проблемами вимірювань, моніторингу та діагностики технічних об'єктів.

**Р е ц е н з е н т и:**

член-кореспондент НАН України,  
доктор технічних наук, професор *В.Ф. Резцов*,  
Інститут відновлювальної енергетики НАН України,  
доктор технічних наук, професор *В.П. Малайчук*  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Інституту технічної теплофізики НАН України  
(протокол № 13 від 13.09.2018 р.)*

***Видання здійснено за кошти Цільової комплексної програми  
«Створення та розвиток науково-видавничого комплексу  
НАН України»***

Науково-видавничий відділ фізико-математичної  
та технічної літератури  
Редактор *В.В. Вероцька*

© В.П. Бабак, В.С. Єременко, Ю.В. Куц,  
М.В. Мислович, Л.М. Щербак, 2019  
© НВП «Видавництво «Наукова думка»  
НАН України», дизайн, 2019

**ISBN 978-966-00-1692-7**

# ПЕРЕДМОВА

У наш час вимірювання є невід'ємною складовою у всіх сферах життєдіяльності сучасного суспільства — від побуту до високотехнологічних виробництв, енергетики, авіації, космонавтики, різних галузей науково-промислового комплексу країни. Забезпечення комфортних умов існування людини в своїй оселі («розумний будинок»), виробництво електричної та теплової енергії, керування складними технологічними процесами, моніторинг динаміки у просторі та часі кліматичних і екологічних станів довкілля, керування транспортними об'єктами на землі, воді, повітрі та в космосі, діагностування технічних та інших об'єктів різної складності, контроль та керування якістю продукції — всі ці процеси потребують виконання високоточних вимірювань значної кількості фізичних величин за умови їхнього розвитку у просторі та часі, опрацювання постійно зростаючих обсягів вимірювальної інформації.

Вимірювання — чи не єдине джерело отримання об'єктивної кількісної інформації про навколишній матеріальний світ, про рівень і якість життєдіяльності суспільства. Розширення динамічного діапазону вимірювань у дослідженнях мікро- і макросвіту, підвищення вимог щодо точності і надійності результатів вимірювань, збільшення номенклатури вимірюваних електричних і неелектричних фізичних величин — все це потребує поглибленого розуміння синтезу і аналізу процедур і операцій вимірювань, розвитку відповідного теоретичного базису, інформаційного і апаратного забезпечення.

Наріжним каменем теорії і практики вимірювань незмінно були і залишаються фундаментальні поняття моделі і міри. Відомо, що моделі і міри завжди відображали стан і слугували своєрідним індикатором досягнень науки і техніки на певному історичному етапі їх розвитку. На їх основі розроблявся вимірювальний інструментарій, практичне використання якого сприяло отриманню нових знань. На практиці підтвердилась гіпотеза відомого англійського фізика А. Майкельсона (середина XIX ст.) про нові відкриття у фізиці, коли відносна точність вимірювань досягне рівня  $10^{-n}$  ( $n \geq 6$ ).

Саме детерміновані та ймовірнісні моделі вимірюваних величин і процесів, сигналів як носіїв інформації, а також фізичні та ймовірнісні міри дають змогу формувати результат вимірювання, надати йому властивості об'єктивності і достовірності. Тому питання удосконалення та розвитку моделей і мір у методології вимірювань відіграють значущу роль для пошуку шляхів досягнення вищої точності вимірювань і розширення галузей їх застосування. Питанням узагальнення та дослідження особливостей і застосування конструктивних моделей і мір у сучасній методології вимірювань присвячена ця монографія.

Вона складається з шести розділів.

У розділі I розглянуто загальні питання проблематики вимірювань, у тому числі основні положення та означення вимірювань, запропоновано систему по-

студатів, на яких ґрунтуються теорія і практика вимірювань, та поняття математичної моделі невизначеності вимірювання, стисло охарактеризовано вимірювання як обернену задачу теорії сигналів і систем. Детально досліджено поняття *міра* та його розвиток від філософської категорії до об'єктів вивчення та використання в математиці й метрології. Запропоновано і розглянуто концепцію узгодження фізичних та ймовірнісних мір у вимірюваннях, наведено класифікацію фізичних і ймовірнісних мір для вимірювань, розглянуто використання різних мір у структурі інформаційно-вимірювальних систем.

У розділі 2 систематизовано математичні моделі вимірювальних сигналів та полів, розглянуто основні просторово-часові моделі квазидетермінованих сигналів, викладено відомості про простори сигналів, зокрема лінійні, метричні, нормовані та гільбертові. Наведено приклади застосування ортогональних базисів у дослідженні детермінованих сигналів, викладено теоретичні відомості про моделі випадкових сигналів та полів.

У розділі 3 розглянуто моделі і міри для вимірювань випадкових кутових величин, наведено основні поняття, терміни, визначення та характеристики, які використовуються в статистичному аналізі кутових даних. Проаналізовано найхарактерніші розподіли ймовірностей випадкових кутів — Мізеса та намотаний гауссовий розподіл. Виконано порівняльний аналіз числових характеристик випадкових величин і випадкових кутів. Викладено базові відомості про розроблені авторами моделі та міри випадкових фазових зсувів циклічних сигналів для фазових вимірювань.

У розділі 4 наведено приклад побудови та використання моделей і мір у діагностиці електроенергетичних об'єктів, детально розглянуто процеси формування діагностичних сигналів, моделі формування навчальних сукупностей (мір) для діагностування стану електроенергетичного обладнання, запропоновано варіант побудови діагностичних просторів за результатами вимірювання інформаційних сигналів, а також побудови розв'язувальних правил з діагностування і класифікації певних видів дефектів у вузлах електроенергетичних об'єктів.

У розділі 5 наведено приклади використання моделей і мір на колі для розв'язання завдань прецизійної ультразвукової товщинометрії виробів з матеріалів зі значним загасанням, проаналізовано результати багатоскальових фазових вимірювань на основі числових систем залишкових класів у фазових далекомірах та пеленгаторах, розглянуто особливості статистичного опрацювання даних в системах моніторингу параметрів довкілля на базі безпілотних авіаційних комплексів.

У розділі 6 розглянуто особливості використання моделей і мір для безеталонних вимірювань характеристик композиційних матеріалів, обґрунтовано можливість використання нейронних мереж у комп'ютеризованих системах діагностики для класифікації дефектів і побудови відповідних шкал найменувань.

Автори висловлюють ширю подяку рецензентам — члену-кореспонденту НАН України В.Ф. Резцову (Інститут відновлювальної енергетики НАН України) та доктору технічних наук, професору В.П. Малайчуку (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара) за зауваження, рекомендації та допомогу у формуванні рукопису.

Деякі сформульовані положення та твердження мають дискусійний характер. Авторі будуть ширю вдячні читачам, які надішлють свої відгуки, зауваження та пропозиції стосовно викладеного матеріалу за адресою: 03680, м. Київ, вул. Желябова, 2а, Інститут технічної теплофізики НАН України; e-mail: vdoe@ukr.net.

## ПРОБЛЕМАТИКА ВИМІРЮВАНЬ

### 1.1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

Вимірювання вважаються одним із основних напрямів пізнання світу. У наш час вимірювальні операції проводяться в таких значних масштабах у всьому світі, що це стало невід'ємною частиною нашого життя. За більш глибокої постановки задач вимірювання саме відсутність їх результатів не дають можливості вирішити актуальні проблеми сьогодення. Наприклад, кліматичні та екологічні проблеми на нашій планеті вирішуються не в повному обсязі через відсутність необхідних баз даних вимірювання динаміки у часі та просторі характеристик довкілля. Це в першу чергу обумовлено недостатньо обґрунтованими математичними моделями, просторово нерозвинутим апаратним і відповідним інформаційним забезпеченням досліджень довкілля.

Для розкриття змісту і суті вимірювань стисло наведемо основні положення вимірювань і розглянемо використання моделей і мір як основних предметів під час виконання широкого кола досліджень. Загальний підхід використання вимірювань схематично наведено на рис. 1.1.

У метрології, як науці про вимірювання та їх практичне застосування, виділяють три основні напрями досліджень [22, 74, 82, 107]:

- теорію вимірювань, включаючи теоретичні основи створення фізичних і математичних моделей, методів, мір, інформаційного та апаратного забезпечення процесів вимірювання;
- прикладну метрологію, включаючи розробку апаратно-програмних засобів і систем вимірювання, еталонну базу фізичних величин та ін.;
- законодавчу метрологію, яка включає законодавчі акти, стандарти і рекомендації, виконання яких регламентуються і контролюються державою для забезпечення єдності вимірювань у країні та за її межами.

**Означення вимірювання.** Враховуючи широкий діапазон використання вимірювання, доцільно навести три варіанти його означення [7, 62, 63, 74, 95].



Рис. 1.1. Схема використання вимірювань

**Філософія.** Вимірювання — створення і використання на кожному етапі розвитку суспільства ефективного вимірювального інструментарію як основного ресурсу пізнання світу.

**Метрологія.** Вимірювання — відображення динаміки у просторі і часі значень і характеристик різних фізичних величин у кількісний результат на базі взаємодії з об'єктом дослідження спеціальних засобів вимірювання.

**У широкому сенсі.** Вимірювання — отримання і використання результатів експериментальних вимірювальних процедур для моніторингу та керування режимами функціонування об'єктів і систем у різних галузях науки, техніки і господарства, моніторингу рівня та якості життя суспільства.

Кожна наука стає більш структурованою, якщо для неї сформована відповідна система законів, аксіом або постулатів. Як приклад наведемо аксіоми Евкліда в геометрії, аксіоми Колмогорова в теорії ймовірностей, закони Ньютона в механіці, таблицю Менделєєва в хімії, фундаментальні закони термодинаміки та електродинаміки.

Для вимірювання як поєднання теорії і практики можна запропонувати таку систему постулатів [7, 33, 63, 110, 111]:

**Постулат 1.** Динаміка змін властивостей, значень і характеристик фізичних величин об'єктів природи та цивілізації відбувається і проявляється у просторі та часі.

**Постулат 2.** Кількісний результат вимірювання фізичної величини формується як наслідок взаємодії об'єкта досліджень із засобом вимірювання на основі використання порівняльних операцій з мірою одиниці фізичної величини і опрацюванням отриманих даних вимірювання.

**Постулат 3.** Теорію і практику кожного вимірювання об'єднує та відображає математична модель динаміки у просторі і часі фізичної величини як модель невизначеності і відповідні оператори засобів вимірювання її перетворення для оцінювання результатів вимірювання.

До основних проблем вимірювання належать наступні [7, 74, 91, 95]:

**Проблема відображення.** Обґрунтування і відображення динаміки у просторі і часі фізичної величини у модель невизначеності вимірювання та відповідних операторів її перетворення у ланках і модулях засобів вимірювання.

**Проблема стабільності мір.** Забезпечення просторової однорідності та часової стаціонарності мір і еталонів у різних місцях і в різні моменти часу з метою забезпечення єдності вимірювань і досягнення заданих результатів і показників їх точності.

**Проблема захисту даних і результатів вимірювання.** Здійснення комплексу дій і використання засобів захисту під час формування, передачі, опрацювання та подання даних і результатів вимірювання відповідно до вимог безпеки інформації з метою мінімізації впливу як природних, так і навмисних завад та несанкціонованого доступу до вимірювальної інформації.

**Системи одиниць фізичних величин.** З історії розвитку вимірювання відомо, що першими засобами вимірювання були органи відчуття людини. Самі вимірювання почались з того моменту часу, коли певному матеріальному об'єкту чи процесу (наприклад, пальцю певної довжини, руці вождя племені, мішку зерна, часовому інтервалу, що відповідає певній фазі Сонця, Місяця на небі тощо) була поставлена у відповідність (відображення) абстрактна одиниця — як первинна числова міра, розмір фізичної величини. Поява одиниці числової системи стала відправною точкою розвитку геометрії, математики та інших наук. У подальшому формувались і використовувались різні системи одиниць фізичних величин. Факти формування і переходу на іншу систему одиниць свідчили про відповідні етапи розвитку земної цивілізації, тобто слугували своєрідними індикаторами їхньої діяльності, а для реалізації одиниць фізичних величин використовувався потенціал досягнень науки і техніки на відповідний період часу.



**Рис. 1.2.** Приклади часових інтервалів (шкал) моніторингу у різних предметних областях

Прикладом є процес формування сучасної системи одиниць СІ, використовуючи яку, результати вимірювання величин макросвіту отримують на основі одиниць величин мікросвіту. Наприклад, одиниця часу секунда (атомна секунда) системи СІ визначається так: *секунда (с) дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, що відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезія-133*. На сьогодні з використанням системи одиниць СІ здійснюють вимірювання до 100 електричних і магнітних величин та понад 4000 величин іншої фізичної природи.

Результати вимірювань є первинною корисною інформацією для подальших операцій контролю, діагностики, керування, прогнозу та ін. Вживається також поняття або термін *моніторинг*, який безпосередньо пов'язаний з вимірюванням, у першу чергу з кількісною інформацією про досліджуваний об'єкт чи систему, що розвивається в просторі та часі.

*Моніторинг* — процес досліджень у просторі і часі функціонування та стану різних об'єктів і систем для отримання динаміки їхніх поточних значень і характеристик за даними вимірювання для розв'язання задач контролю, діагностики, керування та прогнозу.

На базі даних вимірювань у різних предметних областях наведемо приклади орієнтовних часових інтервалів моніторингу (рис. 1.2), які значною мірою визначають методологію виконання



відповідних процесів вимірювання як об'єктів макросвіту, так і об'єктів мікросвіту.

**Процес вимірювання і основні етапи його реалізації.** Вимірювальні операції мають характерні особливості, які описують [74, 75, 95, 107]:

- взаємодію об'єкта досліджень з первинним вимірювальним перетворювачем (сенсором) засобу вимірювання;
- перетворення вимірювальної інформації об'єкта досліджень — інформації фізичної величини у вимірювальний сигнал, який є її фізичним носієм;
- порівняння рівня сигналу з розміром одиниці вимірювання і формування числових даних вимірювання;
- оцінювання і зображення кількісних результатів і характеристик невизначеності вимірювання.

Виконання таких операцій дає можливість відобразити специфіку процесу вимірювання, класифікувати апаратно-програмні засоби (системи) та описати такі етапи.

**Організаційно-підготовчий етап.** На цьому етапі формується, узгоджується замовником і виконавцем технічне завдання на проведення вимірювального експерименту, визначаються терміни його виконання, виділення необхідних засобів та інших ресурсів, у тому числі фінансових (рис. 1.3).

**Етап створення інформаційного та апаратного забезпечення.** На цьому етапі виконавцем розробляється, обґрунтовується інформаційне (моделі, міри, алгоритми, програми) та апаратне (засоби, системи, обладнання) забезпечення проведення вимірювального експерименту; створюється та узгоджується програма і методика проведення такого експерименту (рис. 1.4).

**Завершальний етап.** На цьому етапі виконавець здійснює натурний вимірювальний експеримент, опрацьовує дані вимірювання

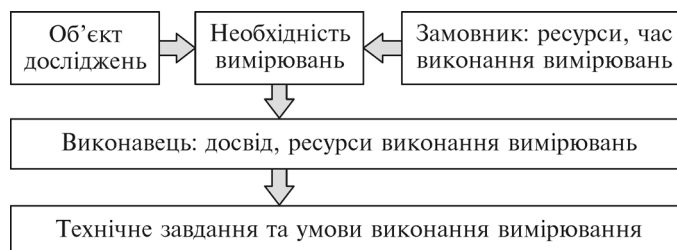


Рис. 1.3. Структурна схема проведення організаційно-підготовчого етапу процесу вимірювання



Рис. 1.4. Структурна схема проведення етапу створення інформаційного та апаратного забезпечення процесу вимірювання



Рис. 1.5. Структурна схема завершального етапу процесу вимірювання

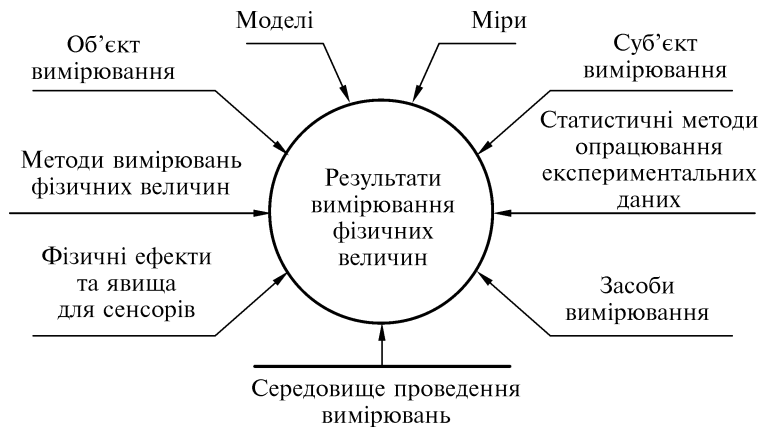


Рис. 1.6. Схематичне зображення формування результату вимірювання фізичних величин

та отримує результат і показники точності вимірювання. Ці результати оформляються і передаються замовнику для подальшого використання (рис. 1.5).

Інтегрально проблематику вимірювання фізичних величин з виділеними моделями і мірами схематично зображено на рис. 1.6.

Розглянемо детальніше моделі та міри у задачах вимірювання як основні предмети нашого дослідження.

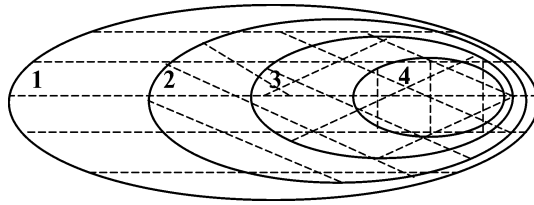
### 1.2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАННЯ

Вирішення широкого кола завдань вимірювань поєднуються на основі застосування фізичних і математичних моделей досліджуваних об'єктів, процесів і явищ. Незважаючи на той факт, що такі моделі є вторинними, тобто копіями, відображеннями, які не в повній мірі відповідають реальним об'єктам, їхня роль у методології вимірювань дуже вагома і має фундаментальний характер. Кожна з моделей, фізична та математична, доповнюють одна одну, що дає змогу підвищити ефективність процесу вимірювання, наприклад, обґрунтувати шляхи підвищення точності результатів вимірювань.

З метою врахування специфіки і характерних особливостей вимірювання запропоновано на множині широкого кола моделей виділити клас математичних моделей, які описують первинну інформацію вимірювання фізичних величин різних об'єктів досліджень. Клас таких моделей будемо називати *класом моделей невизначеності вимірювання* [62, 63].

*Математичною моделлю невизначеності вимірювання* є одновимірною або багатовимірною гільбертовою детермінованою або випадковою функцією, або їхні комбінації, значення і числові характеристики яких оцінюються результатами і показниками точності вимірювань.

Математична модель невизначеності вимірювання фізичної величини створюється на основі сукупності знань, гіпотез, початкових і граничних умов, сформованих за апріорними даними досліджень величини, записана з використанням математичних об'єктів, термінів і символів у вигляді логічно витриманої, несуперечливої структури, яка відображає динаміку в просторі і часі, властивості, значення і характеристики досліджуваної величини, а їх кількісне оцінювання необхідно здійснити опрацюванням даних вимірювального експерименту.



**Рис. 1.7.** Схематичне зображення еволюції моделі невизначеності вимірювання у вигляді діаграми Венна—Ейлера

Відомо, що енергетичні характеристики другого порядку (наприклад, енергія, потужність, дисперсія) гільбертових функцій є скінченними, тобто такі функції є фізично реалізованими, а не математичною ідеалізацією (такою, наприклад, як неперервний випадковий процес білого шуму, що має нескінченну дисперсію).

Наведене вище означення моделі невизначеності використовує найбільш типові і вживані в теорії і практиці вимірювань функції, як реалізації такої моделі. Ці функції називають *функціями невизначеності вимірювання*.

Модель невизначеності вимірювання є:

- необхідною складовою постановки кожного завдання вимірювання;
- гіпотетичною функціональною залежністю за відсутності необхідних апріорних даних побудови функціональної залежності, що характерно на первинних етапах дослідження нових фізичних величин;
- теоретичним інструментарієм побудови математичної моделі досліджуваної величини за даними вимірювань з досягнутими показниками точності.

Еволюцію моделей невизначеності вимірювання можна проілюструвати схемою у вигляді діаграми Венна—Ейлера (рис. 1.7). На рис. 1.7 позначено: 1 — загальна множина моделей; 2 — клас первинних моделей невизначеності вимірювань; 3 — модель досліджуваної величини з використанням кількісних результатів і досягнутих показників точності вимірювань; 4 — ідеалізована модель вимірювання, яка використовується в комп'ютерному вимірювальному експерименті та в інших випадках з урахуванням тільки кількісного результату вимірювань.

У процесі створення, обґрунтування та використання таких моделей необхідно враховувати характерні особливості вимірювання, які розглянемо детальніше.

Найбільш складними і важливими завданнями процесу вимірювань, які забезпечують успіх вимірювального експерименту, є виконання таких вимірювальних операцій:

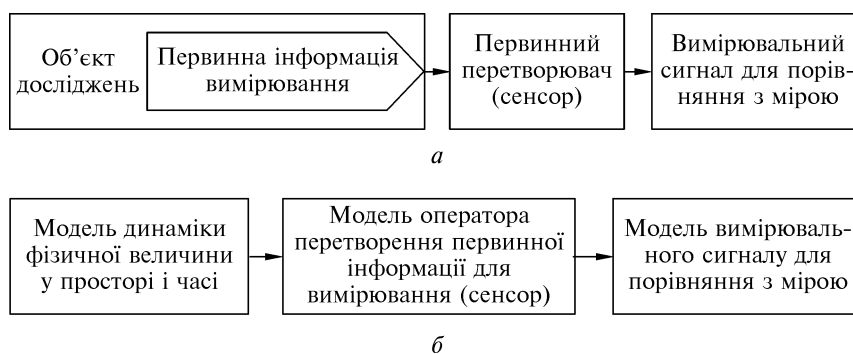
- ♦ з використанням апаратного забезпечення — формування вимірювальної інформації; перетворення сформованої інформації первинним перетворювачем (сенсором) у вимірювальний сигнал; порівняння сигналу з мірою фізичної величини і формування числової інформації (даних вимірювань);

- ♦ з використанням інформаційного забезпечення — обґрунтування і створення моделі фізичної величини; створення моделі оператора перетворення вимірювальної інформації; обґрунтування моделі вимірювального сигналу.

Виконання наведених вище вимірювальних операцій схематично ілюструє рис. 1.8.

У загальному випадку можна виділити три варіанти формування первинної інформації вимірювання об'єкта досліджень (ОД) (рис. 1.9).

Враховуючи різноманітність і різноплановість процесів вимірювання у широкому колі предметних областей галузей господарства, науки і техніки, наведемо класифікацію моделей невизначеності вимірювання (рис. 1.10). За ознаки класифікації вибрано предметні області використання, вид і характер моделей та комбінації моделей. Будь-яка класифікація до певної міри є умовною. Тому наведена на рис. 1.10 класифікація може доповнюватися або змінюватися відповідно до введення нових ознак і структур.



**Рис. 1.8.** Схема виконання перших операцій вимірювального експерименту на основі використання: *а* — апаратного забезпечення; *б* — інформаційного забезпечення

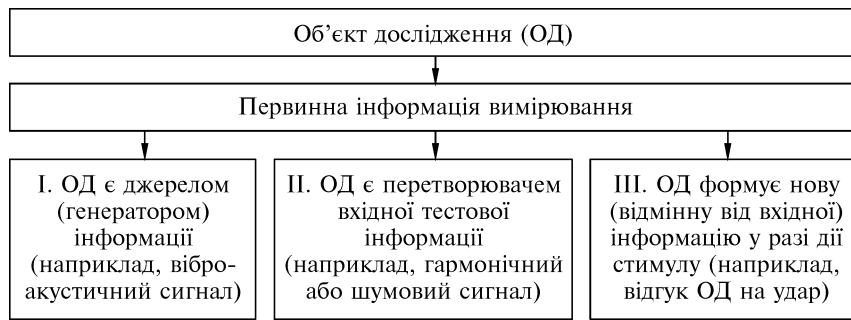


Рис. 1.9. Схема формування варіантів первинної інформації (сигналів) вимірювання об'єкта досліджень

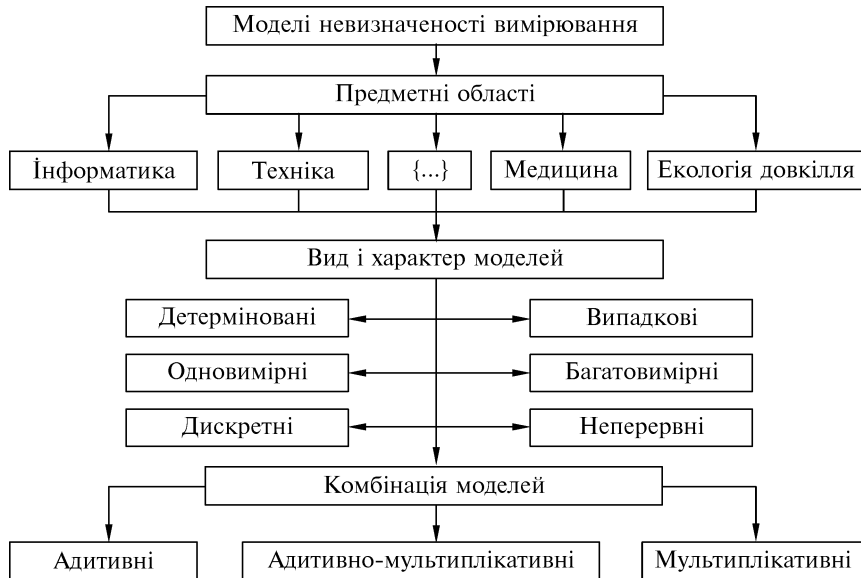


Рис. 1.10. Класифікація моделей невизначеності вимірювання

### 1.3. МІРИ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ВИКОРИСТАННЯ У ВИМІРЮВАННЯХ

Зростаюча потреба у вимірюваннях, постійне ускладнення процедур і засобів вимірювання, проникнення вимірювань у нові сфери матеріального світу потребувало на кожному етапі розвитку

людства відповідного логіко-методологічного осмислення поняття міри. Відповідно до запитів суспільства від давніх часів і до нині спостерігається процес розвитку філософської категорії міри — від етико-морального поняття до абстрактної математичної теорії міри. Для глибшого осмислення її змісту і ролі в теорії пізнання світу в цілому, і в метрології зокрема, стисло розглянемо виникнення, розвиток і використання цього поняття у філософському, математичному і метрологічному аспектах.

Наведемо деякі факти з історії розвитку міри [22, 51, 102, 103].

В античній міфології символом міри була богиня Немезіда, яку зображували з терезами в руках. У це поняття вкладався етико-моральний зміст, що розумівся як порівняння помірності, зваженості у вчинках і словах на протигагу надмірності та ненегативним вчинкам у діяльності людей.

Відомий давньогрецький вчений Піфагор та його учні (VI—IV ст. до н. е.) намагались кількісно виразити міру за допомогою чисел і пропорцій. Наприклад, ознакою справедливості вони вважали еквівалентність, рівність, намагаючись виразити їх числами. Так, справедливість вони визначали як *перші квадратні числа*, тобто 4 чи 9. Обговорюючи проблему співмірності, величини, що підпадали під одну міру, називали *спільномірними*, а ті, що не підпадали, — *неспільномірними*.

Пізніше Аристотель (445—385 р. до н. е.), один з найвидатніших давньогрецьких філософів і вчених, розмірковував наступним чином: «Міра (від грецького *metron*) є те, чим пізнається кількість; а кількість пізнається або єдиним, або числом, а будь-яке число — єдиним, отже, будь-яка кількість є такою, що пізнається ...». Так, єдине, будучи початком числа, виражається в деякій неподільній мірі — масштабі вимірювання, що має числову форму. «Міра числа є найточнішою: адже одиниця сприймається як дещо у всіх відношеннях неподільне». У всіх інших випадках міра являє собою зразок вимірювання, наприклад, рідкого чи сипучого, що має вагу і величину. Перераховуючи різні види мір як одиниці вимірювань, Аристотель висловлював думку, що не можна обмежитися лише однією мірою і слід виокремлювати декілька мір, наведених у тих чи інших числових співвідношеннях або пропорціях, крім того, міра як одиниця вимірювання повинна бути *однорідною з вимірюваним*.

Давньогрецький філософ Протагор (близько 490—420 р. до н. е.), один з найвідоміших софістів, наголошував: «Людина — міра всіх речей: для існуючих — що вони існують, для неісную-

чих — що вони не існують». У цьому висловлюванні вже закладено думку про різну якість речей і перехід від однієї якості до іншої. Але тільки у XVIII ст. видатний німецький філософ Георг Вільгельм Фрідріх Гегель (1770—1831) розвинув цю ідею. Аналізуючи зміну якості у категоріях кількості, він прийшов до філософської категорії міри. Саме дослідження у нерозривному зв'язку категорій якості і кількості дало змогу Гегелю переконливо показати, що зміни буття є не лише переходом однієї величини в іншу, а й переходом якісного у кількісне і навпаки. За Гегелем міра — це єдність якості і кількості, які обумовлені самою природою об'єкта. У такому визначенні відображено нерозривний зв'язок між якісною і кількісною сторонами кожного предмета чи явища матеріального світу. Міра означає, що будь-яка певна якість зв'язана з певною кількістю. Кожному якісно своєрідному предмету чи явищу притаманні певні кількісні характеристики. Останні мають властивості мінливості та рухомості.

За Гегелем перехід кількісних змін в якісні означає заміну однієї міри іншою. Якщо кількісні зміни відбуваються у межах притаманної для цього явища міри, їхня якість лишається незмінною. Якщо кількісні зміни призводять до виходу явища за межі своєї міри, відбудеться зміна якості. Наприклад, температура води не впливає на її рідкий стан до моменту досягнення точки кипіння, коли вода переходить у пару. Межі таких переходів власне і є мірою і відіграють роль своєрідних еталонів, внутрішніх відносно предметів. У цьому сенсі міра є внутрішньою властивістю предмета, що ґрунтується на єдності його кількісних і якісних характеристик.

Трансформація кількості в якість має і зворотний процес — перехід якості в кількість. Новоутвореній якості відповідає нова міра, тобто нова конкретна єдність якості та кількості, що уможливорює подальші кількісні зміни нової якості і наступний перехід кількості в якість. Відкритий Гегелем закон взаємного переходу кількісних і якісних змін описує механізм саморозвитку явищ матеріального світу.

Поняття міри почали активно використовувати і наповнювати новим змістом у різних напрямках діяльності суспільства.

У використанні міри слід виокремити:

- міру в широкому сенсі, в основному, як якісну категорію;
- міру у вузькому сенсі як кількісну категорію.

Характеризуючи інтегральну роль міри, зазначимо наступне. З розвитком промисловості і виробництва, розширення і зміц-



нення торговельних зв'язків між державами були здійснені спроби введення різних мір як єдиних правил міждержавних відносин. Ці спроби виявилися як вдалим, так і не зовсім, про що можна судити і в наш час.

Ми розглядатимемо міри, які використовуються у метрології згідно з Концепцією невизначеності.

Успішність використання єдиних мір метрології міжнародною спільнотою можна вважати одним з унікальних фактів в історії земної цивілізації. Метрологія стала інтернаціональним інструментом спілкування вчених, дослідників, фахівців у різних галузях виробництва усіх країн світу.

**Роль міри в оцінюванні невизначеності вимірювання.** У першу чергу така постановка задачі має філософське підґрунтя, що зазначалося раніше. У процесі створення вимірювального інструментарію міра є фундаментальним елементом, на основі якого якість оцінюється кількісно. Тим самим формується принципово нова кількісна інформація, зменшується невизначеність досліджуваних об'єктів, явищ і процесів. Цей факт дає можливість скоригувати відому тріаду методології проведення наукових досліджень — «*модель* → *алгоритм* → *програма*» на більш аргументовану — «*модель* → *міра* → *алгоритм* → *програма*».

Ефективність практичної реалізації і використання мір визначається їхніми значеннями невизначеності при відтворенні одиниць фізичних величин. Чим менше значення невизначеності, тим вищий клас еталона чи засобу вимірювання при реалізації відповідної міри. Відомо, що кожна країна має національні еталони одиниць фізичних величин. Номенклатура еталонів та їхня характеристика невизначеності оцінюються на рівні валового продукту і вважаються національною скарбницею кожної країни. Найбільш розвинені країни світу мають і найбільшу номенклатуру національних еталонів одиниць фізичних величин.

**Міри математики.** Теорія міри — один із важливих для практичного застосування напрямів математики, в рамках якого обґрунтовуються і визначаються методи створення різних видів мір.

Викладений далі матеріал є адаптованим до проблематики вимірювання. Міра як математичний об'єкт знайшла практичне застосування для створення мір різних фізичних величин — маса, довжина, площа, об'єм тощо.

У загальному випадку міра є зліченно-адитивною функцією множин, вона набуває лише невід'ємних значень, включаючи нескінченність. У математиці досліджується низка мір, напри-

клад: міри Жордана; Лебега; Лебега—Стільтьєса; стохастична міра та ін. [104]. Так, означення міри Жордана близьке до означення площі, об'єму у просторі. Міра Лебега—Стільтьєса використовується у теорії ймовірностей. Стохастична міра є випадковою зліченно-адитивною функцією множин. При цьому для доведення умови зліченно-адитивності стохастичної міри використовують різні види збіжності, а саме: збіжність за ймовірністю; у середньоквадратичному; з ймовірністю одиниця [104]. Але найбільш широке використання для теорії і практики вимірювань мають числові міри, тобто міри, які набувають числових значень.

У наш час цікавим є факт узагальнення міри, пов'язаний з вимірюванням. Відомо, що раніше міра набувала лише невід'ємних числових значень. У практичних задачах вимірювання виникло питання, як визначити міру фізичної величини з від'ємним електричним зарядом? Простим і природним узагальненням міри є *заряд*. Цей термін запозичений з фізики. У фізиці заряд відрізняється від маси тим, що маса завжди невід'ємна, а заряд може бути як додатним, так і від'ємним. Така сама відмінність існує між мірою і зарядом як математичними об'єктами. Цей факт суттєво розширює межі використання методів теорії міри в метрології.

Як приклади наведемо означення ймовірнісної міри і заряду.

**Ймовірнісна міра.** Математична модель фізичної величини — випадкова величина  $\xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  широко використовується в теорії вимірювання. За невідомих характеристик  $\xi(\omega)$  є предметом вимірювання і визначається як функція невизначеності вимірювання.

Відомо, що  $\xi(\omega)$  як випадкова функція має:

- область визначення, що задається ймовірнісним простором  $(\Omega, F, P)$ , де  $\Omega$  — простір елементарних подій  $\omega \in \Omega$ ,  $F$  — алгебра ( $\sigma$ -алгебра) підмножини  $\Omega$ ,  $P$  — ймовірність елементарних подій:  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$  і  $P \in [0, 1]$ ;

- множину значень, що задається ймовірнісним простором  $(X, B, P_\xi)$ , де  $X \subseteq R$  — числова підмножина числової прямої  $R$ ,  $B$  — алгебра ( $\sigma$ -алгебра) підмножини  $X$ ,  $P_\xi$  — ймовірність значень  $\xi(\omega)$ .

Випадкова функція  $\xi(\omega)$  повністю задається функцією розподілу:

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}, x \in R.$$

Ймовірнісна міра  $\xi(\omega)$  як функція множин не може бути безпосередньо записана у загальному вигляді, для неї породжувальною функцією є функція  $F(x)$ .

Ймовірнісна міра  $P_\mu(x_1, x_2)$  визначає ймовірність того, що випадкова неперервна функція  $\xi(\omega)$  набуде значення із неперервного числового інтервалу

$$[x_1, x_2], x_1, x_2 \in R, x_1 > x_2,$$

тобто

$$P_\mu[x_1, x_2] = P\{\omega \in \Omega : x_1 \leq \xi(\omega) \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Таким чином, одновимірна ймовірнісна міра  $P_\mu[x_1, x_2] \geq 0$  є невід'ємною, нормованою і безрозмірною функцією з множиною значень.

Для складніших випадкових функцій, наприклад, двовимірного випадкового вектора  $\Xi_2(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ , де  $\{\xi_i(\omega_i), i = 1, 2\}$  — одновимірні випадкові величини, ймовірнісна міра вектора визначається також складніше з використанням двовимірної функції розподілу вектора  $F(x, y)$ . Наприклад, ймовірнісна міра знаходження значень випадкового вектора  $P_\mu[x \pm h_x, y \pm h_y]$  у межах двовимірного числового простору площини  $(x, y)$

$$((x - h_x) < \xi_1(\omega) < (x + h_x), (y - h_y) \leq \xi_2(\omega) < (y + h_y))$$

визначається виразом

$$\begin{aligned} P_\mu[x \pm h_x, y \pm h_y] &= F(x + h_x, y + h_y) - \\ &- F(x - h_x, y + h_y) - F(x + h_x, y - h_y) + F(x - h_x, y - h_y), \\ x, y &\in R, \quad h_x, h_y > 0. \end{aligned}$$

Розглянемо приклад заряду як міри з використанням топологічного простору.

**Заряд як міра.** За означенням заряд також є функцією множин. Для розкриття суті заряду використаємо вимірний топологічний простір, як відповідну формалізацію числових даних ви-

мірювань, отриманих з використанням заряду як міри. У подальшому використання топологічного простору дає можливість оцінити невизначеність результату вимірювань типу В.

Побудову вимірного топологічного простору із зарядом як об'єкта теорії міри виконаємо поетапно з коментарями інтерпретації процесу вимірювання.

У зв'язку з тим, що побудова топологічного простору є теорією, а отримання реальних даних вимірювань — практикою, тобто реалізацією теорії, етапи теорії позначимо одинарним числом, а коментарі практика — подвійним числом.

1. Задається числова множина даних вимірювань  $X$  з елементами  $x \in X$ .

1.1. Множина  $X$  — дискретна послідовність даних вимірювань може бути отримана з використанням різних мір, включаючи заряд.

2. Кожному елементу  $x \in X$  ставиться у відповідність окіл  $U(x)$  як система відкритих множин.

2.1. Для кожного значення послідовності даних вимірювання ставиться у відповідність окіл, розмір якого визначається інтегрально невизначеностями фізичної величини і засобу вимірювання.

3. Створюється система відкритих множин  $I, U(x) \in I, x \in X$ , яка називається топологією.

3.1. Топологію можна використати для прогнозу значень подальших даних вимірювання.

4. Пара  $(X, I)$  називається топологічним простором, якщо виконуються наступні дві умови:

а) для  $\forall x \in X$  має місце

$$\exists U(x) \in I; \quad (1.1)$$

б) для  $\forall x \in X$  і  $(U(x), V(x))$  має місце  $\exists W(x) \in I$ , де

$$W(x) \subseteq U(x) \cap V(x). \quad (1.2)$$

4.1. В основному виконання наведених умов — це формування алгебри  $(\exists)$  підмножин  $X$  та  $I$  для формалізації побудови топологічного простору.

5. Топологічний простір  $(X, I)$  називається вимірним, якщо для нього крім виконання умов (1.1) і (1.2) додатково клас підмножин  $I$  є  $\sigma$ -алгеброю.

5.1. Виконання додаткової умови, включаючи зліченний (нескінченність) випадок, є важливим для коректної формалізації з метою врахування всіх можливих випадків класу підмножин  $I$ .

6. Топологічний простір  $(X, I)$  називається хаусдорфним, якщо для нього крім виконання умов (1.1) і (1.2) додатково виконується така умова:

$$в) \text{ для } \forall x, y \in X \exists [U(x), U(y)] \in I : U(x) \cap U(y) = \emptyset, x \neq y.$$

6.1. Властивість хаусдорфного топологічного простору — кожна пара точок такого простору має околиці, які не перетинаються згідно з аксіомою відокремлення Хаусдорфа, має принципово важливе значення для отримання даних вимірювання. Саме завдяки їй два значення даних вимірювання можна вважати різними з використанням роздільної здатності засобу вимірювання.

7. Дійсна функція  $q$  задана в просторі  $X$  на  $\sigma$ -алгебрі підмножин  $I$  так, що

$$q(A) \in \Sigma \subseteq R, A \in I. \quad (1.3)$$

Для неї виконуються наступні умови:

$$з) \quad q(\emptyset) = 0; \quad (1.4)$$

д) функція  $q$  є зліченно-адитивною, тобто для

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$$

маємо

$$q\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} q(A_i). \quad (1.5)$$

7.1. З умов (в) і (з) випливає, що заряд як міра відповідає всім її умовам за винятком умови невід'ємності. Заряд  $q$  може бути як від'ємним, так і додатним. Це важливо для реалізації одиниць фізичних величин, які можуть мати різні знаки.

8. Сукупність  $(X, I, q)$  називається вимірним топологічним простором із зарядом. Ця сукупність є математичною моделлю загальнішого характеру порівняно з імовірнісною мірою для реалізації мір метрології як матеріальних об'єктів для засобів (систем) вимірювання.

Наведені вище міри стосуються величин, які задані на числовій прямій. У той самий час значна частина завдань вимірюван-

ня пов'язана з дослідженням випадкових кутів. Останні, як математичні об'єкти, мають певну специфіку, яка призводить до необхідності задання ймовірнісних мір на колі. Детальніше ці питання розглянуто в розділі 3.

Розглянемо реалізацію фізичних мір у метрології.

**Фізичні міри.** Поняття міри є визначальним і для метрології. Сучасна трактовка поняття міри для прикладних технічних застосувань формувалася починаючи з XVII ст., коли процедури вимірювання стали методологічно значущими та вкрай важливими для розвитку матеріального виробництва, а номенклатура вимірюваних фізичних величин почала стрімко збільшуватись. На сьогодні у метрології загальноприйнятим є наступне означення: *міра* — це вимірювальний пристрій, що реалізує відтворення та (або) збереження фізичної величини заданого розміру. Зустрічається й інше означення: *міра (міра фізичної величини, міра величини)* — засіб вимірювання у вигляді якогось тіла, речовини чи пристрою, призначений для відтворення та збереження фізичної величини одного або декількох заданих розмірів, значення яких виражені у встановлених одиницях і відомі з необхідною точністю. У цих означеннях використано такі вихідні поняття як величина і фізична величина. У широкому розумінні *величина* — це узагальнення конкретних понять, наприклад, довжини, плоского кута, площі, маси тощо; *фізична величина* — властивість, спільна в якісному сенсі для багатьох фізичних об'єктів (чи їх станів), та індивідуальна для кожного з них у кількісному відношенні. Зазвичай фізичні величини мають відповідні розмірності. Величини як окремі самостійні об'єкти не існують, вони є певними характеристиками групи об'єктів матеріального світу. Тому й під мірою у наведених вище означеннях мається на увазі матеріальний носій фізичної величини заданого розміру.

Наведені означення міри орієнтовані на практичну реалізацію вимірювань і не пояснюють її фізико-математичного змісту. У такому сенсі *міра фізичної величини* — це деяка числова функція  $\mu(\cdot)$ , що ставить у відповідність кожній підмножині  $A$  з множини значень фізичної величини  $X$  деяке невід'ємне (у загальному випадку іменоване) число  $N = \mu(A)$ . Для міри фізичної величини зберігається аксіоматика міри множин. Певна відмінність пов'язана з необхідністю вимірювання іменованих та від'ємних за значенням фізичних величин. Остання особливість

визначається вибором нуля шкали вимірювання і формально може бути врахована штучним уведенням, за певною логічною умовою, знака «-», або врахуванням певної константи  $C$ :  $\mu(A) = \mu(A) - C$ . Наприклад, у випадку переходу від абсолютної температури до температури за шкалою Цельсія  $C = 273,15$  К.

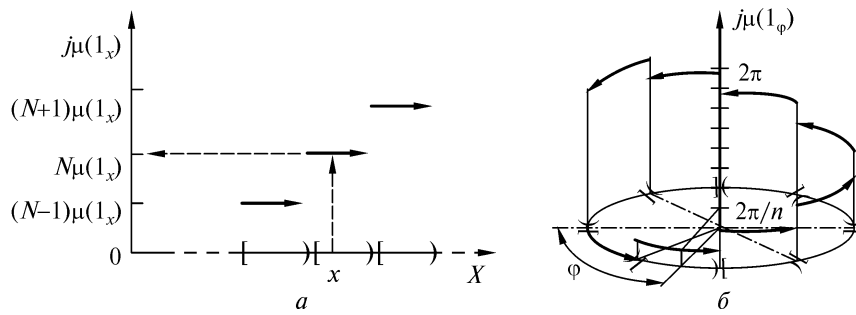
Характерною властивістю величини є можливість її вимірювання, тобто  $[x_j, x_{j+1})$  порівняння з деякою величиною того ж роду і визначеного розміру, яка за домовленістю прийнята за одиницю вимірювання, тобто за міру. Методологічно використання мір множин для вимірювань можна обґрунтувати наступним чином. Розмір фізичної величини, внаслідок дії сукупності різних обтяжувальних факторів, не може бути визначений з як завгодно високою точністю. Тому весь діапазон вимірювання, наприклад скалярної фізичної величини  $X$ , доцільно розбити на напівінтервали вигляду  $X_j, j = 1, 2, 3, \dots$ . Кожний з таких напівінтервалів, що не перетинаються, являє собою певну множину розмірів фізичної величини. На сукупності таких множин можна побудувати числову функцію, що має властивості міри.

У результаті вимірювання отримують неіменоване число  $N$ , що виражає відношення розміру  $x$  вимірюваної величини  $X$  до міри  $\mu(1_x)$ , визначеної для заданої одиничної множини  $1_x$  значень  $X$ . Вибір  $1_x$  і  $\mu(1_x)$  здійснюється за домовленістю і обґрунтовується в межах прийнятої системи одиниць фізичних величин. Головна мета вимірювання — знайти значення  $x$  фізичної величини  $X$  як визначення кількісної оцінки її розміру [1]:

$$Y = N \cdot \mu(1_x), \quad (1.6)$$

реалізується на основі відтворення матеріальною мірою розміру фізичної величини. У рівнянні (1.6) не враховано похибки вимірювання і відтворення розміру фізичної величини. Процес вимірювання скалярної величини  $X$  у випадку, якщо  $\mu(\cdot)$  задана ступінчастою функцією, схематично показано на рис. 1.11.

З рис. 1.11, а бачимо, що будь-який розмір фізичної величини з множини її значень у межах кожного з напівінтервалів відображається одним іменованим числом. Однозначні міри фізичних величин відтворюють один її розмір, багатозначні — декілька розмірів. У цілому міри множин і фізичних величин є зовнішніми відносно предмета вимірювання.



**Рис. 1.11.** Графічна ілюстрація процесу вимірювання фізичної величини, розподіленої на прямій (а) та на колі (б)

Наведені вище відомості про фізичні міри стосуються розподілених на числовій прямій величин. Тепер розглянемо особливості мір кутових величин, які мають певну специфіку.

Відомо, що для довільного кола зі скінченим значенням радіуса величина центрального кута визначається як відношення довжини дуги, на яку спирається цей кут, до довжини радіуса цього кола. Величина повного центрального кута дорівнює  $2\pi$ . Природно, що в основу визначення міри кута покладено число  $\pi$ . Міра кута — число  $\pi$  чи його частка, може відтворюватись або фізично за допомогою кругових шкал чи лімбів (що має місце, наприклад, у квадрантах, транспортирах, секстантах тощо), або математично на основі спеціальних розрахунків [49]. Останнє робить кутові вимірювання (до яких належать і фазові вимірювання циклічних сигналів) особливо привабливими з огляду на забезпечення єдності вимірювань та досягнення високих показників точності.

Процес вимірювання плоского кута у випадку, якщо його міра  $\mu(1_\varphi)$  задана ступінчастою функцією, показано на рис. 1.11, б. У цілому формування значення вимірюваного кута відбувається аналогічно (1.6) з тією відмінністю, що ступінчасту функцію задають в циліндричній системі координат. Суттєва особливість формування міри для кутових вимірювань полягає в тому, що множина значень кута визначається через коло — замкнену криву. Кутам  $0$  і  $2\pi$  відповідає одна точка кола, в якій міра кута стрибкоподібно змінюється на  $2\pi$ .



### 1.4. КОНЦЕПЦІЯ УЗГОДЖЕННЯ ФІЗИЧНИХ ТА ЙМОВІРІСНИХ МІР У ВИМІРЮВАННЯХ

У структурі емпіричних методів пізнання світу вимірювання внаслідок об'єктивності та інформативності займають особливе місце. Метрологія, як наука про вимірювання, у своєму розвитку пройшла складний шлях від детерміністського до ймовірнісного підходу. Навіть за останні десятиліття поняття і зміст вимірювання суттєво трансформувалися. Для підтвердження цього факту достатньо навести такі означення вимірювання. У праці [74] зазначено: «Вимірювання — це відображення властивостей об'єкта, які проявляють себе щодо еквівалентності, порядку та адитивності обмеженим рядом іменованих натуральних чисел». У міжнародному словнику з метрології VIM-3 (2003) наведено більш широке означення, в якому підкреслено ймовірнісний характер результату вимірювання: «Вимірювання — процес отримання одного чи більше значень величини, які можуть бути обґрунтовано приписані величині». У цьому ж словнику результат вимірювання тлумачиться як набір значень, що приписуються вимірюваній величині разом з *будь-якою іншою доступною і суттєвою інформацією* (наприклад, це може бути закон розподілу ймовірностей, стандартна чи розширена невизначеність, ймовірність охоплення тощо). Стохастичний характер вимірювання як процесу підкреслює й інша характеристика — ймовірність охоплення, тобто ймовірність того, що сукупність істинних значень вимірюваної величини знаходиться у вказаному інтервалі охоплення. Найчастіше результат вимірювання подають у формі інтервалу охоплення, що заданий своїми межами і відповідною ймовірністю охоплення [107].

В основу всіх відомих означень вимірювання покладено відображення множини значень вимірюваної величини, якості об'єктів дослідження у число — іменоване чи неіменоване. Таке відображення є найбільш зручним і дає змогу формалізувати результат вимірювання та застосувати математичні методи їхнього опрацювання. Стисло зупинимось на логіко-математичних поняттях ізоморфізму та гомоморфізму та їх використанні в теорії вимірювань. Ці поняття виражають однаковість (ізоморфізм) чи уподоблюваність (гомоморфізм) будови систем (множин, процесів, конструкцій тощо).

Дві системи, що розглядаються абстрактно від природи їх складових елементів, є ізоморфними одна одній, якщо кожному

елементу першої системи відповідає лише один елемент другої і кожному зв'язку в одній системі відповідає зв'язок в іншій системі і навпаки (рис. 1.12).

Така взаємно однозначна відповідність називається *ізоморфізмом*. Повний ізоморфізм має місце лише між абстрактними, ідеалізованими об'єктами (наприклад, відповідність між геометричною фігурою та її аналітичним виразом у вигляді формули; відрізок прямої як множина точок і множина дійсних чисел). Найчастіше ізоморфізм пов'язаний не з усіма, а лише з деякими фіксованими в пізнавальному аспекті властивостями і відносинами порівнюваних об'єктів, які в інших своїх відносинах можуть відрізнятися. Саме властивість ізоморфізму дає змогу досліджувати існуючі в об'єкті досліджень (ОД) співвідношення за їх моделлю.

У випадку, коли досліджується дія фізичних законів за відомих умов, виконується теоретичний аналіз математичних формул, рівнянь вимірювань у макросвіті, відображення множини значень якості досліджуваних величин чи процесів та множин чисел можна вважати ізоморфними.

Доведення або обґрунтування ізоморфізму для завдань вимірювань відіграє фундаментальну роль. Це пов'язано з наступним. У загальному випадку задача вимірювання є оберненою задачею теорії сигналів і систем. У разі доведення ізоморфізму розв'язок такої задачі існує.

На відміну від ізоморфізму *гомоморфізм* — це відповідність об'єктів (систем) однозначна лише *в один бік*. Тому гомоморфний образ є неповним, наближеним відображенням структури оригіналу. Відношення гомоморфізму є більш загальними (і слабкішими). Тому будь-який гомоморфізм є гомоморфізмом, але не навпаки.

У вимірювальному експерименті множина  $M$  значень властивостей об'єкта дослідження гомоморфна множині  $M'$  параметрів та характеристик отримуваних інформаційних сигналів. Властива гомоморфізму невзаємооднозначність відображення в загальному випадку дає змогу розв'язувати прямі задачі теорії вимірювань (моделювання) і ускладнює розв'язання обернених задач (власне

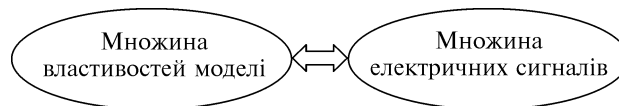


Рис. 1.12. Графічна ілюстрація принципу ізоморфізму

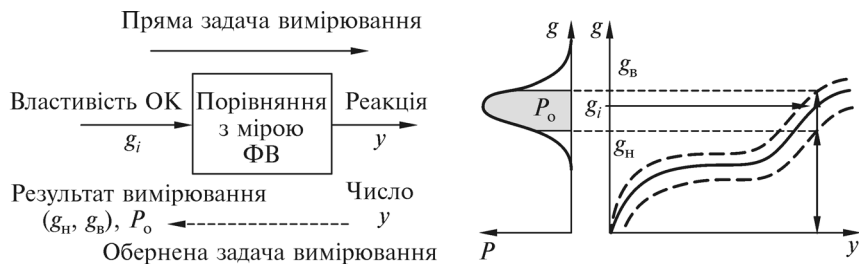


Рис. 1.13. Схема формування результату вимірювання ( $g_b, g_n$  — верхня і нижня межі невизначеності)

отримання результатів вимірювання). Завданням прямої задачі є знаходження наслідків відомих або заданих причин (інформаційних сигналів як функцій певних властивостей ОД), тобто «вздовж» причинно-наслідкових зв'язків (рис. 1.13).

Обернені задачі полягають у знаходженні причин (властивостей ОД за відомими сигналами), тобто в напрямку «проти» причинно-наслідкових зв'язків. Прямі задачі виникають на етапі проектування, аналізу засобу вимірювання, а обернені задачі — власне під час вимірювання (контролю).

Необхідність спільного використання фізичної та ймовірнісної мір для формування результату вимірювання ілюструє рис. 1.14. Використовуючи фізичну міру, отримують лише одне число (або вектор у випадку багатомірних вимірювань). Результат вимірювання, як вектор, утворений певним набором приписаних вимірюваній величині значень разом з іншою суттєвою інформацією, формується за допомогою ймовірнісної міри.

У структурі на рис. 1.14 маємо:

1. Сенсор може виконувати перетворення фізичної величини  $g$  на іншу —  $K(g)$ , для якої значно легше створити міру  $K_o(g)$ .

2. Застосовуючи міру фізичної величини  $K_o(g)$  до розміру  $K(g)$  у загальному випадку вимірювання поля в точці простору з декартовими координатами  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$ , отримують число

$$y(g, x, y, z, t) = [K(g, x, y, z, t)/K_o(g)]^+,$$

де  $[\cdot]^+$  — позначення операції виділення цілої частини числа.

3. Унаслідок дії вектора  $\bar{p}$  неврахованих впливових факторів обернене перетворення  $y \rightarrow g$  дає не одне значення вимірюваної величини, а певний окіл.

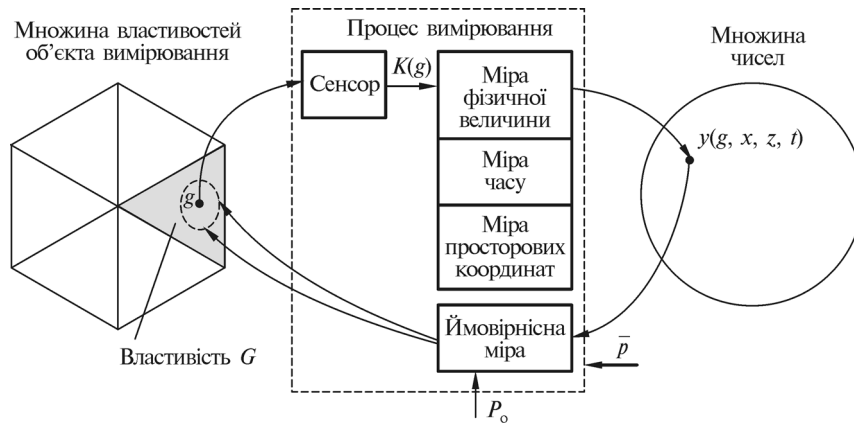


Рис. 1.14. Спільне використання фізичної та ймовірнісної мір у вимірюваннях

4. Результат вимірювання отримуємо не лише як наслідок технічних засобів порівняння розміру вимірюваної фізичної величини зі значенням, прийнятим за одиницю її вимірювання, а й як результат застосування ймовірнісної міри, певного математичного апарата та математичної статистики.

5. Перетворення різних фізичних величин на кутову величину (плоский кут, фазовий зсув сигналів) є зручним типом перетворення, оскільки одиниця вимірювання останньої — радіан (або число  $\pi$ ) відтворюється засобами обчислювальної техніки з практично необмеженою точністю незалежно від місця і часу проведення вимірювань.

6. Стохастичний підхід у теорії вимірювань набуває особливого значення у випадку вимірювання фізичних величин, що мають яскраво виражену ймовірнісну природу, наприклад, у випадку нановимірювань, дослідження квантових ефектів тощо.

Отже, отримання змістовного результату вимірювання ґрунтується на використанні *узгодженої, нерозривно поєднаної сукупності* фізичних та ймовірнісних мір, класифікацію яких наведено на рис. 1.15.

**Приклад використання мір в інформаційно-вимірювальних системах (ІВС).** Вирішення завдання забезпечення однорідності та стаціонарності міри в теорії ІВС у кожному конкретному випадку вимірювання має свою специфіку і характерні особливості. У той самий час можна виділити загальні властивості використання і види міри:

#### 1.4. Концепція узгодження фізичних та ймовірнісних мір у вимірюваннях

- **M1** — міра одиниці величини;
- **M2** — міра одиниці просторових координат місця проведення вимірювань;
- **M3** — міра одиниці часу проведення вимірювань;

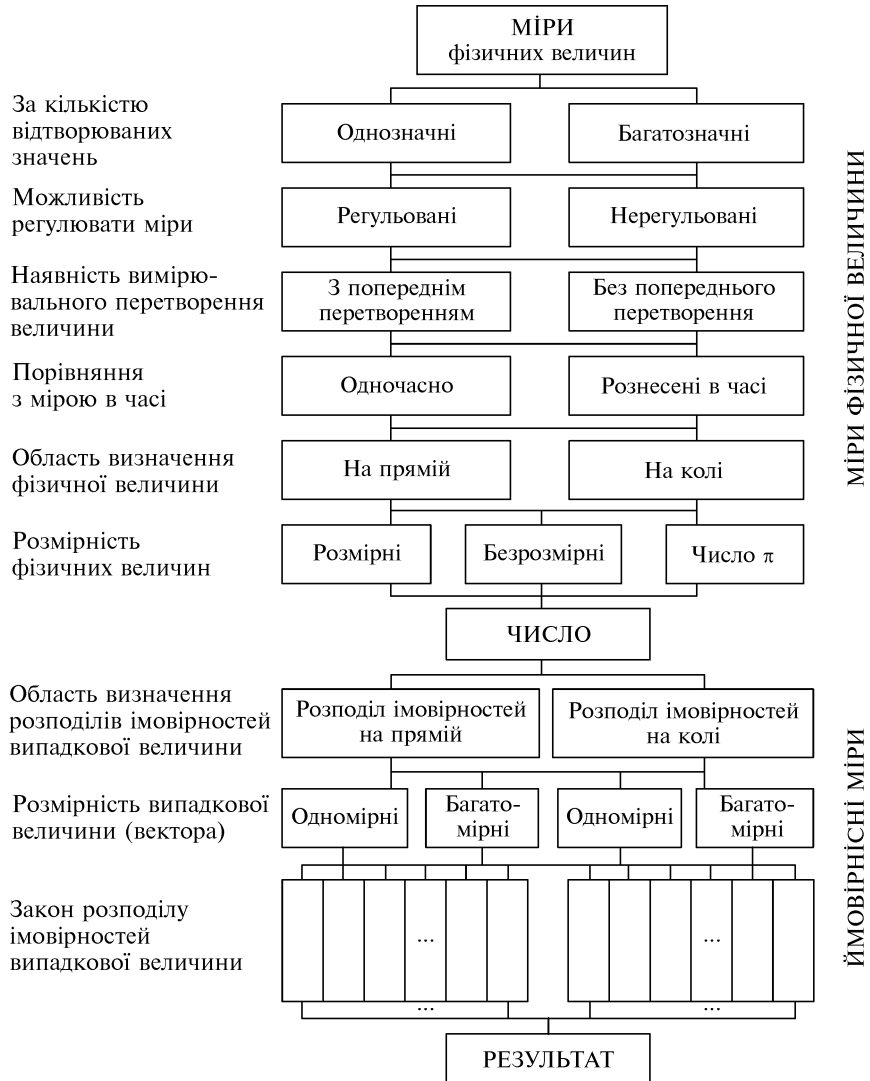


Рис. 1.15. Класифікація фізичних та ймовірнісних мір для вимірювання

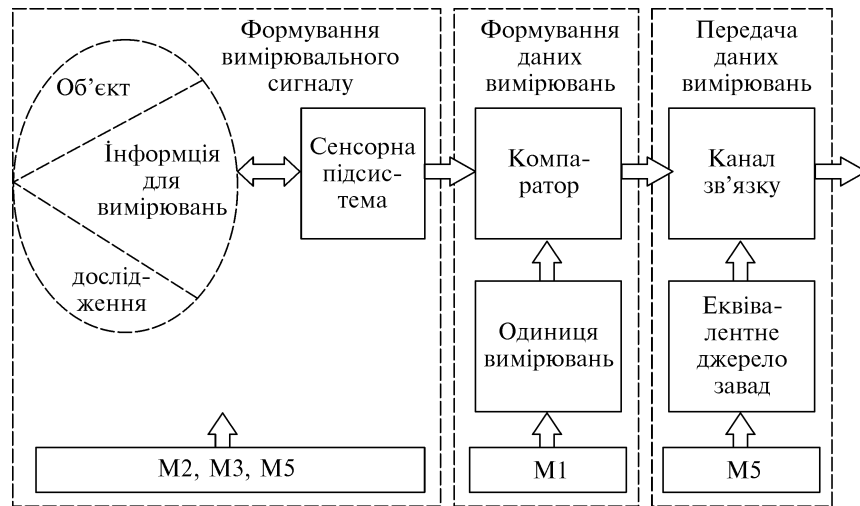


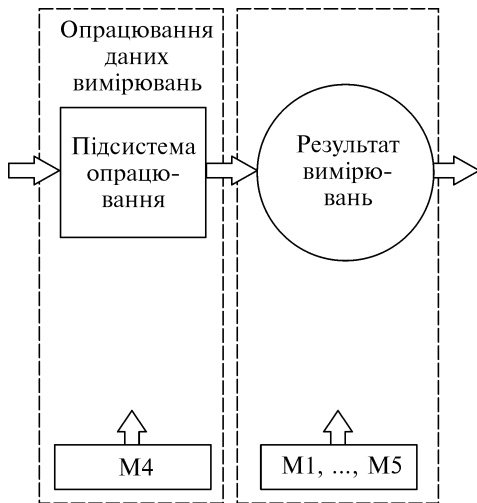
Рис. 1.16. Схематичне зображення використання різних

- **M4** — ймовірнісна нормована міра результату і точності вимірювань за статистичного опрацювання даних вимірювань;
- **M5** — міра захисту інформації конкретного процесу вимірювань.

На рис. 1.16 схематично зображено використання наведених мір під час перетворення вимірювальної інформації функціональними модулями ІВС.

Частинний випадок захисту інформації — підвищення завадостійкості вимірювань застосовується практично для всіх процесів вимірювань. У структурі ІВС, зазвичай, є модуль фільтрації сигналів, що забезпечує збільшення співвідношення сигнал/завада на своєму виході.

У випадку вимірювань  $n(n > 1)$  величин є  $n$  мір одиниць досліджуваних величин. Перші три міри є фізичними мірами (у загальному випадку маємо  $n + 2$  мір), які реалізуються відповідними еталонами мір з заданою точністю. Однорідність і стаціонарність таких мір визначаються характеристиками технічних пристроїв і систем їх формування. Це дає можливість певною мірою керувати забезпеченням однорідності і стаціонарності фізичних мір під час процесу вимірювання в різних місцях простору і в різні часи, забезпечуючи при цьому порівняння результатів вимірювання і таким чином виконувати вимоги єдності вимірювань.



мір у структурі ІВС

Ймовірнісна нормована міра є не фізичною мірою, а мірою сукупності дії різних випадкових факторів на значення і характеристики даних і результату вимірювань під час їх проведення. Використання ймовірнісної міри за статистичного опрацювання даних вимірювання дає можливість підвищити точність результату вимірювання порівняно з точністю даних вимірювання.

Міра захисту інформації під час вимірювання є комплексною. Міра формується значною кількістю факторів, дія більшості з яких має випадковий характер. Це дає можливість визначити таку міру як імовірнісну, що може бути застосована як для окремих операцій, наприклад, для передачі даних вимірювань по каналах зв'язку, реєстрації результату вимірювань, так і для всього процесу вимірювання в цілому.

Значення точності наведених п'яти мір трансформуються відповідно у значення точності даних і результатів вимірювань у відповідних модулях ІВС.

### 1.5. ВИМІРЮВАННЯ ЯК ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ СИГНАЛІВ І СИСТЕМ

Обґрунтуємо використання відомих методів і формулювання постановок задач вимірювання, які відображають ті чи інші грані різноманітності і різноплановості проблематики вимірювання та підкреслюють головну роль моделей і мір їх розв'язання. Природно, що такі постановки задач і методи їх розв'язання використовують результати останніх досягнень природничих і технічних наук, зокрема математичного аналізу, математичної фізики, квантової механіки, обчислювальної математики, теорії ймовірностей і математичної статистики, теорії сигналів і систем, теорії ав-

томатичного керування, вимірювання і цифрового опрацювання сигналів та ін.

**Задача вимірювання як базова задача зменшення невизначеності результатів досліджень.** Термін або поняття *невизначеність* (англ. *uncertainty*) має широкий діапазон тлумачень та інтерпретацій за аналогією з поняттями *інформація* і *множина*. У широкому розумінні у *поняття невизначеності* вкладається наступний зміст: це ступінь незнання про досліджуваний об'єкт, який може бути зменшений шляхом виконання певних операцій з отримання кількісної інформації і це підтверджено реальними фактами.

Так, відомий французький вчений у галузі фізики та теорії інформації професор Сорбонни (Франція), Гарварда і Колумбійського університету (США) Л. Брюллен у своїх працях «Наука и теория информации» (1962), «Научная неопределенность и информация» (2010) звертав увагу на наступне. Досягнуті успіхи науки в таких галузях, як термодинаміка, класична і квантова механіка, статистика та інформація отримано завдяки існуючій на той час інформаційній невизначеності під час дослідження відповідних явищ і об'єктів. Також зазначено, що наведені приклади досягнень отримано з певними показниками точності. Цікавий висновок зробив Л. Брюллен щодо методології наукових досліджень, а відповідно, і методології досліджень метрології як емпіричної науки: «...всі ці проблеми, як і сама наука, ніколи не будуть завершені. Повне завершення означало би смерть для будь-якого дослідження».

Термінологія невизначеності почала з'являтися у наукових публікаціях у першій половині ХХ ст. і стосувалась лише проблематики вимірювання. Відомий принцип невизначеності квантової механіки (принцип німецького фізика-ядерника Гейзенберга, 1927 р.) визначає межі характеристик точності (середньоквадратичних значень) одночасного вимірювання просторової координати квантової частинки  $x$  з імпульсною енергією  $e$  у вигляді

$$\sigma_x \cdot \sigma_e \geq h/2,$$

де  $h = 6,626070040(81) \cdot 10^{-34}$  Дж·с — зведена стала Планка;  $\sigma_x$  і  $\sigma_e$  — середньоквадратичні відхилення даних вимірювань.

Подальші дослідження підтвердили факт використання принципу невизначеності вимірювань не лише у квантовій механіці (мікросвіті), а й у класичній механіці, електродинаміці (макросвіті). Це одночасні вимірювання струму і напруги, характе-



ристик електричного і магнітного полів, часових і частотних характеристик радіолокаційного сигналу. У той самий час наведений вище принцип невизначеності стосується одночасно двох вимірюваних величин, зв'язаних між собою функціонально, але на кожну з них окремо не накладає жодних обмежень щодо точності вимірювання.

Як показала теорія і практика вимірювання фізичних величин, невизначеність існує і проявляється під час кожного вимірювального експерименту.

Враховуючи широке тлумачення поняття невизначеності і з метою конкретнішого його використання пропонуємо наступну класифікацію:

- невизначеність у широкому сенсі як якісна характеристика;
- невизначеність у вузькому сенсі як кількісна характеристика, в основному, у разі оцінювання кількісного результату вимірювання.

1993 рік став роком революційної зміни в обґрунтуванні використання поняття невизначеності під час оцінювання результатів вимірювання. Робоча група Міжнародної метрологічної спільноти, в тому числі Міжнародне бюро мір і ваг (МБМВ або ВІМР), Міжнародна електрична комісія (МЕК або ІЕС), Міжнародна організація із стандартизації (МОС або ІСО) та ін., опублікували Керівництво із визначення невизначеності вимірювань (uncertainty of measurement) — GUM [124].

У цій публікації офіційно на міжнародному рівні введено поняття *невизначеності результату вимірювання*. Наприклад, згідно з нормативним документом ISO 14064-1-2007 означення невизначеності наведено у такій редакції.

*Невизначеність (uncertainty)* — це оцінка, яка приписана результату вимірювання і яка характеризує діапазон його значень, в якому, як можна вважати, лежить його істинне значення.

У загальному випадку невизначеність вимірювання включає багато складових. Деякі з них можуть бути оцінені із статистичного розподілу послідовності даних вимірювання і характеризуватися стандартним відхиленням (середнім квадратичним відхиленням, СКВ). Оцінки інших складових можуть ґрунтуватися лише на попередньому досвіді або іншій інформації.

На сьогодні міжнародна метрологія, включаючи Україну, в оцінюванні якості результатів вимірювання перейшла від класичної концепції (Classical Approach, CA) до нової концепції, що ґрунтується на невизначеності вимірювання (Uncertainty Approach, UA).

Згідно з новою концепцією UA (концепцією невизначеності) замість фундаментального поняття *похибка вимірювання*, яке застосовує відоме або гіпотетичне істинне значення фізичної величини, використовується *невизначеність вимірювання*, якій відповідає діапазон (інтервал) значень місця знаходження істинного значення величини.

Таким чином, основний показник якості вимірювання — це невизначеність результату вимірювання. Зменшення невизначеності є ознакою підвищення ефективності, тобто підвищення точності вимірювання. Тим самим невизначеність може бути вибрана як критерій для оцінювання якості різних вимірювальних операцій, у першу чергу функціонування засобів і систем вимірювання.

Сформулюємо практичні рекомендації з використання концепції невизначеності.

Так, якщо адаптувати невизначеність до даних вимірювань фізичної величини, математична модель якої описується випадковою величиною з невідомими математичним сподіванням і дисперсією (середнім квадратичним відхиленням) — функцією невизначеності вимірювання, то невизначеність істинного значення досліджуваної величини можна оцінити із заданою ймовірністю довірчим інтервалом з відповідними статистичними оцінками математичного сподівання і дисперсії, або іншими методами, які по суті формують таку саму інформацію.

Для одновимірної випадку результат вимірювання записують у вигляді

$$y = \bar{x} \pm \Delta x [x], \quad (1.7)$$

де  $y$  — результат вимірювання;  $\bar{x}$  — опорне значення результату вимірювання (у більшості випадків це середнє арифметичне при багаторазових вимірюваннях або оцінка математичного сподівання випадкової величини);  $\Delta x$  — розширена невизначеність результату вимірювання;  $[x]$  — одиниця вимірювання.

Ураховуючи різномірність і різноплановість задач вимірювання, значення невизначеності вимірювання визначається залежно від постановки конкретної задачі по-різному, а саме:

- стандартна невизначеність вимірювання типу А;
- стандартна невизначеність вимірювання типу В;
- сумарна стандартна невизначеність вимірювання;
- розширена невизначеність вимірювання.

Відомо, що результат вимірювання фізичної величини  $Y$  відображається іменованим числом  $y$ . Наприклад,  $y = (10,2 \pm 0,1)$  м — це запис результату вимірювання довжини в одиницях системи СІ.

Відповідно до концепції невизначеності узагальнене рівняння вимірювання має вигляд

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m). \quad (1.8)$$

У цьому рівнянні  $Y$  — результат вимірювання, який представлений багатовимірною функцією  $f(\{X_j, j = \overline{1, m}\})$ , множина значень якої однозначно визначається числовими значеннями, отриманими за даними вимірювання множини аргументів  $\{X_j, j = \overline{1, m}\}$ .

Для кожного конкретного випадку процесу вимірювання рівняння вимірювання вигляду (1.8) набуває відповідної функціональної залежності, для розв'язання якої використовується той чи інший метод вимірювання з подальшою його реалізацією апаратно-програмними засобами (системами).

**Методи аналізу і синтезу в задачах вимірювання.** Розглянемо методи аналізу і синтезу теорії сигналів і систем, адаптовані до задач вимірювання. Для опису використання таких методів розглянемо одновимірний варіант задачі вимірювання.

**Постановка задачі вимірювання.** На вхід засобу вимірювання надходить сигнал, який описується функцією невизначеності у вигляді адитивної суміші детермінованої функції часу  $s(t)$  і завади — стаціонарного гауссового випадкового процесу  $\xi(\omega, t)$  з нульовим математичним сподіванням за фіксованого значення  $t$ , тобто

$$\eta(\omega, t) = s(t) + \xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T. \quad (1.9)$$

Засіб вимірювання, як апаратно-програмний засіб, описується оператором перетворення вхідного сигналу  $Z[\cdot]$ . На виході засобу необхідно отримати відгук — результат вимірювання у вигляді

$$y_t = \bar{s}_t + \Delta s, \quad (1.10)$$

де  $\bar{s}_t$  — опорне значення сигналу  $s(t)$  за фіксованого  $t$ ;  $\Delta s$  — відповідне значення його невизначеності.

Схематично таку постановку задачі вимірювання показано на рис. 1.17.

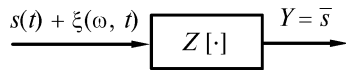


Рис. 1.17. Схематична ілюстрація задачі вимірювання з використанням засобу вимірювання

Розглянемо наступні методи аналізу і синтезу перетворень інформаційних сигналів засобами і системами вимірювання. Незважаючи на той факт, що методи аналізу і синтезу ідейно різні, завдяки їхньому взаємозв'язку при використанні для розв'язання задач вимірювання вони доповнюють один одного.

**Метод синтезу.** На цьому методі базується розв'язання відомих задач оптимізації визначення оператора перетворення засобу вимірювання  $Z[\cdot]$  згідно з заданим критерієм оптимальності. Єдиним критерієм оптимальності для задач вимірювання є мінімізація значення невизначеності вимірювання фізичних величин (тип А або В, сумарна стандартна або розширена).

Таким чином, на класі функцій невизначеності вимірювання фізичних величин оптимальний оператор перетворення  $Z[\cdot]$  засобу вимірювання мінімізує невизначеність результату вимірювання відповідно до використовуваного методу синтезу.

**Методи аналізу.** Застосування цього методу порівняно з методом синтезу має більшу номенклатуру задач.

**Пряма задача.** Задано вхідну дію — функцію невизначеності вимірювання фізичних величин  $s(t)$  і оператор перетворення  $Z[\cdot]$ . Необхідно знайти характеристики відгуку, тобто  $y(t) = Z[s(t)]$ ,  $t \in T$ .

**Обернена задача.** Задано відгук  $y(t)$  — результат і невизначеність вимірювання, оператор перетворення  $Z[\cdot]$  засобу вимірювання. Необхідно визначити характеристики і саму функцію невизначеності вимірювання  $x(t)$  фізичної величини або їх сукупності.

**Задача ідентифікації.** Таку задачу називають задачею чорного ящика. Необхідно визначити оператор перетворення  $Z[\cdot]$  засобу вимірювання за заданими функціями  $s(t)$  та  $y(t)$ .

Результати використання методів аналізу і синтезу наведено у багатьох публікаціях з теорії сигналів і систем, автоматичного керування, оптимальних систем та ін. У метрології і в першу чергу в теорії інформаційно-вимірювальних систем обернена задача і задача ідентифікації є типовими задачами вимірювання.

На рис. 1.18 показано схему оберненої задачі вимірювання. Для отримання необхідної інформації за результатами вимірю-

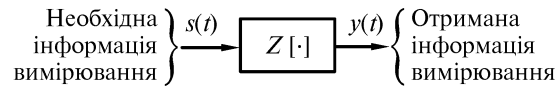


Рис. 1.18. Схема оберненої задачі вимірювання

вання потрібно розв'язати обернену задачу, а саме:

$$s(t) = Z^{-1}[y(t)],$$

де  $Z^{-1}[\cdot]$  — обернений оператор для заданого оператора перетворення  $Z[\cdot]$  засобу вимірювання.

У загальному випадку обернені задачі є актуальними не лише для вимірювань, а й для математичної фізики, термодинаміки, геофізики, геодезії, астрономії, медичної візуалізації, зокрема комп'ютерної томографії, дистанційного зондування Землі тощо. Обернені задачі у більшості практичних випадків є некоректно поставленими і мають значну складність щодо їх розв'язання. Методи і результати розв'язання обернених задач наведено у багатьох науково-технічних публікаціях. Наприклад, у працях «Методы решения некорректных задач» А.М. Тихонов, В.Я. Арсенин (1974), «Обратные задачи теплопроводимости» в 2-х томах (Ю.М. Мацевитий, 2002).

На практиці задачі ідентифікації засобу вимірювання завжди розв'язують з метою підтвердження їхніх метрологічних характеристик. Виконують серію натурних вимірювальних експериментів кожного засобу (системи) вимірювання і визначають реальні метрологічні характеристики його оператора перетворення  $Z[\cdot]$ . Зазначимо, що ідентифікація оператора перетворення  $Z[\cdot]$  для кожного засобу вимірювання є складною задачею і ця складність обумовлена наступним. Оператор перетворення  $Z[\cdot]$  реалізує рівняння вимірювання (1.8) та інтегрально описує послідовність виконання таких вимірювальних операцій:

- взаємодія об'єкта дослідження з первинним вимірювальним перетворювачем (сенсором, датчиком) і формування на його виході вимірювального сигналу як фізичного носія інформації вимірювання;
- формування даних вимірювань числових значень сформованого сигналу на основі порівняльної операції з одиницею (шкалою) досліджуваної фізичної величини;

- передача даних вимірювань по каналу передавання інформації і врахування дії завад;
- опрацювання даних вимірювань, отриманих під час дії завад, і визначення результату та невизначеності вимірювання.

Отже, оператор перетворення  $Z[\cdot]$  засобу (системи) вимірювання є складовим оператором, який формується послідовністю операторів модулів засобу вимірювання.

У попередньому п. 1.4 було розглянуто загальні умови розв'язання оберненої задачі вимірювання. Ідеалізований випадок ізоморфного перетворення інформаційного сигналу  $s(t)$  відповідним оператором  $Z[\cdot]$  засобу вимірювання на практиці не існує. Тому розв'язок такої задачі отримують на основі використання концепції поєднання фізичних та ймовірнісних мір.

## МОДЕЛІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОЛІВ

### 2.1. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИГНАЛІВ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Для виконання завдань вимірювання використовуються чотири варіанти формування первинної інформації при взаємодії різних об'єктів дослідження (ОД) з системою вимірювання [95]:

- а) ОД є джерелом (генератором) вимірювальної інформації;
- б) ОД є лінійним або нелінійним, інерційним або безінерційним, одновимірним або багатовимірним перетворювачем впливу (сигналу), що діє на ОД і який умовно називають тестовим, а сам ОД описується певним оператором перетворення  $Z[\cdot]$ ;
- в) ОД є джерелом, яке формує власну, відмінну від вхідної, реакцію (відгук), а вхідний сигнал впливу вважають стимулом або подразником;
- г) характер динаміки (зміни в часі) досліджуваних властивостей, станів і характеристик ОД задається системою вимірювання, вірніше, системою вимірювання та керування.

Варіанти такої взаємодії схематично показано на рис. 2.1.

Для першого варіанта (рис. 2.1, а) основною математичною моделлю сигналу є випадковий процес або комбінація детермінованих і випадкових процесів, характеристики яких відображають властивості ОД. У варіантах на рис. 2.1, б—г передбачено формування тестових сигналів, які задаються системою вимірювання, а їх модель обґрунтовується на підставі особливостей ОД, умов та завдань вимірювання. Ці моделі можуть бути детермінованими, випадковими або їх комбінаціями.

Вхідні сигнали зазнають впливу ОД, унаслідок чого їхні характеристики змінюються, а самі сигнали стають фізичними носіями інформації. Такі сигнали називають *вимірювальними* [2].

Можливості сучасної науки та техніки дають змогу реалізувати три напрями досліджень процесу вимірювання [95]:

- математичне моделювання на основі розроблення інформаційного забезпечення, використання засобів обчислювальної тех-

ніки і проведення обчислювального (комп'ютерного) вимірювального експерименту;

- фізичне моделювання на основі використання фізичних моделей ОД, як однорідних за фізичною природою, так і іншої фізичної природи, яке включає обґрунтований вибір засобів вимірювання і проведення імітаційного вимірювального експерименту;

- експериментальне або натурне дослідження реального ОД на основі використання засобів вимірювань і проведення натурального вимірювального експерименту.

Такі дослідження базуються на математичних моделях сигналів, аргументами яких у загальному випадку є змінні простору  $(x, y, z) = r \in G \subseteq R^3$  і часу  $t \in T \subseteq R$ .

Щоразу перед дослідником постає питання: яким чином вибрати досить просту модель, яка б в той же час достатньо повно відображала основні та суттєві властивості фізичного процесу? Процес створення і дослідження математичної моделі сигналу складається з наступних етапів [66].

На *першому* етапі виконується аналіз отриманих результатів досліджень основних фізичних законів, впливу різних факторів та інших відомостей під час формування сигналу у просторі і в часі. На цьому підґрунті з використанням математичних об'єктів, термінів і символів створюється нове відображення — математична модель сигналу, зазвичай в аналітичній формі.

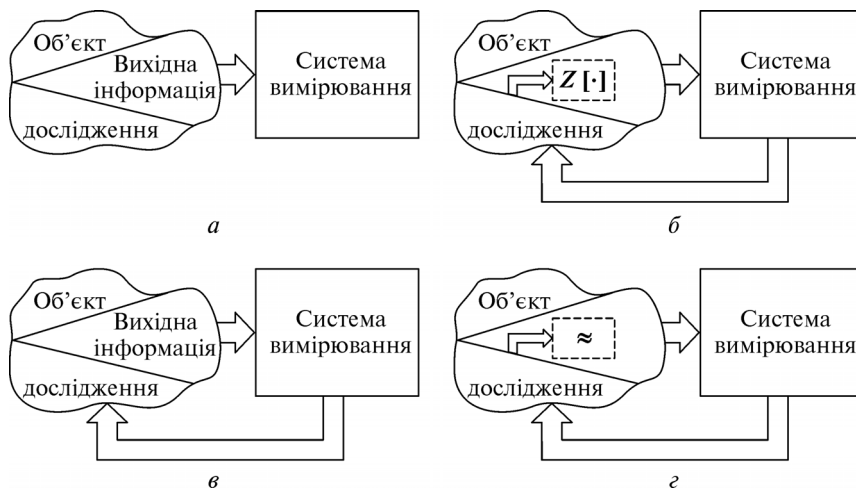


Рис. 2.1. Варіанти взаємодії ОД з системою вимірювання



На *другому* етапі вирішується широке коло теоретичних та прикладних завдань вимірювань, в яких використовується модель сигналу.

На *третьому* етапі оцінюється узгодженість результатів теоретичних та практичних досліджень сигналу на основі вибраних критеріїв. У деяких наукових працях для оцінювання результатів порівняльного аналізу використовують термін *адекватна модель*. Зауважимо, що в такому випадку мова йде не про порівняльний аналіз двох різних за фізичною природою об'єктів (математичного і матеріального), а про порівняння характеристик, параметрів, закономірностей тощо, які були одержані під час узгодженого дослідження моделі та фізичного явища.

*Четвертий* етап полягає у побудові вдосконаленішої або нової моделі у випадку, коли результати аналізу нових одержаних даних, фактів про ОД не відповідають запропонованій моделі. У деяких випадках, наприклад, для гармонічних сигналів, необхідність виконання такого етапу у повному обсязі може і не виникнути — коригуванню можуть піддаватися лише певні параметри чи характеристики моделі.

Дослідження моделей сигналів як математичних об'єктів у завданнях вимірювань здійснюється з використанням методів функціонального аналізу, теорії міри, теорії випадкових процесів та математичної статистики, теорії сигналів і систем, математичної фізики та теорії вимірювань [3, 6, 7, 66, 74, 95].

Для опису моделей сигналів використовуються функції однієї або кількох змінних, вектори та матриці. Моделі можуть задаватися графіками, таблицями та аналітичними виразами (у переважній більшості випадків). Функції можуть бути випадковими й не випадковими, набувати дійсних та комплексних значень.

*Одновимірний сигнал* описується функцією одного аргументу  $\{u(x), x \in X\}$ . Якщо аргументом функції  $u(x)$  є час, тобто  $u(t)$ , то компоненти послідовності одновимірних сигналів  $\{u_i(t), t \in T\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , є функціями часу. Прикладами таких сигналів є напруги на виході генераторів гармонічних та імпульсних сигналів, системи акустичних перетворювачів та ін.

Термін *багатовимірний сигнал* потребує певної конкретизації.

Упорядкований набір із  $n$  одновимірних сигналів  $\{u_i(x), i = \overline{1, n}\}$  створює так званий багатоканальний сигнал, який описується

вектором  $\mathbf{u}_n(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}, t \in T$ . Число  $n$  — розмірність вектора  $\mathbf{u}_n(t)$  визначається кількістю вихідних каналів досліджуваної системи.

*Сигнальне поле*, або поле сигналу, описується функцією кількох (не менше двох) змінних (аргументів)  $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . У випадку, коли одна із змінних розуміється як час, а три інших — як змінні простору, тобто  $u(\mathbf{r}; t) = u(x, y, z; t)$ , або  $u(x, y; t)$ , або  $u(x; t)$ , моделі сигнальних полів називаються *просторово-часовими*. Одну з реалізацій такого поля зображено на рис. 2.2.

Прикладом складних математичних моделей є *векторне сигнальне поле* у вигляді

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{r}; t) = \{u_1(\mathbf{r}, t), \dots, u_n(\mathbf{r}, t)\}, \mathbf{r} \in G, t \in T.$$

Сигнали можна поділити на *неперервні* та *дискретні*, але при цьому необхідно вказати характер їх області визначення і множини значень.

Термін *цифрові сигнали* використовується для опису дискретних сигналів як за часом, так і за значенням з подальшим їх кодуванням. Для цього обирають одну з відомих числових систем: двійкову, вісімкову, шістнадцяткову і т. д. У цифровій обробці сигналів пріоритет належить двійковій системі, тому в більшості випадків цифрові сигнали — це числові послідовності двійкових символів зі скінченним числом розрядів, наприклад 11001110011.

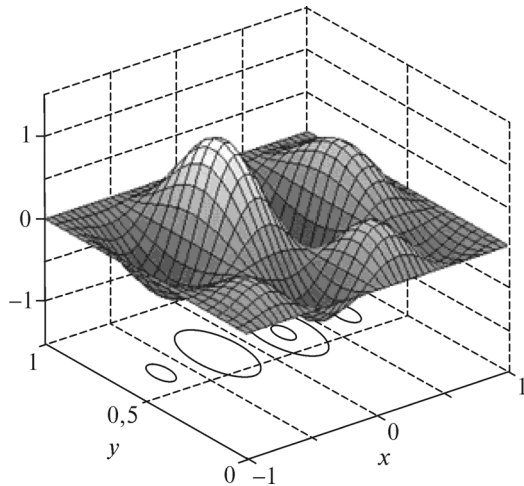


Рис. 2.2. Приклад реалізації сигнального поля

*Імпульсні* сигнали описуються *фінітними* функціями, тобто функціями, які набувають ненульових значень лише на скінченних інтервалах часу. Зазначимо, що існують й інші визначення імпульсних сигналів, наприклад послідовності сигналів, які на осі часу не перетинаються.

Під час описання багатовимірних сигналів число варіантів неперервності та дискретності збільшується. Наприклад, сигнальне поле може бути дискретним за часом, неперервним за просторовими аргументами та дискретним за значеннями.

Знання математичних моделей сигналів дає змогу виконувати їх порівняльний аналіз, визначати їх числові характеристики (параметри), оцінювати результати вимірювань, установлювати тотожність і розбіжності сигналів та класифікувати їх. Зазвичай назва вимірювального сигналу визначається видом його математичної моделі, наприклад, детерміновані сигнали описуються детермінованими функціями, випадкові — випадковими функціями.

**Проблема класифікації сигналів.** Вирішення цієї проблеми для моделей сигналів (далі просто сигналів) є актуальним і важливим для вимірювання. Значення, параметри і характеристики сигналів є предметами досліджень різноманітних і різнопланових завдань вимірювань, тому кількість видів або класів вимірювальних сигналів є значною. Наприклад, якщо сигнали класифікувати за видами функцій у функціональному аналізі, то їх кількість може сягати тисячі. Якщо класифікувати за законами розподілу випадкових сигналів, то їх кількість перевищить три сотні. У випадку класифікації сигналів з більш загальних позицій, а саме за умови обґрунтування просторів функцій, їх кількість перевищить кілька десятків. До таких просторів належать векторний, лінійний, метричний, нормований, вимірний з мірою, ймовірнісний, гільбертів тощо [2, 33, 54, 66].

Будь-яка класифікація є умовною і залежить від її мети і ознак, у подальшому наведено приклади типових сигналів, які знайшли широке використання під час вирішення завдань теорії і практики вимірювань.

**Неперервні і дискретні сигнали.** Залежно від характеру області визначення та множини значень сигналу  $\{s(t) \in R, t \in T\}$  виокремимо чотири види сигналів, ознаки яких наведено в табл. 2.1:

- *неперервні (аналогові)* — сигнали, які набувають довільного значення і визначені для будь-якого моменту часу  $t$ ;

Таблиця 2.1. Ознаки неперервних і дискретних сигналів

$t \in T$ , область визначення	$s(t)$ , множина значень	
	Неперервна	Дискретна
Неперервна	<i>Неперервні (аналогові)</i>	<i>Квантовані</i>
Дискретна	<i>Дискретні за часом</i>	<i>Цифрові</i>

• *дискретні за часом з інтервалом дискретизації  $\Delta t$*  — сигнали, довільні за величиною, але задані не на всій осі часу, а лише у визначені моменти часу  $t_i = (i-1)\Delta t$ , де  $i = 1, 2, \dots$ ;

• *квантовані з інтервалом квантування  $\Delta s$*  — сигнали, які є неперервними у часі функціями  $s(t)$ , що набувають лише дискретного значення  $s_j = (j-1)\Delta s$  при  $j = 1, 2, \dots$ ;

• *цифрові* — сигнали, дискретні за рівнем і за часом, а також кодовані, тобто кожному відліку ставиться у відповідність число зі скінченною кількістю розрядів.

**Комплекснозначні сигнали.** Усі розглянуті раніше моделі сигналів належать до класу дійсних. Математична модель комплексних сигналів у загальному вигляді задається формулою

$$\dot{z}(t) = x(t) + iy(t), \quad (2.1)$$

де  $x(t)$  і  $y(t)$  — дійсні сигнали;  $i = \sqrt{-1}$  — уявна одиниця.

Частковим випадком (2.1) є так званий комплексно-експоненціальний сигнал, який має вигляд

$$\dot{z}(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi_0)},$$

де  $A, \omega_0, \varphi_0$  — відповідно амплітуда, колова частота та початкова фаза сигналу.

Скориставшись формулою Ейлера, цей сигнал можна записати у вигляді

$$\dot{z}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + iA \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

**Періодичні сигнали.** *Періодичність* також може бути класифікаційною ознакою сигналів. За цією ознакою виділяють *періодичні* та *аперіодичні (поодинокі) сигнали*.

Загальна форма математичної моделі періодичного сигналу має вигляд

$$s(t) = s(t + nT_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.2)$$

де  $T_0$  — період сигналу. Приклади графіків реалізації періодичних сигналів показано на рис. 2.3.

Аперіодичний (імпульсний або поодинокий) сигнал  $s(t)$  є частковим випадком періодичного сигналу, коли період  $T_0$  прямує до нескінченності, тобто  $s(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} s(t + nT_0)$ .

**Гармонічні та модульовані сигнали.** Математична модель гармонічного сигналу описується виразом

$$u(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad t \in T, \quad (2.3)$$

де  $A_0$  — амплітуда;  $f_0$  — частота;  $2\pi f_0$  — колова частота;  $T_0 = 1/f_0$  — період. Значення  $2\pi f_0 t + \varphi_0$  для фіксованого  $t$  називають фазою сигналу, а значення фази за  $t = 0$ , тобто  $\varphi_0$  — початковою фазою.

Широке коло застосувань моделі гармонічного сигналу обумовлено такими фактами:

- значну кількість природних явищ, процесів, сигналів сформованих технічними системами, для яких характерна властивість циклічності, регулярності, ритмічності, тобто повторюваності у часі або в просторі, можна описати ідеалізованою математичною моделлю (2.3);

- використання сигналу (2.3) має глибокі історичні корені — це дослідження італійського фізика і астронома Галілео Галілея (1564—1642) коливальних рухів; розробка маятникових та пружинних годинників як механічних коливальних систем нідерландського фізика Христіана Гюйгенса (1629—1695), праці англійського фізика Роберта Гука (1635—1703) з теорії коливань і результати досліджень французького математика Жана Батиста Жозефа Фур'є (1768—1830) — засновника гармонічного аналізу в математиці і фізиці;

- ціла галузь народного господарства розвинутих країн світу — приладобудування у середині і другій половині ХХ ст. ви-

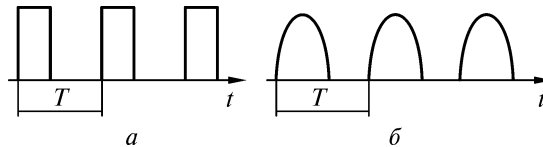


Рис. 2.3. Графіки реалізації періодичних сигналів: *a* — прямокутних; *б* — зрізаних косинусних

робляло значну кількість вимірювальних приладів і систем вимірювання параметрів сигналу (2.3), в тому числі вольтметри, амперметри, частотоміри і фазометри;

- модель (2.3) є складовим компонентом інших складніших інформаційних сигналів.

За умови зміни параметрів гармонічного сигналу, а саме, амплітуди, частоти або фази, формуються модульовані сигнали з гармонічним сигналом-носієм. Такими модульованими сигналами є амплітудно-модульовані, частотно-модульовані і фазо-модульовані сигнали. Останні два види модуляції гармонічного сигналу у загальному випадку розглядають як сигнали з кутовою модуляцією. Графіки реалізацій амплітудно-модульованого сигналу з різними коефіцієнтами модуляції  $k_A$  наведено на рис. 2.4.

Детальніше результати дослідження модульованих сигналів з гармонічним сигналом-носієм розглянуто в [4, 50, 54, 80].

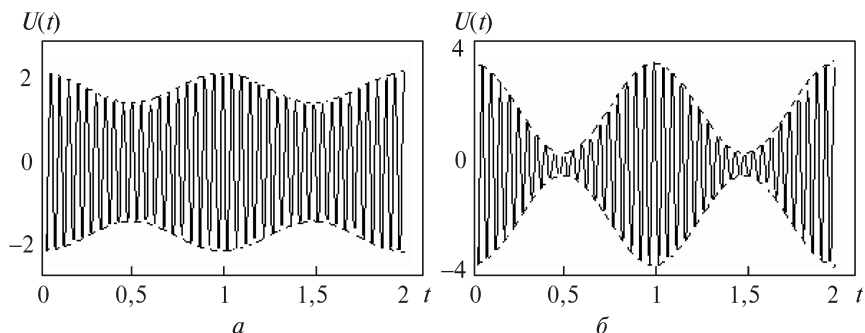
**Імпульсні та модульовані імпульсні сигнали.** Для зображення імпульсних сигналів використовується одинична функція Хевісайда у вигляді

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Періодична послідовність прямокутних імпульсів з використанням (2.4) описується виразом

$$u(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau_0 + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)], \quad (2.5)$$

де  $T_0$  — період слідування;  $\tau_0$  — тривалість;  $A_0 > 0$  — амплітуда імпульсів є параметрами послідовності прямокутних імпульсів.



**Рис. 2.4.** Графіки реалізації амплітудно-модульованих сигналів з різними значеннями  $k_A$ :  $a - k_A = 0,2$ ;  $b - k_A = 0,8$

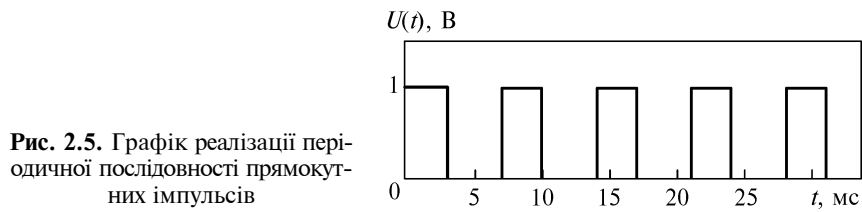


Рис. 2.5. Графік реалізації періодичної послідовності прямокутних імпульсів

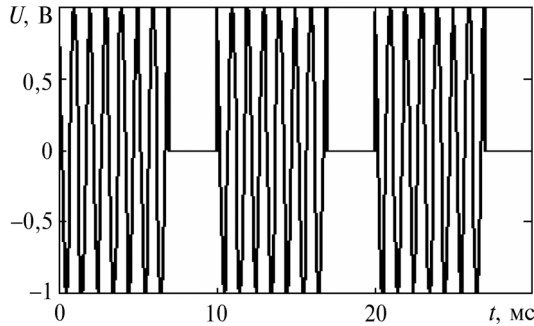


Рис. 2.6. Графік реалізації послідовності радіоімпульсів

Графік реалізації періодичної послідовності імпульсів для конкретно заданих  $n$ ,  $T_0$ ,  $\tau_0$  і  $A_0$  наведено на рис. 2.5.

За умови зміни у часі параметрів періодичної послідовності прямокутних імпульсів, а саме: амплітуди, тривалості і періоду слідування, формуються модульовані імпульсні сигнали за аналогією з модульованими сигналами з гармонічним сигналом-носієм.

Розглянемо деякі види модульованих імпульсних сигналів.

*Амплітудно-модульований імпульсний сигнал або сигнал з амплітудно-імпульсною модуляцією (АІМ) з використанням (2.5) описується виразом*

$$U_{\text{АІМ}}(t) = \sum_{k=0}^n A(t) [\Phi(\tau_0 + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)], \quad (2.6)$$

де відповідно функція  $A(t)$  є результатом модуляції інформаційним сигналом параметра  $A_0$  послідовності імпульсів.

Під час вимірювань також використовується послідовність радіоімпульсів (РІ), яка описується виразом

$$U_{\text{РІ}}(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau_0 + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)] \cos 2\pi ft, \quad t \in T. \quad (2.7)$$

На рис. 2.6 наведено графік реалізації послідовності радіоімпульсів у вигляді (2.7) за відповідних параметрів цієї моделі.

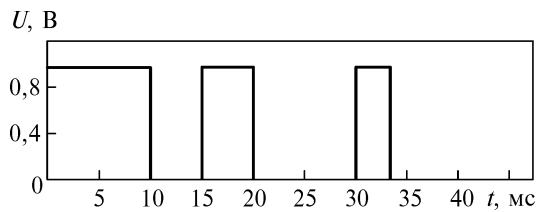


Рис. 2.7. Графік реалізації ШІМ сигналу

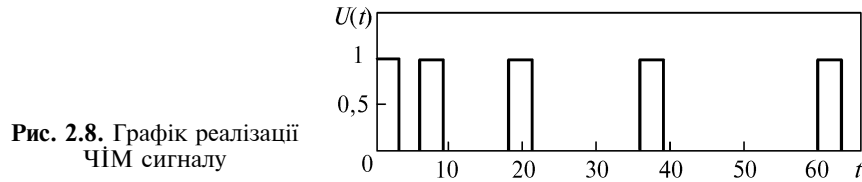


Рис. 2.8. Графік реалізації ЧІМ сигналу

*Широтно-імпульсна модуляція* (ШІМ) сигналу (2.5) або сигналу з ШІМ описується виразом

$$U_{\text{ШІМ}}(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau(t) + kT_0 - t) - \Phi(kT_0 - t)], \quad (2.8)$$

де функція  $\tau(t)$  є результатом модуляції інформаційним сигналом параметра  $\tau_0$  послідовності імпульсів.

Як приклад функції  $\tau(t)$  розглянемо таку:

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{\tau_0}{k+1}, & kT_0 \leq t < (k+1)T_0, \quad k = \overline{0, n}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Графік реалізації такого ШІМ сигналу за певних параметрів моделі (2.8) наведено на рис. 2.7.

*Частотно-імпульсна модуляція* (ЧІМ) сигналу у вигляді (2.5) або ЧІМ-сигналу описується виразом

$$U_{\text{ЧІМ}}(t) = \sum_{k=0}^n A_0 [\Phi(\tau_0 + kT(t) - t) - \Phi(kT(t) - t)], \quad \tau_0 < \frac{T_0}{2}, \quad (2.9)$$

де функція  $T(t)$  є результатом модуляції інформаційним сигналом параметра  $T_0$  моделі (2.5).

Як приклад функції  $T(t)$  розглянемо таку функцію:



$$T(t) = \begin{cases} \frac{(k+1)T_0}{2}, & kT_0 \leq t < (k+1)T_0, \quad k = \overline{0, n}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Графік реалізації такого ЧІМ сигналу за певних числових значень параметрів моделі наведено на рис. 2.8.

Результати дослідження імпульсних і модульованих імпульсних сигналів наведено, наприклад, у [4, 23, 80].

## 2.2. СИГНАЛИ ТА ОРТОГОНАЛЬНІ БАЗИСИ

Розглянемо відомі факти з теорії ортогональних сигналів і ортогональних базисів та проаналізуємо можливості їх використання для вимірювань.

Відомо [33], що два сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  називаються *ортогональними*, якщо їхній скалярний добуток, отже, і взаємна енергія дорівнюють нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt = 0.$$

Зображення гільбертового сигналу  $u(t)$  у вигляді [33]

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t), \quad t \in T \quad (2.10)$$

називають *розкладом сигналу  $u(t)$  за вибраним ортогональним базисом  $\{\varphi_k(t)\}$* .

Ряд у вигляді (2.10) також називають *ортогональним рядом сигналу  $\{u(t)\}$* , де послідовність дійсних чисел  $\{c_k\}$  є коефіцієнтами розкладу за вибраним базисом на часовому інтервалі ортогональності  $T$ .

Однією з основних ідей використання ряду (2.10) є застосування відомих систем функцій. Такими функціями є класичні ортогональні поліноми Лежандра, Чебишева, Лагерра, Уолша з неперервним часом, тригонометрична система функцій та інші [6, 33, 50, 60, 66, 105]. Ортогональні базиси з дискретним аргументом — це поліноми Чебишева, Кравчука, Шарльє, Лагерра, функції Уолша з дискретним аргументом, які знайшли широке використання у цифровому опрацюванні даних вимірювань із застосуванням засобів обчислювальної техніки [2, 30, 36, 49, 50, 57, 61, 83, 89, 95, 105].

Використання ортогональних сигналів і базисів дає можливість ефективно розв'язувати широке коло задач вимірювання характеристик і параметрів сигналів і має наступні переваги.

- Принципово зменшується об'єм і число операцій з визначення послідовності дійсних чисел  $\{c_k\}$ , тому що немає потреби вимірювати характеристики сигналу як функції часу.

- Використання відомого ортогонального базису  $\{\varphi_k(t)\}$  дає можливість визначати збіжність ряду (2.10) із заданими показниками точності.

- Використання зображення (2.10) є по суті алгоритмом імітаційного (математичного і комп'ютерного) моделювання реалізації різних видів сигналів, включаючи тестові із заданими показниками точності.

- Обґрунтування використання того чи іншого ортогонального базису в задачах дослідження вимірювальних сигналів базується на результатах вимірювання їхніх характеристик.

Відомо, що ряд (2.10) називається *узагальненим рядом Фур'є*, при цьому коефіцієнти такого ряду визначаються за виразом

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi_k(t)dt = (s, \varphi_k), \quad (2.11)$$

як скалярний добуток сигналу  $s(t)$  з однією з функцій ортогонального базису  $\{\varphi_k(t)\}$ .

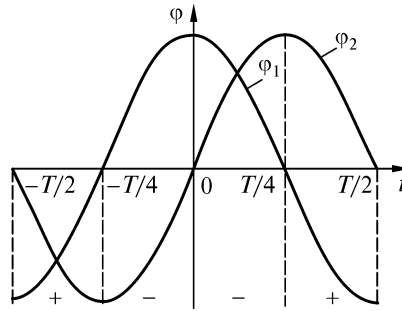
За умови вибору конкретного ортогонального базису ряд (2.10) називають так: для ортогонального базису Чебишева — ряд Фур'є—Чебишева; для ортогонального базису Ерміта — ряд Фур'є—Ерміта.

Розглянемо два характерних приклади ортогональних базисів, які знайшли широке застосування в теорії і практиці вимірювань для дослідження параметрів і характеристик інформаційних сигналів.

**Приклад 1.** Система тригонометричних функцій із кратними частотами, яка доповнена сталим у часі виразом  $\varphi_0$  і має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1 / \sqrt{T} ; \\ \varphi_1(t) &= \sqrt{2 / T} \sin 2\pi t / T ; \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{2 / T} \cos 2\pi t / T ; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{2k-1}(t) &= \sqrt{2 / T} \sin 2\pi kt / T ; \\ \varphi_{2k}(t) &= \sqrt{2 / T} \cos 2\pi kt / T, \dots \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

Рис. 2.9. Графіки тригонометричних функцій  $\varphi_1(t)$  і  $\varphi_2(t)$



утворює ортонормований базис на часовому інтервалі  $[-T/2, T/2]$ .

Графіки функцій  $\varphi_1(t)$  і  $\varphi_2(t)$  наведено на рис. 2.9. Можна показати, що скалярний добуток будь-яких двох функцій такої системи дорівнює нулю, а енергія і відповідно норма кожної з них — одиниці.

**Приклад 2.** Згідно з теоремою відліків [23] для гільбертових сигналів з обмеженим спектром використовується ортогональний базис, який є єдиним і унікальним у класі ортогональних базисів.

Розглянемо особливості такого ортогонального базису. Виділимо клас сигналів, спектри яких відмінні від нуля лише в межах скінченного інтервалу частот. Приклад таких сигналів — радіоімпульс із лінійною частотною модуляцією.

Нехай  $D$  — скінченний частотний інтервал, в якому спектр  $s(f)$  деякого сигналу  $u(t)$  не дорівнює нулю, тобто  $s(f) \neq 0$ , якщо  $f \in D$ , і  $s(f) = 0$ , якщо  $f \notin D$ . У загальному вигляді модель сигналу з обмеженим спектром визначається за формулою оберненого перетворення Фур'є:  $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_D s(f) e^{i2\pi ft} df$ . Графік такого

сигналу  $u(t)$  і його спектра  $s(f)$  наведено на рис. 2.10, а, б.

Залежно від вибору інтервалу  $D$  і функції  $s(f)$  можна отримати різноманітні сигнали з обмеженим спектром. Розглянемо коливання, спектральна щільність якого є сталою і набуває дійсних значень у межах частотного інтервалу, обмеженого деякою верхньою частотою  $F$ , і відповідно  $\Omega = 2\pi F$ . Поза цим інтервалом спектральна щільність перетворюється на нуль. Такий сигнал  $u(t)$  можна виразити у вигляді ортогонального ряду [2, 23, 54]:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(\frac{k}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)}{2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)} = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)}{\Omega(t - k\Delta t)}, t \in T. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

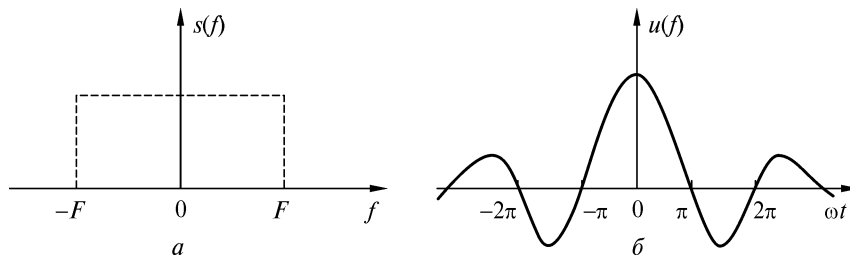


Рис. 2.10. Ідеальний низькочастотний сигнал: *a* — графік спектра  $s(f)$ , *б* — графік сигналу  $u(t)$

Цей ряд побудовано з використанням системи ортогональних функцій:

$$\left\{ \frac{\sin kt}{kt}, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \right\},$$

для якої виконується

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)}{\Omega(t - k\Delta t)} \cdot \frac{\sin \Omega(t - m\Delta t)}{\Omega(t - m\Delta t)} dt = \begin{cases} \Delta t, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Збіжність ряду (2.12) визначена в середньоквадратичному, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( u(t) - \sum_{k=-n}^n u(k\Delta t) \frac{\sin \Omega(t - k\Delta t)}{\Omega(t - k\Delta t)} \right)^2 \right\} = 0. \quad (2.13)$$

Ряд (2.12) є основою відомої теореми відліків, зміст якої полягає в передачі по системах зв'язку не сигналу  $u(t)$  у вигляді коефіцієнтів  $\{c_k\}$ , визначених згідно з (2.11), а безпосередньо відліків самого сигналу  $u(t)$ , взятих на дискретній множині часового інтервалу  $-k\Delta t, -(k-1)\Delta t, \dots, -\Delta t, 0, \Delta t, \dots, k\Delta t$ .

Саме властивість використання відліків сигналу  $u(t)$  на рівномірній часовій ґратці з інтервалом  $\Delta t = 1/2F_B$  і обумовлює ортогональність базису (2.12).

Використання виразу (2.13) відіграє важливу роль для завдань вимірювань, а саме для оцінювання значень показників точності апроксимації досліджуваного сигналу  $u(t)$  ортогональним рядом (2.12).

Цікаво, що ряд (2.12) у вітчизняних та закордонних публікаціях називають по-різному. З метою узгодження можна запропо-

нувати інтернаціональну назву ряду (2.12) на основі історії його обґрунтування і використання. Пропонуємо називати ряд (2.12) рядом Уїттекера—Котельникова—Шеннона. Відомо, що математик Уїттекер (США, 1915 р.) уперше довів теорему відліків для функції з обмеженим спектром, учений у галузі радіотехніки Котельников (СРСР, 1933 р.) запропонував передавати по лініях зв'язку лише відліки часового сигналу  $u(t)$  згідно з (2.12), а вчений у галузі теорії інформації Шеннон (США, 1946 р.) використав ряд (2.12) для вирішення проблем передавання інформації по різних каналах. Також звернемо увагу, що в деяких публікаціях, наприклад у [23], зазначено, що вперше теорема відліків була доведена математиком О. Коші (Франція, 1789—1857).

### 2.3. МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Розглянемо моделі сигналів, які описуються випадковими процесами. Під час дослідження випадкового процесу, який розглядається як послідовність випадкових величин, визначення і характеристики випадкової величини є фундаментальними.

*Випадковий процес*  $\{\xi(\omega, t), t \in T\}$  є функцією двох змінних, де  $t$  інтерпретується як час. Для кожного фіксованого  $t = t_0$  маємо випадкову величину  $\xi(\omega, t_0)$ . Випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  можна задати трьома рівнозначними способами: як упорядковану відносно змінного часу  $t$  множину випадкових величин; як множину числових функцій часу — реалізацій процесу, кожна з яких розглядається як одна елементарна подія з відповідним фіксованим  $\omega \in \Omega$ , і як вимірну функцію на добутку просторів  $\Omega \times T$ .

Залежно від множини параметра  $t \in T$  випадковий процес має певні особливості і відповідні назви:

- якщо  $t \in T$  заданий дискретно й утворює числову послідовність  $\{t_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$  зі скінченним або зліченим числом її елементів, то випадковий процес  $\{\xi(\omega, t_j), j = 0, 1, 2, \dots\}$  називається *часовим рядом* або *випадковою послідовністю*;

- якщо  $t$  — неперервний параметр, тобто  $T$  має потужність континууму, то процес  $\xi(\omega, t) = \xi(t) \in$  *випадковим з неперервним часом*.

У більшості випадків можна виокремити три види впливу випадкових факторів на формування і динаміку зміни в часі реального сигналу:

- ♦ динаміка сигналу підпорядковується точним закономірностям, однозначно визначеним за початковими умовами, які є випадко-

вими, тобто ці умови не зберігаються під час повторної реалізації сигналу. Такий випадок притаманний гармонічному сигналу з початковою випадковою фазою, реалізація якої формується тільки в початковий момент часу спостереження, тобто за  $t = 0$ ;

- ◆ динаміка сигналу на всьому заданому інтервалі часу  $T$  є випадковою. Наприклад, напруга теплового шуму на виході підсилувача, вихідна напруга генератора шуму;

- ◆ динаміка сигналу обумовлена основною невідповідною закономірністю, яка спотворюється випадковим збуренням, діючим протягом усього часу спостереження сигналу. Наприклад, приймання радіолокаційного сигналу на фоні завад, знаходження корисного сигналу на фоні ревербераційної завади.

*Випадковий процес* — це складний математичний об'єкт з різноманітними властивостями й характеристиками. Умовну класифікацію випадкових процесів можна виконати, базуючись, наприклад, на таких ознаках:

- видах законів розподілу ймовірностей: гауссовий або пуассонівський процеси;

- властивостях процесів: процеси з незалежними приростами, незалежними значеннями, неперервні або дискретні, цифрові;

- властивостях характеристик процесів: стаціонарні, процеси з дробово-раціональними спектральними щільностями, періодично корельовані;

- видах зображень (інтегральних, диференціальних) процесів: лінійні, гармонічні та авторегресії.

Для вирішення практичних завдань аналізу випадкових сигналів найчастіше використовуються стаціонарні та ергодичні процеси.

*Стаціонарні випадкові процеси* використовуються як моделі стохастичних сигналів, статистичні характеристики яких мають певну стабільність у часі. Серед них виділяють процеси в широкому й вузькому сенсі [3, 23, 58, 85].

Випадковий процес  $\{\xi(\omega, t), t \in R\}$ , для якого

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t)\} = a(t) \equiv a$$

і автокореляційна функція

$$\mathbf{M}\{[\xi(\omega, t_1) - a][\xi(\omega, t_2) - a]\} = R(t_1, t_2) = R(t, t + \tau) \equiv R(t_2 - t_1) = R(\tau),$$

називається *стаціонарним у широкому сенсі*.

Випадковий процес  $\{\xi(\omega, t), t \in R\}$ , для якого послідовність скінченновимірних функцій розподілу задовольняє умову

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau), j = \overline{1, n},$$

називається *стаціонарним у вузькому сенсі*.

З використанням результатів дослідження випадкових процесів (див., наприклад, [3, 5, 23, 30, 49, 50, 54, 58—62, 85, 87, 97, 113]) запропоновано метод побудови зображення випадкових процесів, який дає можливість створювати часові та спектральні зображення стаціонарних і нестаціонарних, гауссових і негауссових випадкових процесів. Ідея зображення довільної випадкової функції через систему інших випадкових функцій з добре вивченими і порівняно простими в ймовірнісному сенсі властивостями широко використовується в теорії випадкових процесів.

На базі застосування відомих методів канонічного розкладу, формуючих фільтрів, оновлюючого і породжуючого процесів, стохастичних інтегральних зображень у запропонованому методі використовується зображення випадкового процесу у вигляді стохастичного інтегралу:

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) d\eta(\omega, x), \quad t \in T, \quad (2.14)$$

де не випадкова функція  $\varphi(x, t)$  і випадкова функція  $\eta(\omega, x)$  задовольняють конкретні умови для конкретних процесів.

Часові зображення випадкового процесу  $\xi(\omega, t)$  можна будувати на підставі того, що функція  $\varphi(x, t) = \varphi(\tau, t)$  має фізичну інтерпретацію як імпульсна перехідна функція деякої лінійної системи, у загальному випадку зі змінними у часі параметрами. Відомі й інші фізичні інтерпретації зображення (2.14). Наприклад, вираз (2.14) має інтерпретацію як суперпозиція (накладання) імпульсів, які виникають у момент  $\tau$  і описуються за змінного часу  $t$  імпульсною формою  $\varphi(\tau, t)$ .

Якщо у виразі (2.14) замість  $\varphi(x, t)$  і  $\eta(\omega, x)$  використати функцію  $e^{i2\pi ft}$  і  $z(\omega, f)$ , де змінна  $f$  має фізичну інтерпретацію як частота, то отримуємо спектральне зображення випадкового процесу, для якого ядро інтегрального зображення, на відміну від часового, є одним і тим самим.

Розглянемо приклади конструктивних випадкових процесів, які використовуються для створення сучасних інформаційних технологій вимірювання характеристик і параметрів сигналів стохастичної фізичної природи.

**Приклад 1.** Лінійні випадкові процеси є моделями вимірювальних сигналів з стохастичною природою зміни їх значень у часі.

*Лінійний випадковий процес (ЛВП).* Лінійним називається випадковий процес, який описується стохастичним інтегралом (2.14) з відповідною конкретизацією, а саме [58]:

$$\xi(\omega, t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau, t) d\eta(\omega, \tau), \quad t \in T, \quad (2.15)$$

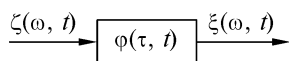
де  $\varphi(\tau, t)$  — невідповідна функція двох змінних, інтегрована з квадратом по  $\tau$  для кожного  $t \in T$ , а  $\{\eta(\omega, t), \eta(0) = 0, t \in [0, \infty]\}$  — випадковий процес, стохастично неперервний з незалежними або некорельованими приростами. У множині лінійних випадкових процесів за аналогією зі стаціонарними випадковими процесами виділяють лінійні у широкому і вузькому сенсі випадкові процеси.

Лінійні випадкові процеси у вигляді (2.15) утворюють:

- клас лінійних у вузькому сенсі процесів, коли  $\eta(\omega, \tau)$  — неоднорідний (однорідний) процес з незалежними приростами і безмежно подільними законами розподілу;
- клас лінійних у широкому сенсі процесів, коли  $\eta(\omega, \tau)$  — процес з некорельованими (ортогональними) приростами;
- клас лінійних стаціонарних у вузькому сенсі процесів, коли  $\varphi(\tau, t) \equiv \varphi(t - \tau)$  і  $\eta(\omega, \tau)$  — однорідний процес з незалежними приростами;
- клас лінійних стаціонарних у широкому сенсі процесів, коли  $\varphi(\tau, t) \equiv \varphi(t - \tau)$  і  $\eta(\omega, \tau)$  — процес з некорельованими (ортогональними) приростами.

*Лінійний випадковий процес* виду (2.15) має наступну фізичну інтерпретацію. На вхід лінійної системи (рис. 2.11) діє випадковий процес типу білого шуму  $\zeta(\omega, t)$ , як узагальнена похідна породжуючого випадкового процесу  $\eta(\omega, t)$ . Відгуком цієї системи є лінійний випадковий процес  $\xi(\omega, t)$ , для якого отримано  $n$ -вимірну послідовність характеристичних функцій [58].

Це дає змогу виконувати дослідження лінійних випадкових процесів у повному ймовірнісному обсязі, включаючи коре-



**Рис. 2.11.** Схематичне зображення формування лінійного випадкового процесу



ляційну або енергетичну теорію дослідження як частковий випадок.

Використання лінійних випадкових процесів у дослідженнях вимірювальних сигналів дає можливість:

- ◆ створення широкого кола моделей у часовому інтервалі сигналів у завданнях вимірювань, контролю, діагностики та прогнозу;
- ◆ залишити його в класі лінійних випадкових процесів через лінійні перетворення лінійних випадкових процесів;
- ◆ аналізувати нелінійні перетворення лінійних випадкових процесів у ланках і модулях систем і засобів вимірювань;
- ◆ обґрунтовувати алгоритмічно-програмне забезпечення опрацювання даних вимірювань як аналоговими, так і цифровими системами вимірювань;
- ◆ визначити всі числові характеристики лінійних випадкових процесів під час оцінювання характеристик вимірювальних сигналів;
- ◆ узагальнити відомі методи дослідження випадкових процесів, а саме методи канонічного розкладу формуючих фільтрів, оновлюючого та породжуючого процесів.

Отже, в класі лінійних процесів можна виділити лінійні у вузькому та широкому сенсі, стаціонарні, гауссові, періодичні і періодично корельовані процеси.

Випадковий процес  $\eta(\omega, t)$  завжди дійсний. Лінійний процес  $\xi(\omega, t)$  буде тоді комплекснозначним, коли таким буде його ядро інтегрального зображення (2.15), тобто функція

$$\varphi(\tau, t) = \operatorname{Re} \varphi(\tau, t) + i \operatorname{Im} \varphi(\tau, t).$$

Зазначимо, що теорія випадкових процесів із незалежними приростами більш досліджена порівняно з іншими класами випадкових процесів на основі використання фундаментальних результатів, які сприяли її розвитку. Це дослідження Л. Башел'є (L. Bachelier, 1900), Н. Вінера (N. Wiener, 1923) щодо броунівського руху, Б. де Фінетті (B. de Finetti, 1929) і А.Н. Колмогорова (1932) однорідних випадкових процесів з незалежними приростами, які мають скінченну дисперсію, і, нарешті, результати аналізу П. Леві (P. Levy, 1934) так званих «адитивних випадкових функцій».

Результати досліджень випадкових процесів з незалежними приростами тісно пов'язані з класичними результатами аналізу сум незалежних випадкових величин і, таким чином, з теорією безмежно подільних законів розподілу, в тому числі результатів

розв'язання центральної граничної теореми суми незалежних випадкових величин.

Для обґрунтування спектрального зображення випадкового процесу в основу покладено гармонізований випадковий процес [3, 23, 85]. Це дало змогу поширити методи гармонійного аналізу числових функцій на клас випадкових процесів, включаючи не-стаціонарні.

**Приклад 2.** *Гармонізованим* випадковим процесом називається гільбертів процес  $\{\xi(\omega, t), T \in t\}$ , який допускає зображення

$$\xi(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ift} dz(\omega, f), \quad \omega \in \Omega, t \in T, \quad (2.16)$$

де  $f$  і  $t$  — дійсні змінні, а  $z(\omega, f)$  — комплекснозначна випадкова функція, кореляційна функція якої

$$F(f_1, f_2) = \mathbf{M}\{z(\omega, f_1) z^*(\omega, f_2)\} \quad (2.17)$$

має обмежену варіацію на площині  $f_1 \times f_2$ , а  $z^*(\omega, f_2)$  — комплексноспряжена випадкова функція.

Кореляційна функція гармонізованого процесу визначається за виразом

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f_1 t_1 - f_2 t_2)} d_{f_1} d_{f_2} F(f_1, f_2), \quad t_1, t_2 \in T. \quad (2.18)$$

Гармонізовані випадкові процеси статистично еквівалентні лінійним процесам і в деяких випадках являють собою іншу форму запису лінійного випадкового процесу, яка розкриває його гармонійну структуру. Але не кожний лінійний процес є гармонізованим та не кожний гармонізований процес є лінійним, тобто ці два класи процесів перетинаються, але не збігаються.

У класі гармонізованих випадкових процесів можна виділити гауссові, стаціонарні в широкому сенсі і періодично корельовані процеси.

Сформулюємо твердження, що стосуються лінійних та гармонізованих випадкових процесів [3, 23, 58—60, 85]:

1. Для лінійного у вузькому сенсі випадкового процесу  $\{\xi(\omega, t)\}$  з породжуючим однорідним процесом із незалежними приростами  $\eta(\omega, t)$  одержано повний в імовірнісному сенсі опис на основі визначеної послідовності скінченновимірних характеристичних функцій.

2. Лінійний випадковий процес є стаціонарним у вузькому сенсі, якщо функція  $\varphi(\tau, t)$  залежить тільки від різниці аргументів  $t - \tau$ , а породжуючим випадковим процесом  $\eta(\omega, t)$  є однорідний процес з незалежними приростами.

3. Лінійний випадковий процес є стаціонарним у широкому сенсі, якщо  $\varphi(\tau, t) \equiv \varphi(t - \tau)$ , а породжуючий процес  $\eta(\omega, t)$  є процесом з некорельованими (ортогональними) приростами і задовольняє умову

$$\mathbf{M}\{\eta^2(\omega, \tau)\} = \sigma^2 d\tau, \quad (2.19)$$

де  $\sigma \geq 0$  — числова величина.

4. Гармонізований випадковий процес є стаціонарним у широкому сенсі, якщо породжуюча випадкова функція  $z(\omega, f)$  є функцією з некорельованими (ортогональними) приростами, для якої

$$\mathbf{M}\{z(\omega, f)\} = 0, F(f_1, f_2) = F(\min(f_1, f_2); f_1 f_2 \in [0, \infty]). \quad (2.20)$$

5. Лінійні та гармонізовані випадкові процеси є гауссовими, якщо породжуючий їх випадковий процес  $\eta(\omega, \tau)$  і випадкова функція  $z(\omega, f)$  є гауссовими.

6. Для гауссових випадкових процесів має місце: а) множини лінійних нестационарних (стаціонарних) у вузькому і широкому сенсах повністю збігаються; б) множина гармонізуємих нестационарних (стаціонарних) у широкому сенсі процесів є множиною відповідних процесів у вузькому сенсі.

**Приклад 3.** Одним із нестационарних випадкових процесів, який використовується в задачах вимірювання, є *періодично корельований випадковий процес* (ПКВП). Розглянемо його властивості і характеристики.

Гармонізований випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  називається *періодично корельованим з періодом  $T_0$* , якщо його кореляційна функція  $R(t_1, t_2)$  є неперервною і задовольняє умову

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 + T_0, t_2 + T_0), \quad (2.21)$$

де  $T_0 > 0$  — деяка фіксована числова величина.

Зазначимо, що знання періоду  $T_0$  є принциповим у дослідженні ПКВП. По суті знання  $T_0$  є ключем, який дає змогу розкрити структуру й властивості характеристик ПКВП.

Структуру і характеристики ПКВП розглянуто в [3, 23, 95]. Ми лише наведемо твердження стосовно використання ПКВП,

які мають вагомe значення для вимірювання характеристик циклічних або ритмічних стохастичних сигналів:

- ПКВП є одним з найбільш досліджених у класі нестационарних випадкових процесів, тому обґрунтування його використання має як теоретичну, так і практичну базу;

- практичне використання ПКВП у різних предметних галузях науки і техніки пов'язано з тим, що залежно від завдань вимірювань можна виділити інформаційно важливі стаціонарні компоненти, для опрацювання характеристик яких застосовується потужний алгоритмічно-програмний ресурс опрацювання даних вимірювань;

- однією з головних задач вимірювання, що виникають під час дослідження ПКВП, є оцінювання значення періоду  $T_0$  згідно з заданими значеннями його невизначеності.

Перейдемо до розгляду багатовимірних сигналів і полів.

## 2.4. МОДЕЛІ БАГАТОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОЛІВ

Розглянуті вище моделі вимірювальних сигналів є функціями часу, тобто функціями одного аргументу і називаються *одновимірними*. Функції двох аргументів називаються *двовимірними*, а в загальному випадку для числа аргументів  $n \geq 2$  — *багатовимірними*. Стисло розглянемо основні види моделей багатовимірних сигналів та полів, які є предметами вимірювання і широко використовуються у різних предметних галузях.

Клас моделей багатовимірних сигналів і полів доцільно поділити на *детерміновані* і *випадкові*. Такий розподіл дає можливість врахувати специфіку і характерні особливості вимірювань значень і характеристик досліджуваних сигналів [3, 6, 14, 60, 87, 111—113]:

- для детермінованих багатовимірних сигналів під час вимірювання достатньо зафіксувати одну з їх реалізацій у просторі і часі, на основі отриманих даних вимірювань визначається результат і функція невизначеності вимірювань з використанням фізичної міри досліджуваної величини. У подальшому моделі таких сигналів будемо називати *багатовимірними функціями*, а для конкретних випадків вказувати число аргументів. Наприклад, тривимірна функція є детермінованою функцією трьох аргументів;

- для випадкових багатовимірних сигналів, які є просторово-часовими полями, під час вимірювання необхідно зафіксувати низку їх реалізацій (ансамбль реалізацій), а для отримання відпо-

відних результатів і характеристик невизначеності необхідно разом з використанням фізичних мір досліджуваних величин використати ймовірнісну міру досліджуваної випадкової функції. У подальшому моделі випадкових сигналів будемо називати *просторово-часовими випадковими полями*.

*Моделі детермінованих багатовимірних сигналів.* Раніше зазначено, що у зв'язку зі зростанням складності задач вимірювання збільшується і розмірність моделей досліджуваних сигналів, у першу чергу за рахунок просторових координат  $x \in R, (x, y) = \rho \in R^2$  і  $(x, y, z) = \mathbf{r} \in R^3$ .

Прикладами моделей таких сигналів є багатовимірні функції:

$$\{u(x, t) \in R, x \in R, t \in T\} \text{ — двовимірна;}$$

$$\{u(\rho, t) \in R, \rho \in R^2, t \in T\} \text{ — тривимірна;}$$

$$\{u(\mathbf{r}, t) \in R, \mathbf{r} \in R^3, t \in T\} \text{ — чотиривимірна.}$$

Дослідження таких функцій породжує низку задач щодо вимірювання їх характеристик. Наприклад, середнє значення функції  $u(\mathbf{r}, t)$  за часом є функцією просторових координат і визначається за формулою

$$\bar{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\mathbf{r}, t) dt, t \in T.$$

Середнє значення функції  $u(\mathbf{r}, t)$  за просторовими координатами є функцією часу і визначається за формулою

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{G} \int_G u(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, (x, y, z) = \mathbf{r} \in G \subseteq R^3.$$

На основі використання квадратичних операторів перетворення таких сигналів досліджуються їх енергетичні характеристики. Для визначення характеристик і параметрів багатовимірних детермінованих сигналів, які за фізичною природою є просторово-часовими сигнальними полями, застосовують методи функціонального аналізу та математичної фізики. Моделі багатовимірних детермінованих сигналів у практиці вимірювань відносять до ідеалізованих моделей, які формуються фундаментальними законами конкретної предметної галузі, наприклад, теплофізики, гідродинаміки, теоретичної механіки та ін. Прикладами таких сигналів є

просторово-часові електромагнітні, віброакустичні, теплові, гідроакустичні та інші сигнали.

*Моделі просторово-часових випадкових полів.* Такі моделі сигналів досліджуються методами теорії випадкових процесів і полів. Методами математичної статистики на основі практичного використання засобів і систем вимірювання визначають статистичні оцінки їх характеристик. Розмірність, тобто число аргументів випадкової моделі сигналів, порівняно з детермінованою моделлю збільшується на одиницю. Так, модель детермінованого чотиривимірного сигналу описується функцією

$$\{u(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in R^3, t \in T\},$$

а модель випадкового такого самого сигнального поля описується просторо-часовим випадковим полем:

$$\{\xi(\omega, \mathbf{r}, t), \omega \in \Omega, \mathbf{r} \in R^3, t \in T\}.$$

На практиці у більшості випадків вимірювань оцінювання просторово-часових характеристик досліджуваних як детермінованих, так і випадкових сигналів використовуються моделі, загальний вигляд яких залежно від сукупності аргументів наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2. Моделі просторово-часових випадкових полів

Види функцій	Аргументи			
	$\omega \in \Omega$ $t \in T$	$\omega \in \Omega$ $x \in R$ $t \in T$	$\omega \in \Omega$ $(x, y) = \rho \in R^2$ $t \in T$	$\omega \in \Omega$ , $(x, y, z) = \mathbf{r} \in R^3$ $t \in T$
Детерміновані	Число $a \in R$ , одновимірна функція $u(t) \in R$	Двовимірна функція $u(x, t) \in R$	Тривимірна функція $u(\rho, t) \in R$	Чотиривимірна функція $u(\mathbf{r}, t) \in R$
Випадкові	Величина $\xi(\omega) \in R$ , процес $\xi(\omega, t) \in R$ , як двовимірна випадкова функція	Тривимірне просторово- часове поле $\xi(\omega, x, t) \in R$	Чотиривимір- не просторо- во-часове поле $\xi(\omega; \rho; t) \in R$	П'ятивимірне просторово- часове поле $\xi(\omega; \mathbf{r}; t) \in R$

У табл. 2.2 використано такі позначення:  $\omega$  — елементарна випадкова подія з простору подій  $\Omega$ ;  $T$  — часовий інтервал спостереження;  $R$  — множина дійсних чисел.

З метою використання наведених моделей у задачах вимірювання за умов обмежених зон простору  $G$  і скінченних інтервалів часу  $T$  застосовується наступна багатовимірна індикаторна функція:

$$I(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in G \text{ і } t \in T; \\ 0, & \mathbf{r} \notin G \text{ або } t \notin T. \end{cases}$$

Використання математичної моделі виду  $\xi(\omega, \mathbf{r}, t) \cdot I(\mathbf{r}, t)$  дає можливість виконувати дослідження з визначенням і просторово-часових характеристик сигналів за умови реалізації вимірювань в різних місцях простору на скінченних інтервалах часу. Це забезпечує також виконання подальшого порівняльного аналізу результатів вимірювань з метою перевірки адекватності запропонованих моделей, прогнозу динаміки зміни основних характеристик ОД у просторі й часі та ін.

У випадку дослідження просторово-часових сигналів на базі використання випадкових моделей засобами вимірювання визначають, як правило, статистичні оцінки характеристик сигнальних полів у рамках кореляційної (енергетичної) теорії. Тобто для випадкового поля  $\xi(\omega, \mathbf{r}, t)$  оцінюються:

- математичне сподівання поля

$$a(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}\{\xi(\omega, \mathbf{r}, t)\};$$

- дисперсія поля

$$\sigma^2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}\{\xi(\omega, \mathbf{r}, t)\} = \mathbf{M}\{[\xi(\omega, \mathbf{r}, t) - a(\mathbf{r}, t)]^2\};$$

- автокореляційна функція поля

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{M}\{[\xi(\omega, \mathbf{r}_1, t_1) - a(\mathbf{r}_1, t_1)] \times [\xi(\omega, \mathbf{r}_2, t_2) - a(\mathbf{r}_2, t_2)]\};$$

- структурна функція

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \mathbf{M}\{(\xi(\omega, \mathbf{r}_1, t_1) - \xi(\omega, \mathbf{r}_2, t_2))^2\},$$

де  $\mathbf{M}\{\dots\}$  і  $\mathbf{D}\{\dots\}$  — відповідно оператори визначення математичного сподівання і дисперсії випадкових функцій.

Визначені вище характеристики просторово-часових полів наведено в табл. 2.3 з урахуванням їх структури і видів. На підставі

Таблиця 2.3. Характеристики просторово-часових полів

Види випадкових полів	Моделі і числові характеристики				
	Модель	Математичне сподівання	Дисперсія	Автокореляційна функція	Структурна функція
Неоднорідне за просторовими аргументами і нестационарне в часі	$\xi(\omega; x; t)$	$a(x; t)$	$\sigma^2(x; t)$	$R(x_1, x; t_1, t_2)$	$B(x_1, x; t_1, t_2)$
	$\xi(\omega; \rho; t)$	$a(\rho; t)$	$\sigma^2(\rho; t)$	$R(\rho_1, \rho; t_1, t_2)$	$B(\rho_1, \rho; t_1, t_2)$
	$\xi(\omega; r; t)$	$a(r; t)$	$\sigma^2(r; t)$	$R(r_1, r; t_1, t_2)$	$B(\rho_1, r; t_1, t_2)$
Неоднорідне стаціонарне	$\xi(r; t)$	$a(r)$	$\sigma^2(r)$	$R(r_1, r_2; t_2 - t_1)$	$B(r_1, r_2; t_2 - t_1)$
Однорідне нестационарне	$\xi(r; t)$	$a(r)$	$\sigma^2(r)$	$R(r_1 - r_2; t_2, t_1)$	$B(r_1 - r_2; t_2, t_1)$
Однорідне і ізотропне, нестационарне	$\xi(r; t)$	$a(t)$	$\sigma^2(t)$	$R( r_2 - r_1 ; t_1, t_2)$	$B( r_2 - r_1 ; t_1, t_2)$
Однорідне і стаціонарне	$\xi(r; t)$	$a$	$\sigma^2$	$R(r_2 - r_1; t_2 - t_1)$	$B(r_2 - r_1; t_2 - t_1)$
Однорідне і ізотропне, стаціонарне	$\xi(r; t)$	$a$	$\sigma^2$	$R( r_2 - r_1 ; t_2 - t_1)$	$B( r_2 - r_1 ; t_2 - t_1)$

аналізу публікацій [54, 87] за результатами вимірювання характеристик багатовимірних детермінованих і просторово-часових випадкових полів можна зробити наступні висновки, які в стислій формі відображають специфіку і характерні особливості отримання результатів і характеристик невизначеності вимірювань у різних предметних галузях:

1. Використання сучасних інформаційних технологій вимірювання (табл. 2.4) дає змогу отримати результати вимірювання не лише одновимірних, а й багатовимірних сигналів і полів на базі створення та обґрунтування моделей таких сигналів.



## 2.4. Моделі багатовимірних сигналів та полів

Таблиця 2.4. Інформаційні технології вимірювання

Види технологій	Види моделей вимірювання сигналів
Інформаційна технологія вимірювань 1D (ІТВ—1D)	$\alpha, u(x, t), \xi(\omega), \xi(\omega, t); \xi(\omega; x; t)$
Інформаційна технологія вимірювань 2D (ІТВ—2D)	$u(\mathbf{p}, t), \xi(\omega; \mathbf{p}; t)$
Інформаційна технологія вимірювань 3D (ІТВ—3D)	$u(\mathbf{r}; t), \xi(\omega; \mathbf{r}; t)$

Необхідність отримання таких результатів вимірювання обумовлена швидкими темпами розвитку інформаційного суспільства, виникненням нових задач щодо вирішення науково-технічних проблем у різних предметних галузях.

2. Створення апаратного та інформаційного забезпечення використання задач вимірювання пов'язано із забезпеченням єдності фізичних і ймовірнісних мір оцінювання характеристик багатовимірних сигналів і полів відповідно до вимог концепції невідзначеності.

3. Кожний конкретний випадок отримання результатів вимірювання значень і характеристик багатовимірних сигналів і полів є самостійним науково-технічним дослідженням з використанням значного обсягу теоретичних, моделювальних та експериментальних досліджень.

Наведені матеріали з аналізу багатовимірних сигналів і полів висвітлюють лише методологічні аспекти проведення їх досліджень. У кожному конкретному випадку практичне отримання результатів вимірювань, характеристик багатовимірних сигналів і полів у просторі й часі потребує значних науково-технічних, фінансових і людських ресурсів.

## МОДЕЛІ ТА МІРИ У ВИМІРЮВАННЯХ ВИПАДКОВИХ КУТОВИХ ВЕЛИЧИН

Кутові вимірювання з давніх часів широко використовуються у різних галузях діяльності людини. Вони стали ефективним інструментом пізнання світу, осмислення перебігу часу, успіхів астрономії і т. п. Використання методу перетворення різних фізичних величин у кути дало можливість досліджувати нові для науки явища та ефекти. Зокрема, такий підхід використовувався під час дослідження атмосферних електричних зарядів (М.В. Ломоносов і Г.В. Ріхман); відкриття закону взаємодії точкових електричних зарядів (Ш. Кулон); визначення гравітаційної сталої Землі (Г.Г. Кевендіш) та ін. [49].

Фізичною мірою плоского кута є коло або його частина, поділені на рівні інтервали. Такі міри реалізуються у вигляді лімбів чи кутомірних шкал (транспортир, квадрант, секстант тощо). Для фазових вимірювань міра фазових зсувів сигналів реалізується у вигляді двофазних генераторів або складніших електронно-оптичних засобів. Менш поширеними в теорії і практиці кутових і фазових вимірювань є ймовірнісні моделі і міри. Розглядає саме цих питань присвячено даний розділ.

### 3.1. МОДЕЛІ ДЕТЕРМІНОВАНИХ І ВИПАДКОВИХ КУТІВ У ВИМІРЮВАННЯХ

**Моделі детермінованих кутів.** Основні поняття у вимірюваннях кутів (кутометрії) сформовані ще в евклідовій геометрії і добре відомі. У першу чергу це поняття *плоского кута* — геометричної фігури, утвореної двома різними променями, що виходять із однієї точки, яка називається вершиною кута [25], а також пов'язаними з ним поняттями: центральні і суміжні кути, розгорнуті та прями кути, суміжні, протилежні та прилеглі кути тощо.

Кути можна порівнювати. Два плоскі кути  $\alpha$  та  $\beta$  називаються рівними (або конгруентними), якщо вони можуть бути суміщені таким чином, що збігатимуться їх відповідні сторони і

вершини. У системі аксіом Гільберта [64], розробленій ним для евклідової геометрії, відношення конгруентності позначається наступним чином:  $\alpha \equiv \beta$ .

На площині від довільного променя в певному напрямку можна відкласти єдиний кут, рівний даному куту. Отже, кут можна розглядати і як модель, і як міру повороту променя від його початкового положення до заданого. Залежно від напрямку повороту вводиться поняття додатних і від'ємних кутів. Вважатимемо додатними кути, що утворюються рухом променя в напрямку проти руху годинникової стрілки.

Для з'ясування, який з кутів  $\alpha$  та  $\beta$  є більшим, необхідно сумістити в одній площині вершини та одну пару їх сторін. Якщо друга сторона одного кута, наприклад, кута  $\beta$ , буде розташована всередині кута  $\alpha$ , кут  $\alpha$  більший за кут  $\beta$  і позначають цей факт як  $\alpha > \beta$  (рис. 3.1).

У геометричній системі, в основі якої лежить точково-векторна аксіоматика, кут визначається по-іншому [68]. У цій аксіоматиці під кутом розуміється певна метрична величина, яка пов'язана з двома векторами через операцію їх скалярного добутку. Відомо, що кожна пара векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  визначає деякий кут  $\varphi$  — число, пов'язане з векторами наступною формулою:

$$\cos \varphi = (\vec{a}, \vec{b}) / |\vec{a}| |\vec{b}|, \quad (3.1)$$

де  $(\vec{a}, \vec{b})$  — скалярний добуток векторів.

Поняття кута як плоскої фігури і як певної метрики застосовують у різних геометричних задачах, де кут визначають окремо спеціальним чином. Наприклад, під кутом між кривими, що перетинаються, розуміють кут між дотичними до цих кривих у точках перетину; кут між прямою і площиною визначають як кут

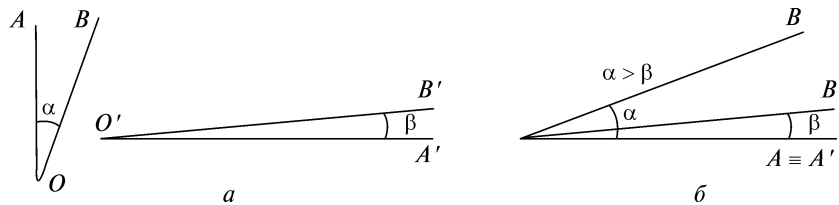


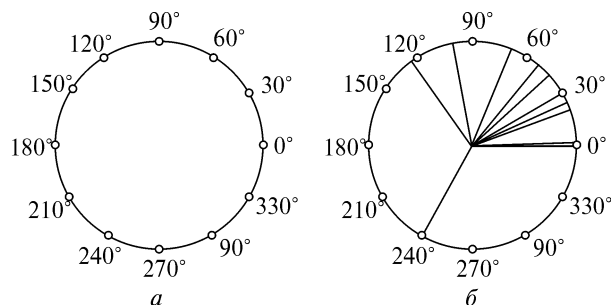
Рис. 3.1. Порівнювання кутів: *a* — до суміщення; *b* — після суміщення

між цією прямою та її прямокутною проекцією на цю площину; кут між перехресними прямими — це кут між напрямками цих прямих, тобто між прямими, що паралельні вихідним прямим і проведені через одну точку.

Більш наочними є моделі кутів на колі одиничного радіуса, або просто на одиничному колі (рис. 3.2). У цьому випадку кути (або напрямки на площині) відтворюються точками на колі (рис. 3.2, *а*) або векторами, які закінчуються в цих точках, а починаються в центрі кола (рис. 3.2, *б*). Така модель відображає головну особливість і відмінність кутових вимірювань порівняно з лінійними: для кутів існує математична операція «сума за модулем  $2\pi$ ».

**Моделі випадкових кутів.** Новий етап розвитку кутометрії пов'язаний з дослідженням випадкових кутів. Під *статистичною кутометрією* розуміється розділ математичної статистики, який вивчає випадкові кути та інші випадкові величини, які передбачають необхідність їх дослідження на колі. Історичний огляд розвитку питання аналізу випадкових кутів наведено в праці [56]. Перші дослідження в цьому напрямі стосувались рівномірно розподілених випадкових кутів. У 1734 р. Д. Бернуллі (Bernoulli D.) розглядав задачу: чи можна пояснити близькість орбітальних площин відомих тоді шести планет Сонячної системи випадковістю?

Дослідження відмінних від рівномірного розподілів на колі розпочалося лише з ХХ ст. Р. Мізес (Von Mises R.) досліджував розподіл, пізніше названий його ім'ям (1918); намотаний гауссівський розподіл вивчав Ф. Перрен (Perrin F.) (1928). У ХХ ст. значний внесок у розвиток ідей статистичного аналізу випадкових кутів зробили Р.А. Фішер (Fisher R.A.), Е.Дж. Гамбел (Gumbel E.J.), Д. Дуранд (Durand D.), Дж.А. Грінвуд (Greenwood J.A.), Г.С. Ватсон (Watson G.S.), Е.Дж. Вільямс (Williams E.J.), С.Р. Рао (Rao C.R.), Д.Р. Рао (Rao J.S.), Е.С. Пірсон (Pearson E.S.), К.В. Мардіа (Mardia K.V.) та ін.



**Рис. 3.2.** Моделі плоского кута на одиничному колі у випадку його відображення точками (*а*) та векторами (*б*)

У статистичних кутових вимірюваннях як головну математичну модель використовують модель випадкового кута  $\Psi(\omega)$ , визначеного на ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — вимірному ймовірнісному просторі з мірою, де  $\Omega$  — простір елементарних подій  $\omega \in \Omega$ ;  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра підмножини  $\Omega$ ;  $P$  — ймовірнісна міра, задана на підмножинах  $\mathcal{A}$ . Простір  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  породжує ймовірнісний простір значень випадкового кута  $\Psi(\omega)$  —  $(X, \mathcal{B}, P_\Psi)$ , де  $X \subseteq R$  є множиною числової осі  $R$ ;  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра підмножини з  $X$ , а  $P_\Psi$  — ймовірнісна міра (ймовірність випадкових подій  $\Psi(\omega) \in \mathcal{B}$ ). Випадковий кут  $\Psi(\omega)$  визначають як вимірну випадкову функцію аргументу  $\omega \in \Omega$  у просторі  $X$ .

У загальному випадку використовуються й інші складніші ймовірнісні моделі, наприклад, двовимірний вектор випадкових кутів, процес випадкових кутів з дискретним часом тощо.

**Означення 3.1.** Дійсна випадкова величина

$$\psi(\omega) = \Psi(\omega) - [\Psi(\omega)/2\pi]^+ \cdot 2\pi, \quad \omega \in \Omega, \quad (3.2)$$

де  $[\Psi(\omega)/2\pi]^+$  — ціла частина випадкового кута  $\Psi(\omega) \in R$ , називається випадковим кутом  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ , якщо функція розподілу  $\psi(\omega)$

$$G(x') = P\{\omega \in \Omega : 0 < \psi(\omega) \leq x'\}, \quad x' \in [0, 2\pi), \quad (3.3)$$

має наступні властивості:

1.  $G(x')$  — монотонно неспадна на  $x' \in [0, 2\pi)$  і є неперервною справа;
2.  $G(2\pi) = 1$  і є неперервною в точці  $x' = 2\pi$ ;
3.  $G(0) = 0$ ;
4.  $G(x'_2) - G(x'_1) \geq 0$ , якщо  $x'_2 \geq x'_1$ ,  $x'_1, x'_2 \in [0, 2\pi)$ .

Аналіз виразу (3.4) показує відмінність функції розподілу  $G(x')$  від традиційної функції розподілу на числовій прямій  $R$  [3]: функція  $G(x')$  задана на скінченному інтервалі аргументу  $x' \in [0, 2\pi)$ ,  $x \in [0, 2\pi)$ , але на різних проміжках  $R$ . Тому функ-

цію  $G(x')$  називають *функцією розподілу ймовірностей випадкового кута*  $\psi(\omega)$  на  $[0, 2\pi)$ .

На рис. 3.3 наведено графіки неперервної  $G(x')$  і дискретної  $G_d(x')$  функцій.

Ймовірнісний розгляд  $\psi(\omega)$  в основному базується на використанні функції розподілу  $G(x')$  на  $[0, 2\pi)$ .

У значній кількості практичних завдань ймовірнісний аналіз довільних випадкових кутів  $\Psi(\omega) \in R$  зводиться до ймовірнісного аналізу його частини  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ .

**Означення 3.2.** Дійсна випадкова величина  $\Psi(\omega) > 2\pi$

$$\Psi(\omega) = [\Psi(\omega)/2\pi] \cdot 2\pi + \psi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (3.5)$$

називається *випадковим кутом*  $\Psi(\omega)$  на  $R$ , якщо  $\psi(\omega)$  є випадковим кутом на  $[0, 2\pi)$  з функцією розподілу  $G(x')$  на  $[0, 2\pi)$ , визначеною за означенням 3.1, а інтегральна функція розподілу ймовірностей послідовності випадкових кутів  $\Psi(\omega)$  на  $R$  для  $\forall k \in Z$  визначається як

$$F(x) = G(x') + [x/2\pi]^+ + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

Для обґрунтування виразу (3.5) потрібне виконання двох умов:

$$P\{\omega \in \Omega : [\Psi(\omega)/2\pi] = k, \quad k \in Z\} = 1,$$

$$P\{\omega \in \Omega : \psi(\omega) \in [0, 2\pi)\} = 1.$$

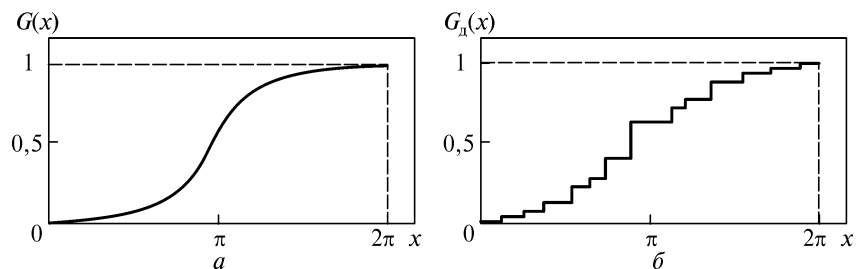


Рис. 3.3. Графіки функцій розподілу: а —  $G(x')$ ; б —  $G_d(x')$

*Інтегральна функція розподілу ймовірностей послідовності випадкових кутів*  $\Psi(\omega)$  на  $R$  для  $\forall k \in Z$  має вигляд [24, 31]

$$F(x) = G(x') + [x/2\pi]^+ + C, \quad x \in R, \quad x' \in [0, 2\pi).$$

Функція  $F(x)$  має наступні властивості:

1.  $F(x)$  — монотонно неспадна.
2.  $F(x)$  — неперервна справа на  $x \in R$ .
3.  $F(-\infty) = -\infty$ ;  $F(\infty) = \infty$ .
4.  $F(x') = F(x') - F(0)$ ,  $x' \in [0, 2\pi)$ .
5.  $F(x) - x/2\pi$  є періодичною функцією з періодом  $2\pi$ .
6.  $F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1$ ,  $x \in R$ .
7. Для  $0 \leq x_2 - x_1 \leq 2\pi$  виконується

$$P\{\omega \in \Omega : x_1 < \Psi(\omega) \leq x_2\} = \begin{cases} 0, & x_2 \leq x_1; \\ F(x_2) - F(x_1) & (x_1 < x_2 \leq x_1 + 2\pi); \\ 1, & x_2 > x_1 + 2\pi. \end{cases}$$

8. Для різниці кутів у межах  $2\pi - 0 < x_2 - x_1 \leq 2\pi$  маємо

$$\begin{cases} F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < x' \leq x_2\} \text{ для } [x_2/2\pi]^+ = [x_1/2\pi]^+; \\ (F(x_2') - F(0)) + (F(x_1') - F(2\pi)) = \\ = P\{(0 \leq x' \leq x_2') + P(x_1' \leq x' \leq 2\pi)\} \text{ для } [x_2/2\pi]^+ = [x_1/2\pi]^+ + 1, \end{cases}$$

де  $x_1' = x_1 \pmod{2\pi}$ ,  $x_2' = x_2 \pmod{2\pi}$ .

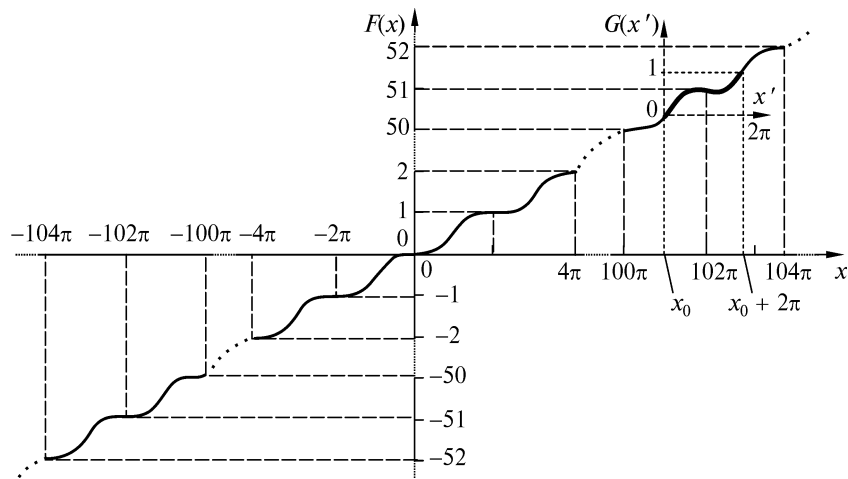
9. Стала  $C$  зазвичай дорівнює нулю, але залежно від постановки задачі кутових вимірювань може набувати інших числових значень.

Із наведених властивостей функції  $F(x)$ ,  $x \in R$ , випливає, що монотонно неспадна функція  $F(x)$  має однакові прирости:

$$F(x + 2\pi(k + 1)) - F(x + 2\pi k) = 1 \quad \forall k \in Z,$$

що не суперечить властивостям нормованої ймовірнісної міри.

Таким чином, на кожному скінченному інтервалі  $\{2\pi k\} \cup [0, 2\pi)$ ,  $k \in Z$ , числової прямої  $R$  розподіл ймовірностей довільного випадкового кута  $\Psi(\omega)$  у вигляді (3.5) для конкретного  $k$  має роз-

Рис. 3.4. Графік неперервної функції  $F(x)$ 

поділ ймовірностей  $G(x')$  випадкового кута на  $[0, 2\pi)$ . Приклад графіка функції  $F(x)$  для неперервного випадку наведено на рис. 3.4.

Для значної кількості кутових вимірювань відсутня фіксована точка початку координат, тому за нульовий напрямок можна взяти довільне число  $x_0$  з числової осі  $R$ , а результати кутових вимірювань розглядати в інтервалі  $[x_0, x_0 + 2\pi]$  або  $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ .

**Щільність розподілу ймовірностей  $p(x)$  випадкового кута  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ .** Функція  $p(x)$  для абсолютно неперервних законів розподілу на колі має як властивості, що збігаються з властивостями функції  $p(x)$  на прямій, так і відмінні властивості.

Для неперервних функцій  $G(x')$  і  $F(x)$  випадкових кутів маємо

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2 + 2\pi k) - F(x_1 + 2\pi k) = \int_{x_1}^{x_2} p(y) dy,$$

$$x_{1,2} \in [0, 2\pi), k \in Z.$$

Функція  $p(x)$  називається *щільністю розподілу ймовірностей випадкового кута  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$*  і має наступні властивості:



1.  $p(x + 2\pi) = p(x)$ ,  $p(x)$  є періодичною функцією з періодом  $2\pi$ .
2.  $p(x) \geq 0$ ,  $x \in [0, 2\pi)$ .
3.  $\int_0^{2\pi} p(x) dx = \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} p(x) dx = 1$ ,  $k \in Z$ .

**Імовірнісна модель випадкового кута на одиничному колі.** Розглянемо випадковий кут  $\Psi(\omega)$  з областю визначення  $\Omega = \{\omega \in [0, 2\pi)\}$  та множиною значень  $\Theta \subset R$ . На комплексній площині задамо вектор

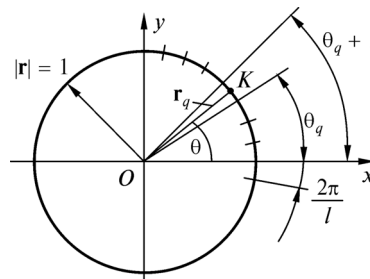
$$\eta(\omega) = \cos[\Psi(\omega)] + i \sin[\Psi(\omega)]. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) встановлює однозначну відповідність між напрямками у просторі вектора  $\eta(\omega)$  та частиною випадкового кута  $\Psi(\omega)$ :

$$\psi(\omega) = [\Psi(\omega)] \bmod 2\pi = \Psi(\omega) - [\Psi(\omega)/2\pi]^+ 2\pi. \quad (3.7)$$

Реалізацію випадкового вектора  $\eta(\omega)$  зобразимо на площині в декартовій системі координат  $xOy$ . Реалізація  $\theta$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  в цій системі збігається з напрямком відповідного вектора  $\mathbf{r}_q$ , отже,  $\arg(\mathbf{r}_q) = \theta$ . Цей вектор починається в точці  $O$  і закінчується в точці з координатами  $(x = \cos \theta; y = \sin \theta)$ . Кут  $\theta$  відраховують від осі  $Ox$  у напрямку проти годинникової стрілки (рис. 3.5).

У разі зміни  $\theta$  на  $2\pi$  кінець вектора  $\mathbf{r}$  описує на площині  $xOy$  повне коло одиничного радіуса і повертається в ту саму точку кола. Коло з одиничним радіусом називають *нормованим* або *одиничним колом*.



**Рис. 3.5.** Графічне зображення результатів кутових спостережень на колі

Розділимо коло на скінченне число  $l$  рівних дуг точками кола  $\pi(2q+1)/l$ , почавши відлік  $q$  від осі  $Ox$  у напрямку проти годинникової стрілки. Ці точки утворюють скінченне розбиття  $D$  одиничного кола. Наприклад, якщо  $l = 4$ , маємо  $D = \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$ .

З'єднаємо початок координат із зазначеними точками на колі векторами  $\mathbf{r}$ . Побудовані радіус-вектори утворюють із віссю  $Ox$  кути:

$$\psi_q = \pi(2q+1)/l, \quad q = \overline{0, l-1}.$$

Виділимо елементарну подію  $\omega_q$ , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних  $\theta_q$  і таких  $\theta_{q+1}$ , що  $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$ , в інтервалі  $[\theta_q, \theta_{q+1})$  знайдеться число  $\theta$ , яке за модулем  $2\pi$  є значенням  $\psi(\omega)$ . Це твердження можна записати у вигляді

$$\omega_q = \left\{ \psi(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1}) \right\}, \quad q = \overline{1, l-1}. \quad (3.8)$$

Отже, континууму значень напрямків  $\mathbf{r}$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$  поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій  $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$ , яку отримано розбиттям  $D$  одиничного кола на скінченне число  $l$  рівних інтервалів. Операції з усіма підмножинами  $\Omega$  утворюють алгебру  $\mathcal{A}$ .

Для завершення побудови моделі випадкового кута залишилося задати ймовірності  $P_q$  подій  $\omega_q$  з простору  $\Omega$ . З урахуванням циклічної природи кутів визначимо ймовірності таким чином:

$$P_q = \begin{cases} P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi(\omega) < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\}, & [\theta_q/2\pi]^+ = [\theta_{q+1}/2\pi]^+; \\ P\{0 \leq \psi(\omega) < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} + P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi(\omega) < 2\pi\}, & \\ [\theta_q/2\pi]^+ = [\theta_{q+1}/2\pi]^+ + 1. & \end{cases} \quad (3.9)$$

Ймовірність події  $B \subset \mathcal{A}$  у загальному вигляді визначають так:

$$P(B) = \sum_{\{\omega_q \in B\}} P(\omega_q). \quad (3.10)$$

Для обчислення ймовірностей (3.9) необхідно ввести функцію, що породжує ймовірнісну міру. Використовуючи  $F(\theta)$ , визначимо (3.9) як

$$P(\theta_q \leq \Psi(\omega) < \theta_{q+1}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \theta_{q+1} < \theta_q; \\ F(\theta_{q+1}) - F(\theta_q) & \text{для } \theta_q \leq \theta_{q+1} < \theta_q + 2\pi; \\ 1 & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q + 2\pi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Функція розподілу  $F(\theta)$  породжує міру випадкового кута. Для визначення  $F(x)$  скористаємося її зв'язком з відповідною щільністю  $p(\theta)$ :

$$F(\theta_{q+1}) - F(\theta_q) = \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} p(x) dx, \quad (3.12)$$

де  $\theta_q, \theta_{q+1}$  — фіксовані кути, що відповідають розбиттю  $D$ .

Ймовірнісний простір  $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ , де  $P = P(B)$ ,  $B \in \mathcal{A}$  — ймовірність події  $B$ , визначає ймовірнісну модель кутових спостережень під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині  $\Omega$  побудуємо стохастичну або ймовірнісну міру  $\varphi(\omega_q)$ , яка дорівнює довжині дуг між піввіссю  $Ox$  та векторами  $\mathbf{r}_q$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$ . Отже,  $\varphi(\omega_q) = 2\pi q/l$  — випадкова функція від інтервалу розбиття  $D$ . Множина подій з  $\Omega$  відображається на числову вісь:

$$x(\omega) = \{\varphi(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}, \quad x(\omega) \in X \subseteq R.$$

Клас підмножин  $X$  дає можливість побудувати алгебру  $\mathcal{B}$ . Використовуючи вирази (3.11), (3.15), нескладно знайти ймовірності  $P(A \in \mathcal{B})$  для визначеного закону розподілу ймовірностей. Таким чином, отриманий ймовірнісний простір  $\{X, \mathcal{B}, P_\varphi\}$ , де  $P_\varphi = \{P(A), A \in \mathcal{B}\}$ , визначає область значень ймовірнісної моделі випадкового кута  $\Psi(\omega)$ .

### 3.2. ДЕТЕРМІНОВАНІ ТА ЙМОВІРНІСНІ МІРИ КУТОВИХ ВЕЛИЧИН

Детерміновані міри кута на площині в межах  $[0, 2\pi)$  і операції з кутами. Розглянемо варіанти визначення міри кута на площині. Коло належить до класу замкнених плоских кривих і в загальному вигляді описується в прямокутній декартовій системі координат рівнянням [10]

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad (3.13)$$

де  $x_0, y_0$  — координати центра кола;  $r$  — радіус кола. На рис. 3.6, а маємо  $x_0 = y_0 = 0$ , а  $r = 1$ . Для цих умов рівняння кола в тригонометричній формі має простий вигляд:  $(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$ . Використовуючи значення  $\varphi$ , можна визначити координати кінцевої точки вектора  $\rho$  у декартовій системі координат у вигляді пари чисел  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Для кола справедливі такі основні співвідношення: довжина кола дорівнює  $C = 2\pi r$ ; довжина дуги, що відповідає центральному куту  $\varphi$ , дорівнює  $l = r\varphi$ ; довжина хорди, яка відповідає центральному куту  $\varphi$ , становить  $a = 2\sqrt{2hr - h^2} = 2r \sin(\varphi/2)$ , де  $h$  — висота сегмента; площа кола —  $S = \pi r^2$ , площа сектора —  $S_1 = 0,5lr = 0,5r^2\varphi$ ; площа сегмента —  $S_2 = 0,5lr \pm S_\Delta$ , де  $S_\Delta$  — площа трикутника з вершинами в центрі кола і на кінцях радіуса, що обмежує відповідний сектор; знак «+» беруть, якщо  $\varphi > \pi$ , знак «-» — якщо  $\varphi < \pi$ .

Кожному вектору  $\rho$  (див. рис. 3.6) можна поставити у взаємоднозначну відповідність дійсне число  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , яке може набувати значення довжини дуги  $l = \varphi$  (рис. 3.6, а), яка висікається на одиничному колі віссю  $Ox$  та вектором  $\rho$ , або значення площі сектора  $S_1 = 0,5\varphi$  (рис. 3.6, б), обмеженого частиною осі  $Ox$ , вектором  $\rho$  та відповідною дугою одиничного кола.

Розглянуте вище задання кута на колі з рівномірним розбиттям не є єдиним. Як породжувані можна розглядати інші міри випадкових кутів та інші замкнені плоскі криві, наприклад, еліпс (рис. 3.6, в). Таке формування випадкового кута може знайти застосування, наприклад, у геодезії під час проведення кутових

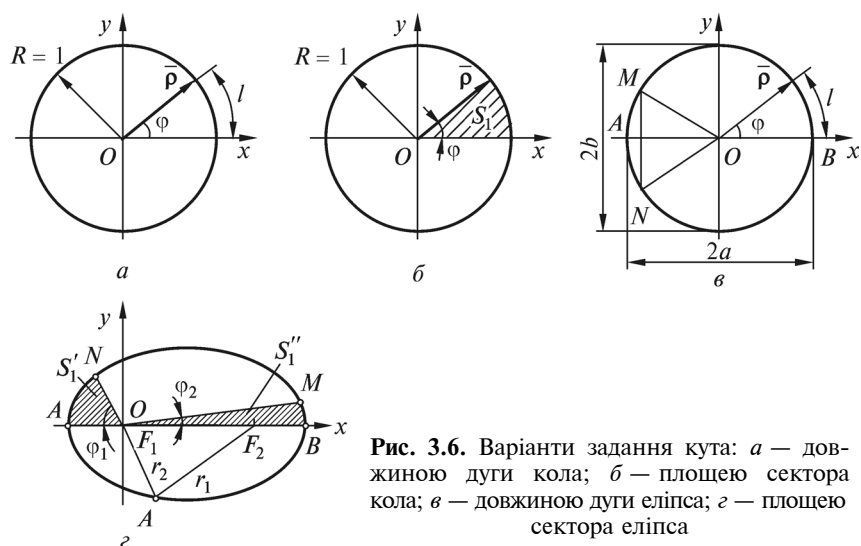


Рис. 3.6. Варіанти задання кута: *a* — довжиною дуги кола; *b* — площею сектора кола; *в* — довжиною дуги еліпса; *г* — площею сектора еліпса

спостережень на земній поверхні. Відомо [41], що математично форма Землі близька до поверхні еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса навколо однієї з його осей. У геодезичних та картографічних працях користуються еліпсоїдом Красовського (за прізвищем відомого вченого Ф.М. Красовського (1878—1948), який у 1946 р. керував дослідженнями з точного визначення розмірів земного еліпсоїда), для якого більша напіввісь становить  $a = 6\,378\,245$  м і відповідним співвідношенням стискання  $1 : 298,3$ .

Рівняння еліпса [68], віднесеного до осей симетрії, має вигляд

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (3.14)$$

У (3.14) сума квадратів складових  $x/a$  та  $y/b$  дорівнює одиниці, на підставі чого їх можна взяти за синус і косинус деякого кута  $\varphi$ . Така заміна дає змогу застосовувати інше параметричне зображення еліпса:

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (3.15)$$

Довжину дуги еліпса, що відповідає куту  $\varphi$ , обчислюють за формулою [101]

$$l = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = aE(\varepsilon, \varphi), \quad (3.16)$$

де  $\varepsilon = a^{-1}\sqrt{a^2 - b^2}$  — числовий ексцентриситет еліпса;  $E(\varepsilon, \varphi)$  — позначення еліптичного інтеграла 2-го роду.

Характерною властивістю еліпса є те, що сума відстаней  $r_1$  та  $r_2$  від довільної точки еліпса до точок  $F_1, F_2$  — фокусів еліпса дорівнює сталій величині —  $2a$ , тобто його більшій піввісі:  $r_1 + r_2 = (a - ex) + (a + ex) = 2a$ .

Площа еліпса (рис. 3.6, в) становить  $S = \pi ab$ , площа сектора  $AOM$  —  $S_1 = 0,5ab \arccos(x_M/a)$ , а  $S_2 = ab \arccos(x_M/a) - x_M y_M$  — це площа сегмента  $MAN$ ,  $x_M, y_M$  — координати точки  $M$  [10].

Під час виконання орбітальних кутових спостережень космічних об'єктів може виявитись доцільним розташування центра системи координат в одному з фокусів еліпса (рис. 3.6, г) та формування значень випадкового кута пропорційно площі відповідних сегментів. Таке припущення ґрунтується на другому законі Кеплера (законі руху планет) [99]: під час незбуреного руху площа, яку описує радіус-вектор матеріальної точки, що рухається, змінюється пропорційно часу, тобто радіус-вектор планети у рівні проміжки часу описує рівні площі. На рис. 3.6, г зображено еліптичну орбіту планети, у фокусі  $F_1$  якої розміщено Сонце. Відрідки траєкторії  $BM$  та  $NA$  планета проходить за рівні проміжки часу, тому площі секторів  $AON$  та  $BOM$  рівні. Це призводить до нерівномірної за відрідками дуг міри випадкового кута. У дійсності, в результаті взаємного впливу планет Сонячної системи траєкторії планет — це складні просторові криві, які можна апроксимувати певним еліпсом лише за час одного-двох обертів.

Зазначимо, що коло та еліпс не вичерпують усі можливі способи побудови випадкового кута. З цією метою можуть бути використані й інші замкнені плоскі криві другого порядку. Наприклад, у випадку вимірювань у системах на основі безпілотних літальних апаратів, які рухаються по замкнених траєкторіях [5].

**Детермінована міра кутів, більших за  $2\pi$ .** У загальному випадку вимірювані кути можуть виходити за межі півінтервалу  $[0, 2\pi)$ , тобто областю значень кута  $\Phi$  може бути множина всіх дійсних чисел. Інтерпретувати значення таких кутів можна за допомогою гвинтової лінії [12]. Графічну інтерпретацію кутів для цього випадку наведено на рис. 3.7. Областю значень кута є множина  $X$  точок осі  $O\Phi$ . Відображення кут—число відбувається через гвинтову лінію, яку задають рівняннями

$$x = \cos \Phi, \quad y = \sin \Phi, \quad \Phi = 2\pi n + \varphi, \quad n \in Z.$$

На рис. 3.7 напрямку вектора  $\bar{\rho}$  у площині  $xOy$  відповідає дуга  $AB$  довжиною  $l$ . Цій дузі через гвинтову лінію ставиться у відповідність одне з чисел осі  $O\Phi$  у вигляді  $\varphi + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ . Число значення  $n$  задається початковими умовами або в інший спосіб, який визначається умовами фізичної реалізації експерименту кутових вимірювань.

Конструктивна форма зображення кута  $\Phi > 2\pi$  у вигляді

$$\Phi = [\Phi/2\pi]^+ \cdot 2\pi + \varphi, \quad (3.17)$$

де  $[\Phi]^+ \in Z$  — ціла (кількість повних обертів), а  $\{\Phi\} = \varphi \in [0, 2\pi)$  — дробова частина кута  $\Phi$ , є основною формулою визначення довільного кута у кутових вимірюваннях. У практиці кутових вимірювань головну увагу приділяють куту  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , але саме конструктивна форма (3.17) дає можливість досліджувати довільні кути. З цього виразу випливає, що

$$\varphi \equiv \Phi \pmod{2\pi}, \quad (3.18)$$

тобто дробова частина кута  $\Phi > 2\pi$  визначається операцією порівняння кута  $\Phi$  за модулем  $2\pi$ .

**Ймовірнісна міра випадкових кутів** породжується їхніми функціями розподілу. Ймовірнісній мірі випадкових величин і випадкових кутів притаманні властивості нормованості, скінченності та репрезентативності, що визначає їх практичну цінність для ви-

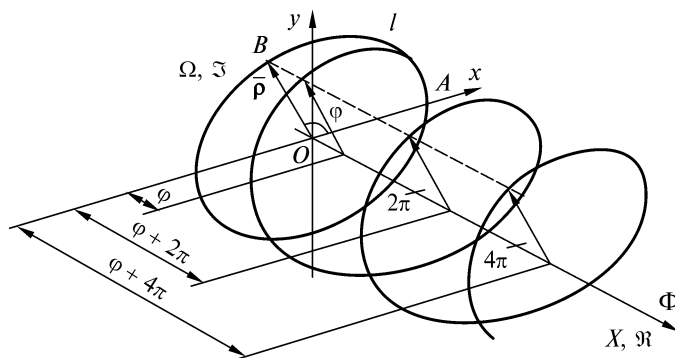


Рис. 3.7. Задання кутів на гвинтовій лінії та на колі

мірювань. Разом з цим функції розподілу ймовірностей випадкових кутів мають певні особливості. Однією з характерних ознак кола як простору, на якому формуються множини кутів, є виконання на колі операції додавання за модулем  $2\pi$ . Це обумовлює властивість періодичності законів щільності розподілу ймовірності випадкового кута, чим вони суттєво відрізняються від розподілів ймовірності випадкових величин.

**Закони розподілів випадкових кутів.** На рис. 3.8 зображено загальний вигляд щільності ймовірності  $p(\theta)$ ,  $\theta \in (-\infty, \infty)$  випадкового кута. Графік побудовано за умов апіорної невизначеності розташування інтервалу вимірювання  $[\theta_n, \theta_n + 2\pi)$ , де  $\theta_n$  — початок інтервалу, і для якого виконується умова нормування:

$$\int_{\theta_n}^{\theta_n+2\pi} p(\theta) d\theta = 1.$$

Щільність  $p(\theta)$  на рис. 3.8 періодична з періодом  $2\pi$ . У статистичній кутометрії такі розподіли називають *одночастотними* [56, 125]. *Багаточастотні* розподіли мають період менше за  $2\pi$  у певне ціле число разів, тобто період  $2\pi/j$ ,  $j = 2, 3, \dots$ . Далі розглянемо приклади найхарактерніших одночастотних розподілів ймовірності випадкових кутів.

**Намотаний гауссовий розподіл.** Цей розподіл належить до сім'ї намотаних розподілів («намотаних» на одиничне коло), що утворюються нелінійним перетворенням випадкової величини  $\xi(\omega)$  на випадковий кут  $\psi(\omega)$  вигляду

$$\psi(\omega) = [K\xi(\omega)] \bmod 2\pi, \quad (3.19)$$

де  $K$  — масштабний коефіцієнт перетворення. Перетворення (3.19) призводить до трансформації законів розподілу на прямій

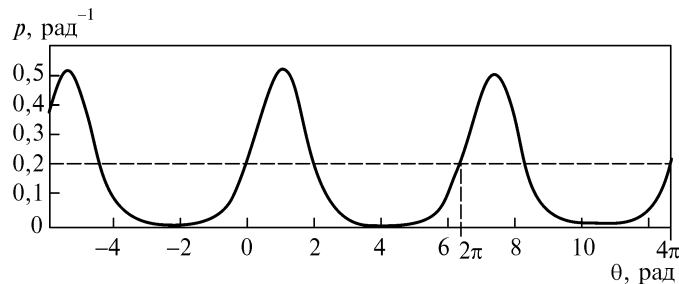


Рис. 3.8. Загальний вигляд щільності розподілу ймовірності випадкового кута



у намотані закони розподілу ймовірності випадкових кутів. Якщо на прямій задано розподіл  $F(x)$  випадкової величини  $\xi(\omega)$ , то намотаний на одиничне коло розподіл  $F(x)$  визначатиме відповідний намотаний закон розподілу  $F_{2\pi}(\theta)$  випадкового кута  $\psi(\omega) \in [0, 2\pi)$ .

У загальному випадку маємо

$$F_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [F(\theta + 2\pi j) - F(2\pi j)], \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad j \in Z. \quad (3.20)$$

Якщо  $\xi(\omega)$  має щільність розподілу ймовірності  $p(x)$ , то неперервний випадковий кут  $\psi(\omega)$  буде також розподілений неперервно із щільністю

$$p_{2\pi}(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi j), \quad j \in Z. \quad (3.21)$$

У загальному випадку функція  $p_{2\pi}(\theta)$  несиметрична відносно середини інтервалу  $[0, 2\pi)$ , а на його кінцях набуває однакових значень:  $p_v(0) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi} p_v(\theta)$ . У багатьох випадках значення  $j$  у сумі можна обмежити  $\pm 1 \dots \pm 5$ .

Щільність намотаного гауссового розподілу ймовірності задається виразом

$$p_{2\pi}(\theta / \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{[(\theta - \mu) \pmod{2\pi} + 2\pi j]^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.22)$$

де  $\mu$  — математичне сподівання;  $\sigma$  — середньоквадратичне відхилення випадкової величини  $\xi(\omega)$ . Цей закон має важливу властивість: сума незалежних кутів  $\sum_{i=1}^n \theta_i$ , кожний з яких має розподіл (3.22), теж має такий самий розподіл, але з іншими характеристиками.

Характеристична функція розподілу (3.22) має вигляд

$$f_{2\pi}(n) = f_n = \alpha_n = \exp(-n^2\sigma^2/2), \quad \beta_n = 0, \quad n \in Z. \quad (3.23)$$

Для намотаного гауссового розподілу виконується центральна гранична теорема на колі: для незалежних випадкових кутів

$\psi_1(\omega), \dots, \psi_n(\omega)$ , які мають однакову функцію розподілу ймовірності  $F(\theta)$ , розподіл імовірності нормованої суми кутів  $\psi_\Sigma(\omega) = \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) \right] \bmod 2\pi$  у випадку  $n \rightarrow \infty$  наближається до намотаного гауссового розподілу.

Приклади щільностей розподілу ймовірності намотаного гауссового розподілу для різних значень параметрів показано на рис. 3.9, а, б. З графіків на цьому рисунку бачимо, що намотаний гауссів розподіл є одновершинним і симетричним відносно значення  $\theta = \mu \pmod{2\pi}$ .

Якщо  $\sigma \rightarrow \infty$ , то розподіл перетворюється на рівномірний зі щільністю  $1/2\pi$ , збільшення  $\mu$  призводить до зміщення максимуму функції у бік більших значень кутів. На інтервалі  $[0, 2\pi)$  розподіл (3.22) має дві точки перегину.

**Розподіл Мізеса.** Щільність розподілу ймовірності Мізеса для випадкового кута  $\psi(\omega)$  визначається за формулою

$$p_M(\theta | \mu, k) = \exp\{k \cos(\theta - \mu)\} / 2\pi I_0(k), \quad |\mu| < \infty, \quad k > 0, \quad (3.24)$$

де  $I_0(k)$  — модифікована функція Бесселя першого роду і нульового порядку,  $\mu$  — круговий середній напрямок випадкового кута;  $k$  — параметр концентрації випадкового кута в околі  $\mu$ . Графіки

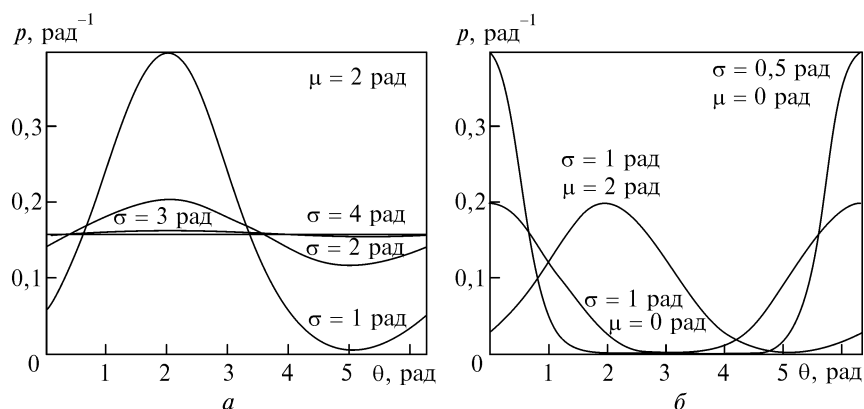
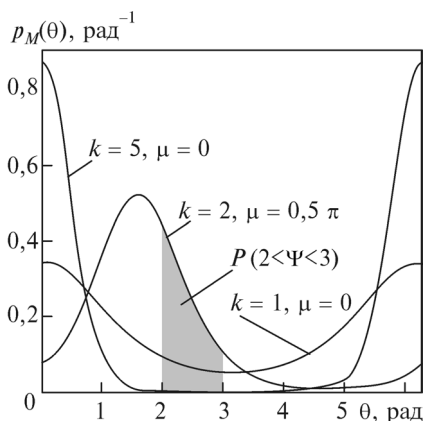


Рис. 3.9. Щільність намотаного гауссового розподілу ймовірностей випадкових кутів з різними параметрами

Рис. 3.10. Приклади графіків щільності розподілу ймовірності Мізеса

функцій  $p_M(\theta)$  для різних значень параметрів наведено на рис. 3.10. Зі збільшенням параметра  $k$  розподіл Мізеса концентрується навколо  $\mu$  (якщо  $k = 2$  і  $\mu = 0,5\pi$ , розподіл майже повністю зосереджений на дузі від 0 до 3 рад, а якщо  $k \rightarrow 0$  — перетворюється на рівномірний).



Розподіл Мізеса одновершинний та симетричний відносно значення  $\mu$ , яке є математичним сподіванням цього розподілу.

Характеристична функція розподілу Мізеса визначається так:

$$f_n = \alpha_n = I_n(k)/I_0(k). \quad (3.25)$$

Цей розподіл має важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра  $\mu$  є круговий середній напрям.

Відповідний вибір параметрів намотаного гауссового розподілу дає змогу задовільно апроксимувати його розподілом.

**Інші типові розподіли на колі** наведено в табл. 3.1.

Намотаний розподіл ймовірності Коші, як і гауссовий намотаний розподіл, має властивість безмежно подільного закону розподілу. Дискретний розподіл ймовірностей випадкових кутів з ймовірностями

$$P[\psi \equiv (v + 2\pi q/l) \bmod 2\pi] = P_q, \quad q = \overline{0, l-1}, \quad (3.26)$$

називають *гратчастим* розподілом, а величину  $2\pi/l$  — кроком гратки. Для ймовірностей (3.26) виконується умова нормування:  $\sum_q P_q = 1$ . Цей розподіл можна вважати зосередженим у вершинах

вписаного в одиничне коло правильного  $l$ -кутника. Якщо  $P_q = l^{-1}$ , то розподіл ймовірностей перетворюється на рівномірний дискретний.

Характеристична функція гратчастого розподілу за  $v = 0$  дорівнює

Таблиця 3.1. Типові розподіли на колі

Назва	Щільність розподілу ймовірності $p(\theta)$	Характеристична функція $f_n$
Рівномірний	$1/2\pi$	$\frac{e^{2\pi ni} - 1}{2\pi ni} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$
Кардіоїдний	$(2\pi)^{-1} [1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)],$ $ \mu  < \infty,  \rho  < 0,5$	—
Трикутний	$\frac{1}{8\pi} [4 - \pi^2 \rho + 2\pi\rho  \pi - \theta ],$ $\rho \leq 4/\pi^2$	$\alpha_{2n-1} = \frac{\rho}{(2n-1)^2}, \alpha_{2n} = 0,$ $\beta_n = 0$
Намотаний Коші*	$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{1 - \cos 2\rho + \rho^2},$ $\rho = e^{-a} \in [0, 1]$	$\rho^{ n }$

\* Розподіл Коші на прямій має щільність розподілу ймовірності:

$$p(x, a) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad x \in R, \quad a > 0.$$

$$f_n = \sum P_q \exp(2\pi qni/l). \quad (3.27)$$

Для рівномірного дискретного розподілу маємо

$$f_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod{2\pi}; \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (3.28)$$

### 3.3. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ КУТІВ

Характеристична функція розподілу ймовірностей випадкового кута  $\Psi(\omega)$  визначається як послідовність значень [24, 31]:

$$\begin{aligned} f_n &= \mathbf{M} \{ \exp(in\Psi(\omega)) \} = \int_0^{2\pi} e^{inx} dG(x) = \\ &= \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{inx} dF(x), \quad k, n \in Z. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Для неперервних та дискретних випадкових кутів з (3.29) маємо відповідно такі вирази:

$$f_n = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta') p(\theta') d\theta', \quad f_n = \sum_{j=1}^m P_j \exp\left(in \frac{2\pi}{m}\right). \quad (3.30)$$

Характеристичну функцію випадкових кутів можна записати у вигляді ряду комплексних чисел:

$$f_n = \alpha_n + i\beta_n = \rho_n \exp(i\mu_n), \quad (3.30a)$$

$$\alpha_n = \mathbf{M} \cos(n\psi) = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) dF(\theta), \quad \beta_n = \mathbf{M} \sin(n\psi) = \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) dF(\theta).$$

Оскільки для випадкового кута  $\Psi(\omega)$  визначення (3.29) має сенс лише тоді, коли функція  $\exp(in\Psi(\omega))$  є періодичною з періодом  $2\pi$ , то  $n$  може бути лише цілим числом:  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Тому у випадку розподіленого на колі випадкового кута характеристична функція — це послідовність тригонометричних моментів, обчислених відносно нульового напрямку.

Характеристична функція випадкових кутів має властивості:

1. Модуль характеристичної функції  $|f_n| \leq 1$ .
2. Для  $n = 0$  маємо  $f_0 = 1$ .
3. Характеристична функція від'ємного аргументу дорівнює комплексно спряженій характеристичній функції, тобто  $f_{-n} = f_n^*$ , оскільки  $\alpha_{-n} = \alpha_n$ ,  $\beta_{-n} = -\beta_n$ .
4. Характеристична функція суми незалежних випадкових кутів  $\psi_1(\omega), \dots, \psi_m(\omega)$  дорівнює добутку їх характеристичних функцій:

$$f_n = \prod_{j=1}^m f_n^{(j)}, \quad (3.31)$$

де  $f_n^{(j)}$  — характеристична функція  $n$ -го порядку  $j$ -го кута.

5. Характеристична функція кута  $[\psi(\omega) + \nu] \bmod 2\pi$ , де  $\nu = \text{const}$  — довільний дійсний кут, дорівнює

$$\mathbf{M} e^{in(\psi+\nu)} = e^{in\nu} f_n, \quad (3.32)$$

тобто зміна початку відліку не призводить до зміни тригонометричного моменту.

6. Щільність розподілу ймовірності випадкових кутів однозначно визначається її характеристичною функцією:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\theta}. \quad (3.33)$$

Формула (3.33) є розкладенням  $p(\theta)$  у ряд Фур'є. У деяких випадках її використання дає змогу суттєво спростити вирази для щільності розподілу ймовірності випадкових кутів.

Характеристичну функцію можна обчислити і відносно довільного початкового напрямку  $\nu$ . Тоді маємо

$$f_n(\nu) = \mathbf{M}e^{in(\psi-\nu)} = \alpha_n(\nu) + i\beta_n(\nu) = \rho_n(\nu) e^{i\mu_n(\nu)}. \quad (3.34)$$

Використовуючи наведені вище властивості характеристичної функції випадкових кутів, можна довести наступні співвідношення:

$$\rho_n(\nu) = \rho_n, \quad \mu_n(n) \equiv (\mu_n - n\nu) \pmod{2\pi}. \quad (3.35)$$

**Центральні тригонометричні моменти** визначаються для  $\rho_1 > 0$  відносно напрямку з полярним кутом  $\mu_1$  за виразами

$$\begin{aligned} f_n(\mu_1) &= f_n(0) e^{-in\mu_1(0)}; \\ a_n(\mu_1) &= \rho_n(0) \cos(\mu_n(0) - n\mu_1(0)); \\ b_n(\mu_1) &= \rho_n(0) \sin(\mu_n(0) - n\mu_1(0)). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для  $n=1$  маємо  $a_1(\mu_1) = \rho_1(0)$ ,  $b_1(\mu_1) = 0$ .

**Кругове середнє відхилення**  $\delta(\nu)$  випадкового кута  $\psi(\omega)$  відносно кута  $\nu$  визначається як математичне сподівання випадкового кута:

$$\min\{\psi'(\omega), 2\pi - \psi'(\omega)\}, \quad (3.37)$$

де  $\psi'(\omega) \equiv (\psi(\omega) - \nu) \pmod{2\pi}$ , тобто

$$\delta(\nu) = \int_0^{\pi} \theta dF(\theta + \nu) + \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - \theta) dF(\theta + \nu). \quad (3.38)$$

**Кругову дисперсію** випадкового кута  $\Psi(\omega)$  визначають як  $\nu = 1 - \rho_1(0) = 1 - |f_1'(0)|$ . У загальному випадку її розглядають як ха-

рактеристику відхилення випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  від фіксованого кута  $\varphi' \in [0, 2\pi)$ :

$$\nu(\varphi') = \mathbf{M} \{1 - \cos(\psi(\omega) - \varphi')\} = 1 - \operatorname{Re} \mathbf{M} \{ \exp i[\psi(\omega) - \varphi'] \}. \quad (3.39)$$

У випадку  $\rho_1(0) > 0$  маємо

$$\begin{aligned} \nu(\varphi') &= 1 - \rho_1(0) \cos(\varphi' - \mu_1(0)) = \\ &= 1 - \rho_1(0) + 2\rho_1(0) \left( \sin \frac{\varphi' - \mu_1(0)}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Цей вираз набуває мінімального значення, коли  $\varphi' = \mu_1(0)$ . Тобто кругова дисперсія випадкового кута  $\psi(\omega) \equiv \Psi(\omega) \pmod{2\pi}$  набуває мінімального значення, яке становить  $\nu(\alpha_1) = 1 - \rho_1(0)$  для  $\varphi' = \mu_1(0)$ , тобто коли за напрямком  $\varphi'$  взято круговий середній напрямок випадкового кута  $\psi(\omega)$ . Множина значень кругової дисперсії належить інтервалу  $[0, 1)$ .

**Кругова медіана.** Для одновершинних неперервних розподілів медіана завжди визначається однозначно. Такі розподіли на колі відрізняються тим, що в інтервалі  $[0, 2\pi)$  існують два такі кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , що під час руху точки по одиничному колу від  $\varphi_2$  до  $\varphi_1$  в обох напрямках функція  $p(x') = dF(x')/dx'$  є монотонно неспадною.

Інша важлива властивість медіани випадкового кута стосується його кругового середнього відхилення: у випадку одновершинного розподілу кругове середнє відхилення досягає мінімуму в точці  $\mu_m$ .

**Асиметрія.** Для оцінки асиметрії закону розподілу ймовірності випадкового кута вводять *коефіцієнт асиметрії*:

$$\gamma_c = \frac{\beta_2(\mu_1)}{\nu^{3/2}}. \quad (3.41)$$

Коефіцієнт  $\gamma_c$  характеризує асиметрію закону розподілу ймовірності випадкового кута відносно напрямку  $\theta = \mu_1$  і дорівнює нулеві для симетричних розподілів імовірності.

**Ексцес.** Згладжуваність кривих розподілу ймовірності випадкових кутів в околі їх моди характеризує *коефіцієнт ексцесу*:

$$\gamma_e = \frac{\alpha_2(\mu_1) - (1 - \nu)^4}{\nu^2}. \quad (3.42)$$

Коефіцієнт  $\gamma_e$  порівнює криві всіх законів розподілів імовірності випадкових кутів з намотаним гауссовим розподілом, для якого  $\gamma_e = 0$  (коефіцієнт ексцесу близький до нуля і для розподілу Мізеса).

**Кругове стандартне відхилення.** Характеристична функція дає змогу встановити зв'язок між дисперсією  $\sigma$  гауссової випадкової величини і круговою дисперсією  $\nu$  випадкового кута з намотаним гауссовим розподілом. Для  $n = 1$  маємо  $\exp(-0,5\sigma^2) = \rho_1 = 1 - \nu$ , звідки отримуємо

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - \nu)}, \quad \sigma \in [0, \infty). \quad (3.43)$$

Значення  $\sigma$  також можна використати як міру розсіювання випадкових кутів (у певному сенсі вона нагадує середньоквадратичне відхилення і зазвичай виражається в радіанах).

Ці числові характеристики для порівняння з відповідними характеристиками випадкових величин наведено в табл. 3.2.

**Вибіркові числові характеристики випадкових кутових величин.** За результатами спостережень і попереднього опрацювання даних вимірювань отримують вибірку різниці кутів  $(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M)$ ,  $\varphi_j \in$

Таблиця 3.2. Характеристики випадкових величин

Характеристика	Випадкова величина	Випадковий кут
Випадкові величина, кут	Дійсною випадковою величиною називається функція $\xi(\omega)$ з областю визначення $\Omega = \{\omega\}$ та множиною значень $X \subset R$ така, що для довільного $x \in X$ множина тих $\omega \in \Omega$ , для яких $\xi(\omega) < x$ , є подією $A$ з множини випадкових подій $\mathfrak{F}$ , яка задана на фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	Дійсним випадковим кутом є функція $\Psi(\omega)$ з областю визначення $\Omega\{\omega\}$ та множиною значень $\Theta \subset R$ така, що для довільного $\theta \in \Theta$ дробова частина кута $\psi(\omega) = \Psi(\omega) - [\Psi(\omega)/2\pi] \cdot 2\pi = \Psi(\omega) \bmod 2\pi$ є випадковою величиною



Характеристика	Випадкова величина	Випадковий кут
Характеристична функція	Характеристичною функцією випадкової величини $\xi(\omega)$ називається математичне сподівання випадкової функції $\exp(iu\xi)$ , тобто $f(u) = M e^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux) dF(x)$ , $u \in (-\infty, \infty)$	Характеристичною функцією випадкового кута $\Psi(\omega)$ (послідовність тригонометричних моментів відносно нульового напрямку) називається математичне сподівання функції $\exp(j\rho\Psi)$ : $f_n = M e^{jn\Psi} = \int_0^{2\pi} \exp(in\theta') dG(\theta') = \rho_n \exp(in\mu_n)$ , де $k$ — довільне ціле число; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Квантилі законів розподілу	Розв'язок рівняння $F(\alpha_\gamma) = \gamma$ , де $\gamma$ — задана ймовірність ( $0 < \gamma < 1$ ) відносно $\alpha_\gamma \in (-\infty, \infty)$ , називається квантилем розподілу $F(x)$ рівня $\gamma$ , де $\gamma = \int_{-\infty}^{\alpha_\gamma} p(x) dx$	Розв'язок рівняння $G(\theta'_\gamma) = \gamma$ , де $\gamma$ — задана ймовірність ( $0 < \gamma < 1$ ) відносно $\theta'_\gamma \in [0, 2\pi)$ , називається квантилем розподілу $F(\theta)$ рівня $\gamma$ , де $\gamma = \int_0^{\theta'_\gamma} p(\theta) d\theta$
Модуль тригонометричного моменту	—	Результуючою довжиною вектора, який є математичним сподіванням випадкового вектора ( $\cos \Psi$ , $\sin \Psi$ ), є величина $\rho =  f_1 $
Перший початковий момент (середнє значення)	Математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається число, визначене інтегралом Стілт'єса: $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$	Круговим середнім значенням випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$ , для якого $f_1 = M e^{j\Psi} \neq 0$ , називається кут $\mu_1 = \text{Arg} f_1$
Розкид значень випадкової величини і випадкового кута	Дисперсією $\xi(\omega)$ з функцією розподілу $F(x)$ називається математичне сподівання квадрата відхилення значень $\xi(\omega)$ від її математичного сподівання $M\xi$ : $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF(x)$	Круговою дисперсією випадкового кута $\Psi(\omega)$ з функцією розподілу $G(\theta')$ , називається величина $v = 1 - \rho = 1 -  f_1 $ , яка характеризує відхилення значення випадкового кута від його середнього значення

Закінчення табл. 3.2

Характеристика	Випадкова величина	Випадковий кут
Медіана	Медіаною неперервного розподілу $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ називається таке значення $x = Me$ , для якого однаково ймовірно, чи виявиться випадкова величина більшою або меншою $Me$ , тобто $P(\xi < Me) = P(\xi > Me)$	Круговою медіаною неперервного розподілу на колі $G(\theta')$ випадкового кута $\psi(\omega)$ називається значення кута $\mu_m$ , яке є одним з розв'язків рівняння $Q(\mu_m) = F(\mu_m + \pi) - F(\mu_m) - 0,5 = \int_{\mu_m}^{\mu_m + \pi} p(\theta) d\theta - 0,5 = 0$ , і $Q(\mu_m - 0,5\pi)$ максимально
Мода	Модою називається значення $Mod$ випадкової величини $\xi(\omega)$ , для якого щільність розподілу $p(x = Mod)$ має максимальне значення	Модою називається значення $Mod$ випадкового кута $\psi(\omega)$ , для якого щільність розподілу $p(\theta' = Mod)$ має максимальне значення

$\in [0, 2\pi)$  обсягу  $M$ . Цю вибірку розглядають як реалізацію випадкових кутів, що мають певну неперервну щільність розподілу ймовірностей  $p(x)$ . За значеннями  $(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M)$  вибіркowi числові характеристики різниці фазових характеристик сигналу (ФХС) визначають наступним чином.

Вибірковий тригонометричний момент порядку  $n$  відносно заданого напрямку  $\alpha \in [0, 2\pi)$  визначають за формулою

$$\hat{f}_n(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M e^{iu(\varphi_j - \alpha)} = \hat{a}_n(\alpha) + i\hat{b}_n(\alpha) = \hat{r}_n(\alpha) e^{i\hat{m}_n(\alpha)}, \quad (3.44)$$

а вибіркові косинус- та синус-моменти порядку  $n$  — за формулами

$$\hat{a}_n(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos[n(\varphi_j - \alpha)], \quad \hat{b}_n(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin[n(\varphi_j - \alpha)]. \quad (3.45)$$

Вибіркова характеристична функція — це комплекснозначна послідовність  $(\hat{f}_n(0), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , усі вибіркові тригонометричні моменти якої визначені відносно нульового напрямку  $\alpha = 0$ .

Використання вибіркових тригонометричних моментів у задачах апроксимації розподілів кутових даних за (3.44) розглянуто

в [44], в праці [46] — для визначення відношення сигнал/шум в адитивній суміші гармонічного сигналу та гауссового шуму.

*Вибіркове кругове середнє.* Результат окремого спостереження  $\varphi_j$  можна зобразити відповідним плоским кутом  $\varphi_j$ , якому відповідає на колі одиничного радіуса  $R = 1$  дуга довжиною  $l_j$  між додатною піввіссю абсцис та вектором  $\overline{OP_j}$  (рис. 3.11, а). Вектор  $\overline{OP_j}$  має декартові  $[\cos \varphi_j, \sin \varphi_j]$  і полярні  $(1, \varphi_j)$  координати.

Вимірювання виконують з певним кроком  $2\pi/m$ . Дискретному характеру результатів кутових вимірювань відповідає розбиття кола на  $m$  клас-інтервалів. Тому точки  $P_j$  — це середини клас-інтервалів.

Будь-яка конструктивна характеристика  $L$  кругового середнього, за якою опрацьовуються результати кутових вимірювань, повинна задовольняти умову адитивності:

$$\{L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)\} \pmod{2\pi} \equiv \{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\} \pmod{2\pi}, \quad (3.46)$$

тобто для довільного кута  $v \in [0, 2\pi)$  дробові частини (за модулем  $2\pi$ ) чисел  $\{L(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - v\}$  та  $L(\varphi_1 - v, \dots, \varphi_M - v)$  мають збігатися. Іншими словами, кут, що задається характеристикою  $L(\varphi_1, \dots, \varphi_M)$ , має адитивно залежати від початкового кута  $v$ . Цю вимогу задовольняє оцінка у вигляді вибіркового кругового середнього, що визначається як напрямок суми всіх одиничних векторів  $\overline{OP_1}, \dots, \overline{OP_M}$ .

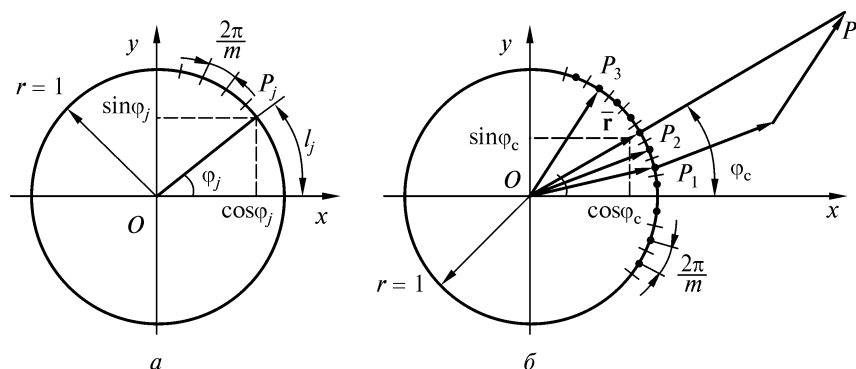


Рис. 3.11. Графічне зображення на колі результату одного вимірювання (а) та усереднення вибірки фазових зсувів об'єму  $M = 3$  (б)

На рис. 3.11, б розглянуто випадок  $M = 3$ . Сумарний вектор  $\overline{OP} = \sum_{j=1}^3 \overline{OP}_j$  має декартові координати  $\left( \sum_{j=1}^3 \cos\varphi_j, \sum_{j=1}^3 \sin\varphi_j \right)$  і характеризується вибірковою круговим середнім кутом  $\varphi_c$ . Фізичний зміст  $\varphi_c$  з точки зору механіки пояснюється таким чином. Усі одиничні вектори закінчуються точками  $P_j$  одиничного кола. Якщо всім цим точкам приписати однакову «масу»  $M^{-1}$ , то координати «центра мас» цієї системи визначатимуться так:

$$C = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos\varphi_j, \quad S = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin\varphi_j. \quad (3.47)$$

Перерахунок координат вектора  $\mathbf{r}$  з декартової системи в полярну виконується відповідно до формул

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad (3.48)$$

$$C = r \cos\varphi_c, \quad S = r \sin\varphi_c. \quad (3.49)$$

Величину  $r$  називають *вибірковою результуючою довжиною* (ВРД) вектора  $\mathbf{r}$ .

Вектори  $\mathbf{r}$  та  $\overline{OP}$  розташовані у просторі під однаковим кутом  $\varphi_c$  до осі  $Ox$ . Значення  $\varphi_c$  обчислюють за формулою

$$\varphi_c = L[S, C] = \arctg S/C + 0,5\pi \{2 - (\text{sign}S)(1 + \text{sign}C)\}. \quad (3.50)$$

Якщо  $r = 0$ , значення  $\varphi_c \in [0, 2\pi)$  однозначно не визначається.

Для  $r > 0$  *вибіркове кругове середнє* (ВКС) значення кута  $\varphi_c$  задовольняє вимогу (3.46), а  $r$  не залежить від початку відліку кутів. Дійсно, якщо кожний з векторів  $\overline{OP}_j$  (див. рис. 3.11, б) повернути у просторі на кут  $\nu \in [0, 2\pi)$ , це призведе лише до повороту вектора  $\mathbf{r}$  у просторі на такий самий кут  $\nu$ , але значення  $r$  не зміниться. Після повороту  $\mathbf{r}$  нові координати кінця вектора визначатимуться так:

$$\overline{C} = r \cos(\varphi_c - \nu), \quad \overline{S} = r \sin(\varphi_c - \nu). \quad (3.51)$$

Неважко пересвідчитись, що

$$\begin{aligned}\bar{C} &= M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - \nu) = r \cos(\varphi_c - \nu), \\ \bar{S} &= M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - \nu) = r \sin(\varphi_c - \nu),\end{aligned}\quad (3.52)$$

тобто  $\varphi_c(\varphi_1 - \nu, \dots, \varphi_M - \nu) \equiv \{\varphi_c(\varphi_1, \dots, \varphi_M) - \nu\} \pmod{2\pi}$ ,

$$r(\varphi_1 - \nu, \dots, \varphi_M - \nu) = r(\varphi_1, \dots, \varphi_M),$$

що і доводить властивість адитивності ВКС фазових зсувів.

Якщо покласти  $\nu = \varphi_c$ , то з урахуванням (3.52) маємо

$$\sum_{j=1}^M \sin(\varphi_j - \varphi_c) = 0, \quad (3.53)$$

Отримане рівняння (3.53) використовують для перевірки правильності визначення  $\varphi_c$ .

Прикладні питання застосування вибіркового кругового середнього розглянуто в [49].

*Вибіркова кругова дисперсія.* Визначимо відхилення в просторі напрямку вектора  $\overline{OP}_j$  від довільного напрямку  $\nu$  як

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_j &= \min \left\{ (\varphi_j - \nu)', 2\pi - (\varphi_j - \nu)' \right\} = \\ &= \pi - \left| \pi - (\varphi_j - \nu)' \right|, \quad \Delta\varphi_j \geq 0,\end{aligned}\quad (3.54)$$

де  $(\varphi_j - \nu)'$  — залишок визначеного за модулем  $2\pi$  кута  $(\varphi_j - \nu)$ ,

$$(\varphi_j - \nu)' = (\varphi_j - \nu) - \left[ (\varphi_j - \nu) / 2\pi \right]^+ 2\pi. \quad (3.55)$$

Зручною формою подання міри розсіювання є функція виду  $f(\Delta\varphi) = 1 - \cos\Delta\varphi = 2\sin^2 \Delta\varphi/2$  кута відхилення  $\Delta\varphi$ , оскільки вона є додатною і монотонною на відрізку  $[0, \pi)$ . Тому величину

$$V(\nu) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [1 - \cos(\varphi_j - \nu)] = \frac{2}{M} \sum_{j=1}^M \sin^2 \frac{\varphi_j - \nu}{2} \quad (3.56)$$

прийнято за вибірку характеристику розсіювання вибірки кутів

$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$  відносно напрямку  $v$ . З виразу (3.56) з урахуванням (3.53) випливає, що вибіркова характеристика розсіювання відносно ВКС  $\varphi_c$  має вигляд

$$V(\varphi_c) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \{1 - \cos(\varphi_j - \varphi_c)\} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos(\varphi_j - \varphi_c) = 1 - r. \quad (3.57)$$

Величину  $V(\varphi_c) \in [0, 1]$  називають *вибірковою круговою дисперсією* (ВКД) вибірки (статистики) кутів  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_M\}$  сигналів. Ця характеристика інваріантна відносно початку відліку кутів.

З виразу (3.56) випливає, що вибір  $v = \varphi_c$  мінімізує характеристику кругового розсіювання. Дійсно, з (3.57) маємо

$$V(v) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \{1 - \cos(\varphi_j - v)\} = V(\varphi) + 2r \sin^2((\varphi_c - v)/2),$$

що і доводить це твердження.

Розглянуті вибіркові оцінки характеристик випадкових кутів зведено в табл. 3.3.

У випадку обчислення ВРД  $r$  за згрупованими в клас-інтервали даними отримуємо зміщену в напрямку менших значень оцінку. Для зменшення зміщення застосовують поправку типу поправ-

Таблиця 3.3. Характеристики випадкових кутів

Найменування статистики	Зміст та визначення статистики
Вибіркове кругове середнє статистики кутів	$\varphi_c = \left\{ \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} [2 - (\text{sign } S) \times (1 + \text{sign } C)] \right\} \bmod 2\pi;$
Вибіркова середня довжина результуючого вектора	$C = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_j; \quad S = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_j$ $r = M^{-1} \sqrt{C^2 + S^2}$
Вибіркова кругова дисперсія статистики кутів	$V = 1 - r$
Кругове стандартне відхилення статистики кутів	$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r}; \quad V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2)$

Найменування статистики	Зміст та визначення статистики
Вибіркова кругова медіана статистики кутів	Куту відповідає точка кола $P$ , діаметр $PQ$ ділить значення статистики навпіл, в околі $P$ маємо максимальну концентрацію значень
Вибіркова мода статистики фазових зсувів сигналів	Куту відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики
Вибірковий круговий розмах статистики кутів	Довжина найменшої дуги статистики, що визначається з варіаційного ряду: $T_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j, j = 1, \dots, M - 1;$ $T_M = 2\pi - \varphi_M + \varphi; W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}$
Вибірковий тригонометричний момент порядку $u$ відносно напрямку $\alpha$ ( $u$ — ціле число)	$T_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M e^{iu(\theta_j - \alpha)} = a_u(\alpha) + ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{im_u(\alpha)};$ $a_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \cos[u(\varphi_j - \alpha)];$ $b_u(\alpha) = M^{-1} \sum_{j=1}^M \sin[u(\varphi_j - \alpha)];$ $r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} = \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$ $m_u(\alpha) = m_u(0) - u\alpha$
Вибіркова характеристика асиметрії статистики фазових зсувів сигналів	$g_1 = \frac{b_2(m)}{V^{3/2}} = \frac{r_2 \sin[m_2(0) - 2m]}{V^{3/2}}$
Вибіркова характеристика ексцесу статистики фазових зсувів сигналів	$g_2 = \frac{a_2(m) - (1 - V)^4}{V^2} = \frac{r_2 \cos m_2(0) - 2n - (1 - V)^4}{V^2}$

ки Шеппарда [24]:  $r_g = rc_g$ , де  $c_g = \pi/m \cdot \sin(\pi/m)$ . Цією поправкою можна знехтувати, якщо  $m > 40$ , оскільки  $c_g(40) \approx 1,001$ . Загальні питання використання кутових статистик у вимірюваннях розглянуто в працях [4, 8, 15], питання моделювання і опрацювання кутових даних — в [18, 20, 32], використання вибіркової кругової медіани — в [12, 14], застосування ВРД для виявлення сигналів ультразвукового неруйнівного контролю — в [8, 9, 11].

### 3.4. МОДЕЛІ ТА МІРИ ВИПАДКОВИХ КУТІВ У ФАЗОВИХ ВИМІРЮВАННЯХ

Моделі та міри випадкових кутів у фазових вимірюваннях розглянуто в працях [30, 49].

*Імовірнісна модель фазових зсувів гармонічних сигналів.* Розглянемо дану задачу в постановці для випадку дискретних вимірювань.

Нехай на інтервалі спостереження  $[0, T_c]$  задано ґратку:

$$S = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad (3.58)$$

де  $n$  — обсяг ґратки, множина елементів якої впорядкована і для неї виконується нерівність  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots < t_n \leq T_c$ .

Елементи ґратки  $S$  розміщені рівномірно і утворюють арифметичну прогресію  $t_j = t_1 + (j-1)\Delta t$ ,  $j = \overline{1, n}$ , де  $\Delta t$  — крок ґратки.

На ґратці  $S$  задано дві функції:

$$\begin{aligned} u_1(t_j) &= U_1 \cos(2\pi f t_j + \varphi), \quad t_k \in S, \quad \varphi \in [0, 2\pi); \\ u_2(t_j) &= U_2 \cos(2\pi f t_j), \end{aligned} \quad (3.59)$$

які є зображенням відповідних аналогових сигналів з дискретним аргументом (3.58). Множина  $S$  є областю визначення функцій (3.59), а множина всіх значень функцій  $\{u_1(t_j), u_2(t_j), j = \overline{1, n}\}$  — множиною їхніх значень. Функції (3.59) належать до лінійного нормованого функціонального простору  $L_n$ , тобто  $u_1(t_j), u_2(t_j) \in L_n$ . Для елементів простору  $L_n$  виконується операція скалярного добутку функцій:

$$(u_m, u_l) = n^{-1} \sum_{k=1}^n u_m(t_k) u_l(t_k) h(t_k), \quad (3.60)$$

де  $m, l$  — номери елементів простору  $L_n$ ;  $h(t_j)$  — вагова функція,  $h(t_j) \geq 0$ . Також задається норма кожного елемента простору  $L_n$ :

$$\|u_m\| = \sqrt{(u_m, u_m)}. \quad (3.61)$$



У просторі  $L_n$  функцій дійсного аргументу існує оператор зсуву:

$$\mathbf{A}_{\Delta t} u_m(t_j) = u_m(t_j + \Delta t) = u_m(t_{j+1}). \quad (3.62)$$

Послідовно застосовуючи оператор зсуву (4.62)  $q$  разів, маємо

$$\mathbf{A}_{\Delta t} \dots \mathbf{A}_{\Delta t} u_m(t_j) = \mathbf{A}_{q\Delta t} u_m(t_j) = u_m(t_j + q\Delta t) = u_m(t_j + \tau), \quad (3.63)$$

де  $\{\tau = q\Delta t, q \in \overline{0, \infty}\}$  — довільний зсув сигналу в часі на множині  $S$ .

Створення квадратурних сигналів потребує виконання умови:  $T/\Delta t = 4s$ , де  $s \in N$ . У цьому випадку синусоїдні послідовності  $u_1(t_j)$ ,  $u_2(t_k) \in$  періодичними з періодом  $4s\Delta t$  для всіх  $t_j \in T$ , наприклад,  $u_{1,2}(t_j) = u_{1,2}(t_j + 4\Delta t)$ , якщо  $s = 1$ .

Розглянемо нормований скалярний добуток сигналів (3.59) із ваговою функцією:

$$h(t_j) = g(t_j - a)g(b - t_j) = \begin{cases} 1, & t_j \in [a, b), \quad a < b, \quad a \in [0, T_c - b + a); \\ 0, & t_j \notin [a, b), \quad b \in (b - a, T_c], \end{cases} \quad (3.64)$$

де  $g(t_j)$  — одинична східчаста функція Хевісайда. Маємо

$$C = \frac{(u_1(t_j), u_2(t_j))}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_k)\|} = \frac{U_1 U_2 \sum_{j=1}^n \cos(2\pi f t_j + \varphi) \cos 2\pi f t_j g(t_j - a) g(b - t_j)}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} = \cos \varphi,$$

де норми функцій  $u_1(t_j)$ ,  $u_2(t_j)$  визначають так:

$$\|u_1(t_j)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a} (u_1(t_j), u_1(t_j))} = \frac{U_1}{\sqrt{2}};$$

$$\|u_2(t_j)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a} (u_2(t_j), u_2(t_j))} = \frac{U_2}{\sqrt{2}}.$$

Застосуємо до функції  $u_2(t_j)$  оператор зсуву  $\mathbf{A}_{\Delta t}$  і розглянемо

нормований скалярний добуток цієї функції з  $u_1(t_j)$ :

$$S = \frac{(u_1(t_j), u_2(t_j + 3g\Delta t))}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} =$$

$$= \frac{U_1 U_2 \sum_{j=1}^n \cos(2\pi f t_j + \varphi) \sin 2\pi f t_j g(t_j - a) g(b - t_j)}{\|u_1(t_j)\| \|u_2(t_j)\|} = \sin \varphi.$$

Пару отриманих в такий спосіб чисел  $C$  і  $S$  можна розглядати як координати одиничного вектора  $\mathbf{z}$ , що починається в точці  $O$  і описує одиничне коло в декартовій системі координат  $xOy$ .

За наявності шумів і завад, які неминуче супроводжують процес вимірювання, отримані значення  $S_{\text{ш}}$  і  $C_{\text{ш}}$  відрізнятимуться від ідеальних значень  $S$  і  $C$ , а побудовані на площині  $xOy$  точки з координатами  $(S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}})$  у загальному випадку не належатимуть одиничному колу, оскільки  $|\mathbf{z}_{\text{ш}}| = \sqrt{S_{\text{ш}}^2 + C_{\text{ш}}^2} \neq 1$ . Для зведення результатів експерименту до одиничного кола виконаємо нормування згідно з формулами

$$\hat{C} = C_{\text{ш}} / \sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}; \quad \hat{S} = S_{\text{ш}} / \sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}. \quad (3.65)$$

Таким чином, встановлено однозначну відповідність між положенням у просторі вектора  $\mathbf{z}_{\text{ш}}$  і фазовим зсувом  $\varphi$  між сигналами (3.59), що для зазначеного випадку дає змогу використовувати ймовірнісну модель випадкових кутів на площині.

Параметри сигналу  $u_1(t_j)$  визначають за формулами

$$\hat{\varphi} = \mathbf{L}[S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}] = \arctg \frac{S_{\text{ш}}}{C_{\text{ш}}} + \frac{\pi}{2} \{2 - [\text{sign}(S_{\text{ш}})] \cdot [1 + \text{sign}(C_{\text{ш}})]\}, \quad (3.66)$$

$$U_1 = \sqrt{2} \|u_1(t_j)\|. \quad (3.67)$$

Під час виконання фазових вимірювань з перетворенням лінійної випадкової величини  $\xi(\omega)$  з областю визначення  $x \in (-\infty, \infty)$  на випадковий фазовий зсув сигналів  $\psi(\omega) = K\xi(\omega) \pmod{2\pi}$  з областю визначення  $\theta \in [0, 2\pi)$ , де  $K$  — коефіцієнт перетворен-

ня, для ймовірнісного опису випадкових фазових зсувів доцільно застосовувати закони розподілів ймовірностей із сім'ї намотаних, які відповідають даному перетворенню. У багатьох випадках розподіл випадкових фазових зсувів задовільно апроксимується намотаним гауссовим розподілом ймовірності. Це припущення можна обґрунтувати з огляду на той факт, що випадковий характер  $\psi(\omega)$  зумовлено дією значної кількості незалежних факторів. Згідно з центральною граничною теоремою на колі закон розподілу суми багатьох випадкових незалежних кутів прямує до намотаного гауссового, який задовільно апроксимується розподілом Мізеса.

**Ймовірнісна модель фазових зсувів випадкових вузькосмугових процесів.** Формування і передача інформаційних сигналів у фазових системах супроводжуються впливом шумів і завад. З урахуванням того, що вхідними ланцюгами систем є лінійні ланки з обмеженою смугою пропускання  $\Delta f \ll f_0$ , вважатимемо, що на вході системи разом з інформаційним сигналом є завада у вигляді вузькосмугового випадкового процесу. У фазометрії [30] значення  $f_0$  вважається відомим і дорівнює частоті опорного, детермінованого сигналу. Вузькосмуговий стаціонарний дійсний випадковий процес можна навести у вигляді

$$\xi(\omega, t) = A_\xi(\omega, t) \cos \Phi_\xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (3.68)$$

де  $A_\xi(\omega, t)$ ,  $\Phi_\xi(\omega, t)$  — відповідно обвідна і фаза (амплітудна і фазова характеристики) процесу  $\xi(\omega, t)$ .

Використання моделі (3.68) відповідає реальним умовам фазовимірювального експерименту. Розглянемо наступну задачу.

На скінченному інтервалі часу  $[0, T_c]$  досліджуються процеси

$$\begin{aligned} \eta(\omega, t) &= u(t) + \xi(\omega, t), \\ u_0(t) &= U_0 \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T_c]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Процес  $\eta(\omega, t)$  є випадковим процесом і визначається як адитивна суміш інформаційного сигналу:

$$\begin{aligned} u(t) &= U \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \\ &= U_c \cos(2\pi f_0 t) - U_s \sin(2\pi f_0 t), \quad U > 0, \quad t \in T_c, \end{aligned} \quad (3.70)$$

та стаціонарного випадкового гауссового процесу  $\xi(\omega, t)$  у вигляді (3.68) з характеристиками  $\mathbf{M}\xi(\omega, t) = 0$ , і  $\mathbf{D}\xi(\omega, t) = \sigma^2$ , який є відгуком вузькосмугової лінійної системи з резонансною частотою  $f_0$  на білий шум. У формулі (3.70)  $U_c = U \cos \varphi$ ,  $U_s = U \sin \varphi$  — квадратурні компоненти сигналу,  $U = \sqrt{U_c^2 + U_s^2}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  — початкова фаза, пов'язана з  $U_c, U_s$  співвідношенням  $\varphi = \mathbf{L}[U_s, U_c]$ .

Випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  належить до класу процесів другого порядку, тобто  $\mathbf{M}\xi^2(\omega, t) < \infty$ ,  $\forall t \in T_c$ , що дає змогу застосувати до нього перетворення Гільберта [6, 49].

Випадковий процес  $\eta(\omega, t)$  має фазу  $\Phi_\eta(\omega, t)$ .

Необхідно побудувати ймовірнісну модель фазового зсуву  $\Delta\varphi(\omega, t) = [\Phi_\eta(\omega, t) - \Phi_0(t)] \bmod 2\pi$  між фазами процесів (3.69), де  $\Phi_0(t) = 2\pi f_0 t$  — фаза опорного сигналу  $u_0(t)$ .

Дослідимо процес  $\eta(\omega, t)$ , який задано виразом (3.69). Випадковий компонент  $\eta(\omega, t)$  — процес  $\xi(\omega, t)$  знаходять за виразом (3.68), в якому функції  $A_\xi(\omega, t)$ ,  $\Phi_\xi(\omega, t)$  однозначно визначаються за допомогою перетворення Гільберта [49].

У збіжні моменти часу випадкові процеси  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_h(\omega, t)$  некорельовані, що впливає з аналізу їх скалярного добутку:

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t) \cdot \xi_h(\omega, t)\} = R_{\xi\xi_h}(0) = 0. \quad (3.71)$$

Оскільки процеси  $\xi(\omega, t)$  та  $\xi_h(\omega, t)$  за умови задачі є гауссовими, то з їх некорельованості випливає їх статистична незалежність.

У разі проходження процесу  $\xi(\omega, t)$  через вузькосмугову лінійну систему з центральною частотою  $f_0$  його фазу можна записати у вигляді

$$\Psi_\xi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \psi(\omega, t), \quad (3.72)$$

а сам процес  $\xi(\omega, t)$  — у вигляді

$$\xi(\omega, t) = \xi_c(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t) - \xi_s(\omega, t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (3.73)$$

де  $\xi_c(\omega, t)$  і  $\xi_s(\omega, t)$  — дійсні незалежні стаціонарні гауссові випадкові процеси з нульовими математичними сподіваннями і дисперсією  $\sigma^2$ :

$$\xi_c(\omega, t) = A(\omega, t) \cos \varphi(\omega, t); \quad \xi_s(\omega, t) = A(\omega, t) \sin \varphi(\omega, t). \quad (3.74)$$

З урахуванням (3.70) і (3.72) вимірювальний сигнал має вигляд

$$\eta(\omega, t) = [U_c + \xi_c(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) - [U_s + \xi_s(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (3.75)$$

Побудуємо гільберт-образ випадкового процесу  $\eta(\omega, t)$ :

$$\eta_n(\omega, t) = [U_s + \xi_s(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) + [U_c + \xi_c(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (3.76)$$

Для переходу від випадкових процесів до випадкових величин розглянемо множини значень процесів (3.75), (3.76) у дискретні моменти часу  $t_j = jT$ ,  $j = \overline{0, T_c/T}$ . Оскільки випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  за умовами задачі є стаціонарним, його складові  $\xi_c(\omega, t)$  і  $\xi_s(\omega, t)$  також є стаціонарними процесами. Тому отримані у фіксовані моменти часу  $t_j$  вибіркові значення  $\xi_c(\omega, t_j)$  і  $\xi_s(\omega, t_j)$  можна розглядати як випадкові величини. Для моменту часу  $t_j$  маємо випадкову величину

$$\eta_j(\omega) = U_c + \xi_c(\omega); \quad \eta_{n,j}(\omega) = U_s + \xi_s(\omega). \quad (3.77)$$

Отримані у збіжні моменти часу пари миттєвих значень випадкових процесів  $\eta(\omega, t)$  і  $\eta_n(\omega, t)$  утворюють випадкові вектори  $\bar{\eta}(\omega) = (\eta_j(\omega), \eta_{n,j}(\omega), j = \overline{0, T_c/T})$ , які відображаються на площині в декартовій системі координат  $xOy$  відрізками прямих ліній. Вектори починаються в центрі системи координат і закінчуються в точках з координатами  $(\eta_j(\omega), \eta_{n,j}(\omega))$ . На рис. 3.12 показано реалізацію  $\rho_j$  випадкового вектора  $\eta$  і позначено окіл радіуса  $3\sigma$ , якому з ймовірністю 0,997 належить множина точок з координатами  $(\eta_j(\omega), \eta_{n,j}(\omega))$  для початкової фази  $\varphi_j = \mathbf{L}[U_s, U_c]$ .

Кут  $\varphi_j = \arg[\rho_j]$  визначає напрямок вектора  $\rho_j$  у просторі  $xOy$ . Його відраховують від осі  $Oy$  в напрямку проти годинникової стрілки.

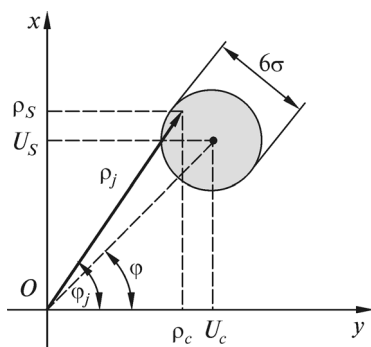


Рис. 3.12. Графічне зображення реалізації випадкового вектора  $\eta(\omega)$

Якщо змінювати значення  $\varphi$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$ , то кут  $\Psi(\omega) = \arg[\eta_j(\omega)]$  набуватиме всіх значень в інтервалі  $[0, 2\pi)$ , а  $3\sigma$ -окіл утворить кільце з внутрішнім радіусом  $U - 3\sigma$ , зовнішнім радіусом  $U + 3\sigma$  і середнім радіусом  $U$ , тобто кільце товщиною  $6\sigma$  (рис. 3.13). Середній радіус  $U$  має зміст математичного сподівання модуля випадкового вектора  $\eta(\omega)$ . Площа кільця становить  $S = 12\pi U\sigma$ . Кінці випадкових векторів  $\eta_j(\omega)$  можуть займати довільне положення в межах площі кільця. Ці вектори характеризуються двома компонентами, отже, ймовірнісну модель треба розглядати як сукупність моделей кутів і модулів випадкових векторів (або їх квадратурних компонентів).

**Ймовірнісна модель кута випадкового вектора.** Розділимо кільце (див. рис. 3.13) на скінченну кількість  $l$  однакових за площею частин. З цією метою спочатку розділимо коло середнього радіуса  $U$  на скінченну кількість  $l$  рівних дуг точками кола  $\pi(2q+1)/l$ ,  $q = 0, (l-1)$ , почавши відлік  $q$  від осі  $Oy$  у визначеному напрямку (на рис. 3.13 літерою  $A$  позначено одну з точок розбиття). Оскільки вузькосмуговий випадковий процес (3.76) допускає діапазон зміни значень обвідної в межах  $\pm 3\sigma$ , то немає сенсу виконувати розбиття кола на дуги, значно менші ніж  $6\sigma$ . Тому кількість інтервалів розбиття виберемо як

**Ймовірнісна модель кута випадкового вектора.** Розділимо кільце (див. рис. 3.13) на скінченну кількість  $l$  однакових за площею частин. З цією метою спочатку розділимо коло середнього радіуса  $U$  на скінченну кількість  $l$  рівних дуг точками кола  $\pi(2q+1)/l$ ,  $q = 0, (l-1)$ , почавши відлік  $q$  від осі  $Oy$  у визначеному напрямку (на рис. 3.13 літерою  $A$  позначено одну з точок розбиття). Оскільки вузькосмуговий випадковий процес (3.76) допускає діапазон зміни значень обвідної в межах  $\pm 3\sigma$ , то немає сенсу виконувати розбиття кола на дуги, значно менші ніж  $6\sigma$ . Тому кількість інтервалів розбиття виберемо як

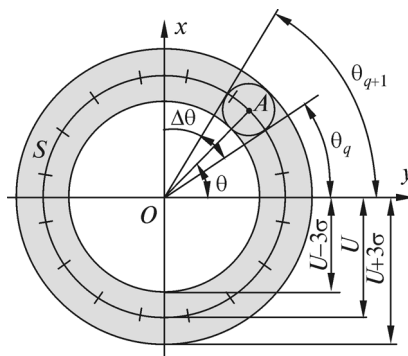


Рис. 3.13. Графічна побудова ймовірнісної моделі аргументу випадкового вектора на площині  $xOy$

найближче ціле до значення  $\pi R/\sigma$  число. Вказані точки утворюють скінченне розбиття  $D_\theta$  кола радіуса  $U$ .

Якщо з'єднати початок координат з точками розбиття кола, то утворюються центральні кути величиною  $\Delta\theta$ . Цим кутам відповідає розбиття кільця на  $l$  однакових частин площею  $s = 6\Delta\theta U\sigma$ .

Зафіксуємо елементарну подію  $\omega_q$ , якій відповідає така сукупність умов: для довільних дійсних  $\theta_q$  та  $\theta_{q+1}$  таких, що  $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$ , в інтервалі  $[\theta_q, \theta_{q+1})$  знайдеться число  $\theta$ , порівнянне за модулем  $2\pi$  зі значенням  $\psi(\omega)$ . Це твердження формально записують у вигляді такого виразу:

$$\omega_q = \left\{ E_{\psi(\omega)} : \psi(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1}) \right\}, \quad q = \overline{1, l-1}, \quad (3.78)$$

де  $E_{\psi(\omega)}$  — множина значень  $\psi(\omega)$ .

Таким чином, континууму значень напрямків  $\arg[\eta(\omega)]$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$  поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій  $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$ , яку отримано розбиттям  $D_\theta$  кільця на скінченне число  $l$  однакових частин. Операції з усіма підмножинами  $\Omega$  утворюють алгебру  $\mathcal{B} = \beta(D_\theta)$ .

Для завершення побудови моделі задамо ймовірності  $P_q$  подій  $\omega_q \in \Omega$ . З урахуванням циклічної природи кутів маємо

$$P_q = \begin{cases} P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q; \\ P\{0 \leq \psi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} + P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \psi < 2\pi\}, & \theta_{q+1} < \theta_q. \end{cases} \quad (3.79)$$

Для ймовірностей (3.79) виконується умова нормування:  $\sum_{q=0}^{l-1} P_q = 1$ .

Ймовірність довільної події  $B \in \mathcal{B}$  у загальному вигляді записують так:

$$P(B) = \sum_{\{i: \omega_q \in B\}} P(\omega_q). \quad (3.80)$$

Для обчислення ймовірностей (3.79) залишається вибрати щільність розподілу ймовірності випадкових кутів, що породжує

ймовірнісну міру. Функція  $p(\theta)$  обґрунтовується для конкретних вимірювань.

Ймовірнісний простір  $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ , де  $P = P(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$  — ймовірність події  $B$ , задає область визначення моделі кутових спостережень сигналів під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині  $\Omega$  будується ймовірнісна міра  $s(\omega_q)$ , яка дорівнює довжині дуги середнього радіуса —  $s(\omega_q) = 2\pi qU/l$ ,  $q = \overline{1, (l-1)}$ . Отже,  $s(\omega_q)$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$  є функцією від розбиття  $D_\theta$ . Множина подій  $\Omega$  відображається на числову множину  $x(\omega) = \{s(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}$ ,  $x(\omega) \in X$ . Підмножини  $x(X)$  утворюють алгебру  $\mathcal{B}$ .

Для обчислення ймовірності  $P(A \in \mathcal{B})$  довільних подій  $A$  необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу кутів. Оскільки випадковий вектор  $\eta(\omega)$  розглядається як вектор з незалежними гауссовими квадратурними компонентами, розподіл фази такого вектора задовільно апроксимується намотаним гауссовим законом розподілу ймовірності або розподілом Мізеса [49].

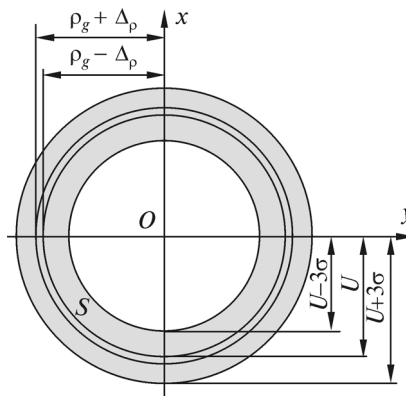
Отриманий ймовірнісний простір  $\{X, \mathcal{B}, P_\psi\}$ , де  $P_\psi = \{P(A), A \in \mathcal{B}\}$ , визначає множину значень випадкового кута  $\psi(\omega)$ .

**Ймовірнісна модель модуля випадкового вектора.** Усі випадкові вектори мають модулі, що належать інтервалу  $|\rho_j(\omega)| \in (U + 3\sigma, U - 3\sigma)$ , тобто закінчуються в площині кільця, зображеного на рис. 3.13. Побудуємо систему  $(m-1)$  концентричних кіл з радіусами  $\rho_g = U + 3\sigma(2g/m - 1)$ ,  $g = \overline{1, (m-1)}$ . Суміжні кола разом з внутрішнім і зовнішнім колами утворюють систему  $m$  кругових кілець завтовшки  $2\Delta\rho = 6\sigma/m$  і середнім радіусом  $\rho_{g, \text{ср}} = U + 3\sigma((2g+1)/m - 1)$ ,  $g = \overline{1, (m-1)}$ . Два суміжні концентричні кола показано на рис. 3.14.

Виділимо елементарну подію  $\omega_g$ , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних  $\rho_g$  та  $\rho_{g+1}$  таких, що  $\rho_{g+1} \in [U - 3\sigma, U + 3\sigma)$ ,  $g = \overline{0, (m-1)}$ , в інтервалі  $[\rho_g, \rho_{g+1})$



Рис. 3.14. Розбиття кільця системою концентричних кіл



знайдеться число  $\rho$ , яке дорівнює  $\eta(\omega) = |\eta(\omega)|$ , тобто дорівнює довжині вектора  $\eta(\omega)$ . Це твердження можна записати так:

$$\omega_g = \{E\eta : \eta(\omega) = \rho, \rho \in [\rho_g, \rho_{g+1})\},$$

$$g = \overline{0, (m-1)}. \quad (3.81)$$

Таким чином, континууму значень модулів  $|\eta(\omega)| \in [U - 3\sigma, U + 3\sigma)$  поставлено у відповідність скінченну множину  $\Omega_\rho = \{\omega_g, g = \overline{0, (m-1)}\}$  елементарних подій, яку отримано розбиттям  $D_\rho$  кільця завтовшки  $6\sigma$  на скінченне число  $m$  кілець однакової товщини  $6\sigma/m$ . Усі можливі об'єднання  $\omega_g$  разом з порожньою множиною утворюють алгебру  $\mathfrak{R}_\rho = \beta(D_\rho)$ .

На завершення побудови моделі залишилось задати ймовірності  $P_g$  подій  $\omega_g \in \Omega_\rho$ . Ці ймовірності визначають за формулою

$$P_g = P[\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}], \quad g = \overline{0, (m-1)}. \quad (3.82)$$

Ймовірність події  $B_\rho \in \mathfrak{R}_\rho$  у загальному вигляді знаходять як

$$P(B_\rho) = \sum_{\{j: \omega_j \in B_\rho\}} P(\omega_j). \quad (3.83)$$

Для ймовірностей (3.82) виконується умова нормування  $\sum_{g=0}^{m-1} P_g = 1$ .

Для обчислення ймовірностей (3.82) необхідно ввести функцію, яка породжує ймовірнісну міру. Якщо щільність ймовірності  $p_\rho(x)$  модуля випадкового вектора відомо, ймовірність (3.82) обчислюють як

$$P_\rho(\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}) = \int_{\rho_g}^{\rho_{g+1}} p_\rho(x) dx. \quad (3.84)$$

Ймовірнісний простір  $\{\Omega_\rho, \mathfrak{R}_\rho, P_\rho\}$ , де  $P_\rho = P(B_\rho)$ ,  $B_\rho \in \mathfrak{R}_\rho$  — ймовірність події  $B_\rho$ , задає множину значень моделі для модуля випадкового вектора.

На множині  $\Omega_\rho$  побудуємо ймовірнісну міру  $\rho(\omega_g)$ , яка визначається величиною середнього радіуса  $\rho_{g, \text{сер}} = U + 3\sigma(2g + 1/m - 1)$ ,  $g = \overline{1, (m-1)}$ . Отже,  $\rho(\omega_g)$ ,  $g = \overline{0, (l-1)}$ , є функцією розбиття  $D_\rho$ . Тоді множина подій з  $\Omega_\rho$  відображається на числову множину  $x(\omega) = \{\rho(\omega_g), g = \overline{0, (l-1)}\}$ ,  $x(\omega) \in X$ . Підмножини  $X$  утворюють алгебру  $\mathcal{B}_\rho$ .

Для отримання ймовірності  $P(A \in \mathcal{B}_\rho)$  довільних подій  $A$  необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу ймовірностей модулів випадкового вектора.

Оскільки випадковий вектор  $\eta_j(\omega)$  розглядається як вектор з незалежними гауссовими квадратурними компонентами, розподіл модуля вектора має щільність розподілу ймовірності узагальненого розподілу Релея [50].

Отримані ймовірнісні простори  $\{X, \mathcal{B}_\varphi, P_\varphi\}$  та  $\{X, \mathcal{B}_\rho, P_\rho\}$  визначають ймовірнісну модель для вимірювання фазових зсувів вузькосмугових випадкових процесів.

## **МОДЕЛІ ТА МІРИ ПРИ ДІАГНОСТУВАННІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Однією з найважливіших експлуатаційних характеристик енергетичного обладнання є його надійність. Головним джерелом інформації про його технічний стан є результати моніторингу, що базуються на вимірюванні фізичних процесів, які супроводжують його роботу. Отже, саме вимірювання діагностичних сигналів надають первинну інформацію для подальшого визначення технічного стану і, як наслідок, надійності обладнання, що діагностується.

Відомо [4, 72, 96], що точність та вірогідність результатів діагностування технічних об'єктів залежить від багатьох чинників і не в останню чергу від якісно сформованих навчальних сукупностей, що за різними параметрами і характеристиками відповідають певним технічним станам досліджуваних об'єктів. Процес побудови таких навчальних сукупностей (мір) ґрунтується на точності результатів вимірювання діагностичних сигналів, а також залежить від інших факторів (коректний підбір множини можливих дефектів, врахування режимів роботи досліджуваного обладнання, рівень і характер завад тощо).

У розділі 4 розглянуто формування діагностичних сигналів у працюючому електроенергетичному обладнанні. Наведено результати побудови математичних моделей формування навчальних сукупностей (мір), що відповідають різним технічним станам та режимам роботи досліджуваного електроенергетичного обладнання (ЕО). Розглянуто приклади побудови розв'язувальних правил з діагностики та класифікації різних видів дефектів в окремих вузлах ЕО.

### **4.1. ФІЗИЧНІ ПРОЦЕСИ ФОРМУВАННЯ ДІАГНОСТИЧНИХ СИГНАЛІВ**

Розв'язання задач функціональної або тестової діагностики передбачає конкретизацію об'єкта дослідження. Це пов'язано зі специфікою функціонування та експлуатації цих об'єктів. Роз-

глянемо питання формування інформаційних сигналів та їх використання для діагностування ЕО.

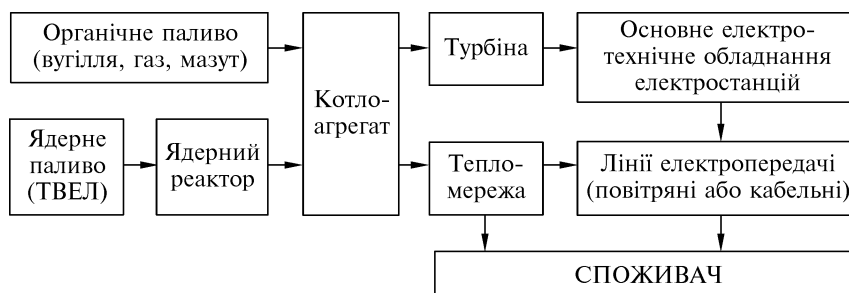
Основне *енергетичне обладнання* [4, 96] — це обладнання, яке призначене для вироблення (електричної енергії, пари, гарячої води), перетворення (хімічної енергії палива, що згоряє, на теплову енергію пари або гарячої води), транспортування або передачі механічної енергії енергоносія (води, газу, пари, стисненого повітря, кисню, азоту і т. д.).

Головне енергетичне обладнання умовно поділяють на:

- *тепломеханічне*: котли парові і водогрійні; котли-утилізатори (котли-охолодники); турбіни парові та газові; допоміжне обладнання котельних установок; блоки поділу повітря; холодильні установки; обладнання газорозподільних станцій; компресори відцентрові і поршневі; нагнітачі (повітродувки, газодувки і ексгаустери), коксові нагнітачі; димососи; насоси; ємності, що працюють під тиском (енергетичні); трубопроводи води (питної, гарячої, технічної, циркуляційної, шламів, водозниження), газу (природного, доменного, коксового та ін.), пари, теплофікації, повітря, кисню, азоту, водню та інших середовищ; канали зливових, технологічних, стічних вод; щогли й опори, лінії електропередач; арматура (запірна, регулювальна), площадки обслуговування арматури трубопроводів, розташованих на висоті;

- *електротехнічне*: генератори; двигуни; трансформатори; синхронні компенсатори; комутаційна апаратура; лінії електропередач та інше мережеве обладнання; засоби керування захистом та автоматикою; засоби обчислювальної техніки.

Узагальнену схему технологічного процесу виробництва, розподілу і споживання електричної і теплової енергії наведено на рис. 4.1.



**Рис. 4.1.** Узагальнена схема технологічного процесу виробництва, розподілу та споживання електричної і теплової енергії

Особливу увагу приділимо питанням вимірювання фізичних процесів і діагностування деяких видів електротехнічного обладнання. Водночас зазначимо, що фізичні процеси, які виникають під час роботи турбін, приєднаних до електричного генератора, багато в чому схожі, оскільки мають сполучені обертові частини.

Відомі і практично використовуються різні методи діагностування ЕО [4, 18, 72, 96, 114, 115, 132]. Ці методи базуються на визначенні фізичного процесу, який породжує діагностичний сигнал, що вимірюється, для отримання інформації про технічний стан досліджуваного вузла.

Технічну діагностику об'єктів електроенергетики зазвичай здійснюють методами неруйнівного контролю. Неруйнівний контроль залежно від фізичних явищ, на яких він заснований, поділяють на такі види (ДСТУ 2865-94): магнітний, електричний, вихрострумний, радіохвильовий, тепловий, оптичний, радіаційний, вібраційний, акустичний, з проникними речовинами та ін.

У монографії як головні джерела отримання діагностичної інформації розглянуто вібраційні діагностичні сигнали, що виникають у вузлах досліджуваного ЕО. Ці сигнали вимірюються як безпосередньо на працюючому устаткуванні (функціональна діагностика), так і на устаткуванні, що знаходиться в неробочому стані. В останньому випадку діагностування здійснюється за допомогою спеціальних, переважно ударних впливів (тестова діагностика). Зупинимось на дослідженні діагностичних сигналів, що виникають у вузлах працюючих електричних машин (ЕМ).

З досвіду експлуатації головною причиною аварій і ремонтів ЕМ є *порушення ізоляції* як між витками, так і між обмоткою і корпусом. Другим після обмотки за кількістю відмов є підшипниковий вузол [1, 10, 11, 16, 23]. Здебільшого відмови генераторів і електричних двигунів відбуваються через пошкодження обмоток (85—95 %). Від 2 до 5 % ЕМ відмовляють через пошкодження підшипників. На решту вузлів (щітково-колекторний вузол, система вентиляції та ін.) припадає 1—2 % відмов. Тому акцентуємо увагу на питаннях діагностування підшипників кочення та шихтованого магнітопроводу (ШМ), оскільки саме в пазах ШМ розташована обмотка ЕМ.

Виокремимо конкретні вузли, в яких передбачається вимірювання діагностичних сигналів, а також визначимо найінформативніші фізичні процеси, що надасть змогу з певною достовірністю діагностувати технічний стан ЕМ.

Для ЕМ, особливо машин малої потужності, характерна велика різноманітність їх типів [14, 26, 37, 88, 92]. Кожний тип

має свої слабкі вузли і вимагає особливого підходу під час розробки моделі діагностичних сигналів і діагностичної інформаційно-вимірювальної системи (ІВС). У більшості випадків конструкції ЕМ далекі від дотримання принципу рівної надійності окремих вузлів. Наприклад, в асинхронних двигунах головним джерелом відмов є обмотка статора [26, 37]. У машинах постійного струму слабе місце — щітково-колекторний вузол. В ЕМ малої потужності, особливо високошвидкісних, значна кількість відмов пов'язана з підшипниками кочення.

На результати діагностики вузлів ЕМ істотно впливають умови їх експлуатації і режими роботи. Так, для машин авіаційного застосування [14] найістотнішою вимогою є безвідмовність, тобто мала вірогідність випадкових несправностей; для енергетичних машин [26, 92] — значний ресурс і довговічність.

До головних вузлів типової ЕМ, які підлягають діагностуванню, належать [13, 14, 26, 37, 88, 92, 109, 130]: обмотки ротора і статора, шихтований магнітопровід ротора і статора, підшипникові вузли з підшипниками кочення, станина і місця її кріплення до фундаменту, щітково-колекторний вузол, елементи системи охолодження (крильцівка вентилятора, повітропровідні канали або канали для циркуляції охолоджувальної рідини та інше).

Для отримання інформації про технічний стан вузлів електротехнічного обладнання використовуються різні процеси, що виникають у вузлах ЕО під час їх роботи, а саме — їхні числові характеристики (параметри). Для діагностики конкретних вузлів ЕМ використовують такі фізичні процеси та їхні параметри і характеристики:

- *обмотки*: електричний опір міжвиткової ізоляції; температура поверхні обмоток; величина магнітної індукції;
- *шихтований магнітопровід*: вібрації (переміщення, швидкість, прискорення) лобових частин; величина магнітної індукції; температура поверхні магнітопроводу;
- *підшипниковий вузол*: вібрації (переміщення, швидкість, прискорення) підшипникового щита; температура підшипникового щита;
- *станина і місця її кріплення до фундаменту*: акустична емісія; вібрація станини;
- *щітково-колекторний вузол*: перехідний опір (провідність) ковзного контакту; вібрації (переміщення, швидкість, прискорення) щіткотримача; температура щіткотримача;

- *елементи системи охолодження ЕМ*: аеродинамічний шум крильцівки вентилятора; вібрація поверхонь циркуляційних каналів для переміщення холодоагенту ЕМ.

Отже, майже для всіх вузлів ЕМ як інформаційний діагностичний сигнал використовуються їхні *вібрації*. *Температура* поверхонь цих вузлів надає додаткову інформацію щодо їхнього технічного стану. Для діагностування масивних вузлів (станина) ЕМ, що знаходяться під впливом значних електродинамічних навантажень, використовуються процеси *акустичної емісії*.

Стисло розглянемо деякі питання, пов'язані з первинним дослідженням (вимірюванням) зазначених вище процесів, які щодо розв'язання завдань діагностики ЕМ є діагностичними сигналами.

**Вібрації електричних машин.** До збурювальних впливів, що викликають вібрації ЕМ, належать:

- електромагнітні сили;
- сили, зумовлені роботою підшипників кочення;
- аеродинамічні сили;
- сили, зумовлені механічною незбалансованістю роторів;
- сили, зумовлені роботою щітково-колекторного вузла.

Інтенсивність вібрацій за рахунок *електромагнітних сил* зумовлена здебільшого головною частотою обертового магнітного поля [109, 114, 115]. Частоти їх вібрацій зосереджені в діапазоні подвоєної частоти мережі живлення. Збурювальні електромагнітні сили, що діють в повітряному проміжку ЕМ, можуть бути зображені у вигляді силових хвиль синусоїдної форми, кожна з яких має власну частоту й амплітуду, тобто система сил, що збурює вібрації, має полігармонічний характер і є переважно детермінованою.

Особливий вплив на характер вібрацій всієї ЕМ надають *вібрації підшипників кочення*. У випадку установки акселерометрів на досліджуваних вузлах ЕМ (корпус, підшипниковий щит, щітково-колекторний вузол та ін.) вимірюються реалізації випадкового процесу, який являє собою адитивну суміш вібрацій, породжуваних різними збурювальними силами. Тому істотним моментом діагностування того чи іншого вузла ЕМ є вибір місць розташування акселерометрів. Наприклад, у випадку діагностування підшипників кочення акселерометри зазвичай розташовують на підшипникових щитах, а якщо діагностується стан пресування шихтованого магнітопроводу — на притискній плиті статора [4, 109].

*Аеродинамічний шум* прямо пропорційно пов'язаний із збільшенням кількості охолоджувального повітря, яке підводиться до

ЕМ для відводу тепла, що виділяється. Виникнення аеродинамічного шуму зумовлено [13, 109]:

- роботою вентилятора, в якому відбувається розсічення повітряного струменя крайками лопаток і диском вентилятора;
- обертанням ротора, в результаті чого відбувається зрив вихорів з його поверхні від розтину повітряного струменя головками обмоток ротора;
- повітряним потоком, спричиненим зривом вихорів з нерухомих перешкод у вентиляційних шляхах;
- періодичним коливанням тиску на окремих ділянках аеродинамічного ланцюга, а також пульсаціями потоку повітря, що виходить з радіальних вентиляційних каналів ротора і входить в радіальні вентиляційні канали статора.

*Вібрації ЕМ, спричинені дисбалансом ротора*, виникають на частотах, кратних частоті обертання, і мають переважно детермінований характер. Головні причини, що породжують дисбаланс ротора: неякісне балансування ротора в збірці, тепловий перегрів, наявність внутрішніх залишкових напружень у бочці ротора від термомеханічної обробки поковки, роз'єднання кріплення посадки заліза ротора на вал [4, 13, 109, 114, 115, 131].

*Шум і вібрації щітково-колекторного апарату* зумовлені здебільшого такими причинами технологічного і конструктивного характеру: технічним станом колектора, пов'язаним з виступом окремих пластин і прокладок, биттям колектора; фізичними процесами, що відбуваються в ковзному контакті; поганим станом щіток і щіткотримача (перекіс щітки, неприпустимі величини зазорів між щіткою і щіткотримачем, недостатній тиск на щітку та ін.); режимом роботи ЕМ [13, 109].

Наведені в [109] результати досліджень показують, що частотний діапазон віброакустичних процесів, зумовлених роботою щітково-колекторного апарату, коливається від 1 до 8 кГц, а спектральний склад цих процесів несуттєво залежить від частоти обертання.

#### **4.2. МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ СУКУПНОСТЕЙ (МІР) ДЛЯ ДІАГНОСТУВАННЯ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ**

Сучасний етап розвитку технологій, які застосовуються в енергетичному виробництві, характеризується суттєвим збільшенням інформаційного обміну між елементами енергосистеми на всіх її ієрархіч-



них рівнях. Електроенергетичні системи (ЕС) розвинутих країн світу переходять до використання інтелектуальних мереж, побудованих на базі концепції Smart Grid, що висуває нові вимоги і до засобів забезпечення надійності як енергосистеми в цілому, і до її компонентів. Постає необхідність у формуванні цілісної багаторівневої системи керування, яка забезпечує високий рівень автоматизації та надійності всієї ЕС, охоплює виробників електроенергії, передавальні та розподільні мережі, споживачів. Важливе місце посідає отримання актуальної інформації про фактичний стан кожного елемента електричної мережі (ЕМ) та обмін цією інформацією між багатьма учасниками, що в сукупності забезпечує підвищення надійності ЕС у цілому.

Одним з головних завдань в електроенергетиці є розроблення методів та технічних засобів моніторингу для діагностики стану окремих пристроїв ЕС у реальному часі, забезпечення узагальнення такої діагностичної інформації, виділення з великого масиву даних тієї інформації, що є критично важливою для системи в цілому, та передачу її на вищий рівень ієрархії [69, 90].

Реалізувати окреслену мету можна створенням інтелектуальної розподіленої багаторівневої системи моніторингу стану та діагностування електроенергетичних об'єктів (ЕЕО).

Під час практичного використання таких систем, які ґрунтуються на попередньому навчанні та орієнтовані на використання Smart Grid технологій, виникають питання, пов'язані з принципами побудови навчальних сукупностей та подальшою організацією їх застосування для визначення технічного стану певного енергетичного об'єкта або його вузла. Зазначимо, що системи моніторингу і діагностування, побудовані за Smart Grid технологією, мають працювати у режимі реального часу, тобто така система повинна оперативно знаходити у банку навчальних сукупностей відповідну сукупність, яка містить інформацію про вид дефекту цього об'єкта і про режим його роботи.

Розглянемо питання розроблення моделей формування просторів діагностичних ознак (мір), що відповідають різним технічним станам вузлів ЕО, яке працює у різних режимах (швидкість обертання ротора ЕМ, температура вузлів, що діагностуються, різні ступені електродинамічного та механічного навантаження та ін.).

У випадку проведення функціональної діагностики під час формування навчальних сукупностей виникає задача вибору діагностичних просторів. У сучасній математиці «... *простір* — це логічно мислена форма (або структура), яка слугує середовищем,

де здійснюються інші форми та ті чи інші конструкції ...» [67]. У нашому випадку під *простором* будемо розуміти *множину будь-яких об'єктів*, які називають його точками; ними можуть бути геометричні фігури, функції, стан фізичної системи та ін.

Як координати діагностичних просторів зазвичай обирають параметри або функціональні характеристики діагностичних сигналів, які виявилися найчутливішими до зміни технічного стану досліджуваних об'єктів [4, 16, 59, 72]. Мірність діагностичного простору безпосередньо пов'язана з кількістю координат, за якими з допомогою сенсорів здійснюється вимірювання діагностичних сигналів.

Позначимо простір діагностичних ознак через  $\Omega$ . У разі вибору статистичних діагностичних моделей як сукупності діагностичних ознак до складу  $\Omega$  зазвичай входять певні статистичні параметри і характеристики, які є найінформативнішими до виявлення та класифікації різних видів дефектів у вузлах ЕО.

Параметри та характеристики діагностичних сигналів  $\xi(\omega)$  можна отримувати, розглядаючи їх як реалізації випадкових процесів або полів:

$$\begin{array}{l} \nearrow \xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T, \\ \xi(\omega) \\ \searrow \xi(\omega, r, t), \quad \omega \in \Omega, \quad r(x, y, z), \quad t \in T. \end{array} \quad (4.1)$$

З урахуванням такого уявлення про вимірювання діагностичних сигналів схематичне зображення формування діагностичного простору показано на рис. 4.2. У верхній частині рис. 4.2 наведено  $\Omega$  — простір сукупності діагностичних ознак, які визначаються відповідними статистичними параметрами та характеристиками. Результати теоретичних і експериментальних досліджень показали, що серед таких параметрів найінформативнішими є початкові  $\nu_j$  та центральні  $\mu_j$  моменти (комулянти)  $j = \overline{1, n}$  до  $n$ -го порядку включно, а серед характеристик — кореляційна функція  $R(\tau)$ , спектральна щільність потужності  $S(f)$ , щільність розподілу ймовірностей  $p(x)$  та характеристична функція  $f(t, u)$  [4, 15, 59, 72, 96].

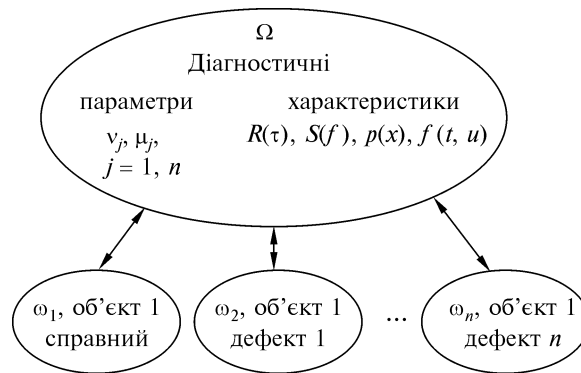


Рис. 4.2. Схематичне зображення формування діагностичного простору

Визначальним моментом діагностування технічного стану вузлів ЕО є класифікація певних видів дефектів, які можуть виникати у досліджуваних вузлах ЕО. Зазначимо, що важливим моментом під час формування навчальних сукупностей таких дефектів є вибір певного об'єкта діагностування. Саме від вибору об'єкта (або вузла, що входить до його складу) залежить інформативність тих чи інших діагностичних ознак. У нижній частині рис. 4.2 схематично наведено принцип побудови підпросторів сукупностей діагностичних ознак  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , що відповідають справному стану об'єкта або наявності певних видів дефектів (дефект 1, дефект 2, ... , дефект  $n$ ) та входять до складу простору  $\Omega$ :

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Omega. \quad (4.2)$$

Наведену сукупність підпросторів будують окремо для кожного з об'єктів діагностування. Умовно на рис. 4.2 ці підпростори побудовані для об'єкта 1, за який може бути обраний будь-який об'єкт ЕО, наприклад, потужні роторні ЕМ, трансформатори, двигуни власних потреб тощо.

Наступним кроком створення навчальних сукупностей є умовне розбиття вибраного об'єкта діагностування на окремі складові (вузли). Наприклад, головними елементами для роторних ЕМ є обмотка, щітково-колекторний вузол, підшипники кочення (або ковзання для потужних електричних машин), вузол охолодження тощо. На рис. 4.3 показано приклад формування таких сукупностей  $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3$  для окремих вузлів ЕМ, а саме обмот-

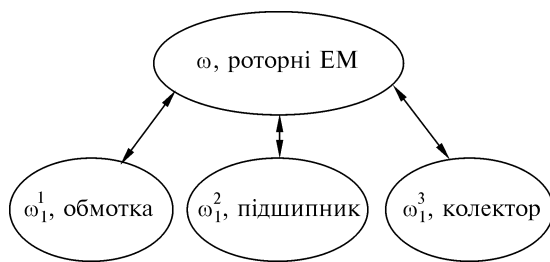


Рис. 4.3. Приклад формування мір для окремих вузлів роторних ЕМ

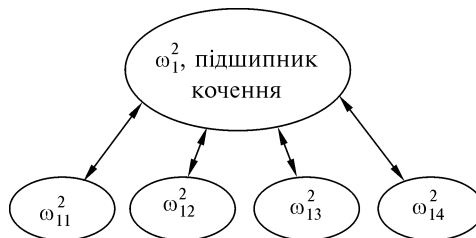
ки, підшипників кочення та щітково-колекторного вузла, на які припадає близько 95 % відмов [4, 26].

Для детальнішого врахування виду дефекту для кожного із вказаних вузлів можна виконати подальший поділ підпросторів  $\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3$  на підпростори, що враховують найтипівіші дефекти для досліджуваного вузла. На рис. 4.4 наведено приклад формування навчальних сукупностей (мір) для найтипівіших дефектів підшипників кочення ЕМ. До таких дефектів, зазвичай, відносять перекіс зовнішнього кільця, відсутність мастила, дефект (пітинг) доріжки внутрішнього або зовнішнього кільця, поломку сепаратора [4, 59, 133]. Перерахованим дефектам відповідають підпростори  $\omega_{11}^2, \omega_{12}^2, \omega_{13}^2$  та  $\omega_{14}^2$  на рис. 4.4.

Аналогічним чином здійснюється формування навчальних сукупностей для інших вузлів роторних ЕМ. Кількість сукупностей, що формується по кожному з вузлів ЕМ, визначається типами дефектів, за якими треба проводити діагностування певного вузла ЕМ.

Наведений підхід формування навчальних сукупностей (мір) передбачає практичне використання у системах моніторингу і діагностики модулів, побудованих за технологією Smart Grid. Такі системи за наявності попередньо сформованих навчальних сукупностей забезпечують отримання діагностичної інформації у реальному часі. А це, у свою чергу, залежно від технічного стану ЕО

Рис. 4.4. Приклад формування мір (навчальних сукупностей) для типових дефектів підшипників кочення ЕМ



або його вузлів, наявності та ступеня катастрофічності виявлених дефектів дає змогу аргументовано виносити рішення про подальшу експлуатацію досліджуваних об'єктів.

Суттєвим моментом формування банку даних з навчальних сукупностей (мір) для діагностування ЕО є врахування режимів його роботи (швидкість обертання ротора ЕМ, температура вузлів, що діагностуються, різні ступені електродинамічного та механічного навантаження тощо). Це пов'язано з тим, що у випадку роботи системи моніторингу і діагностики ЕО у рамках концепції Smart Grid передбачається одержання оперативної інформації про стан цього обладнання у реальному часі, що також вимагає врахування режиму роботи ЕО для відповідного моменту (або проміжку) часу. Вирішити це завдання можна створенням динамічного банку навчальних сукупностей, які являють собою діагностичні простори, побудовані для певних технічних станів досліджуваних вузлів ЕО і для певних режимів їх роботи.

Якщо у сформованих навчальних сукупностях для певного об'єкта водночас врахувати і множину можливих дефектів, і режими їх роботи, то сформовану множину діагностичних просторів можна записати у матричній формі:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k1} & \omega_{k2} & \dots & \omega_{kn} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

У наведеній формі (4.3) підпростори, що розташовані за рядками, відповідають однаковим режимам, у яких експлуатується досліджуване ЕО, а кожний стовпчик відповідає певному технічному стану цього вузла. У сукупності підмножин  $\omega_{kn}$  індекс  $j = \overline{1, k}$  позначає певний режим роботи ЕО, а індекс  $p = \overline{1, n}$  — певний вид дефекту.

Оскільки в системах моніторингу і діагностики, що працюють в рамках концепції Smart Grid, здійснюється двосторонній обмін інформацією між об'єктом діагностування і оператором, до останнього одразу надходить інформація про технічний стан обладнання і режим його роботи. Відповідно, з банку навчальних сукупностей системи здійснюється вибір відповідного еталону (діагностичний підпростір  $\omega_{kn}$ ) для подальшого порівняння та прийняття рішення про технічний стан досліджуваного вузла.

Ілюстративна схема побудови діагностичних просторів згідно з матрицею (4.3) має досить складний вигляд і в монографії не розглядається.

Як було зазначено, у рамках застосування концепції Smart Grid передбачається проводити обслуговування та ремонт ЕО за його фактичним станом. Це можливо реалізувати, маючи попередньо сформовані навчальні сукупності як за можливими видами дефектів вузлів ЕО, так і за режимами їх роботи. Тобто для оперативного вибору певного еталону системі моніторингу необхідно майже миттєво мати інформацію про технічний стан та режими роботи досліджуваного об'єкта ЕО. Це може бути реалізовано на базі двостороннього обміну інформацією між вузлом, який діагностується, та центральною системою діагностування [14], що передбачено технологією Smart Grid.

### **4.3. ПОБУДОВА ДІАГНОСТИЧНИХ ПРОСТОРІВ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИМІРЮВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ**

Імовірнісні моделі діагностичних сигналів, обґрунтовані за результатами їх аналізу діагностичні ознаки, реальні електроенергетичні об'єкти і експериментальні випробувальні стенди, а також лабораторні зразки різних вузлів електротехнічного обладнання — необхідні складові, що дають змогу перейти безпосередньо до експериментів з діагностування таких об'єктів [4, 15, 59, 114]. Експериментальне дослідження запропонованих діагностичних ознак виконується на прикладі вібродіагностики підшипникових вузлів ЕМ, стану пресування пакета заліза шихтованого магнітопроводу, отримання характеристик вібрацій головного вала вітроелектричного агрегата (ВЕА), який працює у різних режимах навантаження.

Стисло опишемо випробувальні установки та об'єкти, на яких здійснювались експериментальні дослідження.

У експериментах з вібродіагностики підшипників кочення на експериментальній установці та дослідженні вібрацій головного вала вітроелектричного агрегата використовувався лабораторний зразок [4, 59] інформаційно-вимірювальної системи (ІВС) *функціональної* вібродіагностики, а для діагностування стану пресування шихтованого магнітопроводу — ІВС *тестової* віброударної діагностики [4].

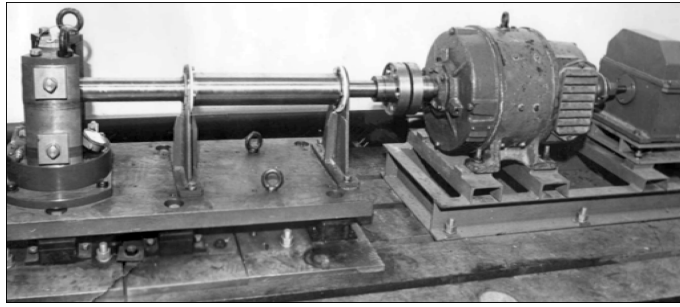


Рис. 4.5. Установа для вібраційних випробувань підшипників кочення

*Установа для вібраційних випробувань підшипників кочення електричних машин.* Для подальших досліджень доцільно проаналізувати вібрації підшипника кочення, «розв'язавши» його вібрації від вібрацій електроприводу. Для реалізації цієї ідеї в ІЕД НАН України була розроблена і виготовлена експериментальна установа для вібровипробування одиночних підшипників кочення. Загальний вигляд установки наведено на рис. 4.5. Її головне призначення полягало в експериментальній перевірці діагностичних ознак за наявності типових дефектів типу перекис, відсутність мастила; у дослідженні пошкоджень зовнішнього або внутрішнього кільця підшипника внаслідок викришування металу (так званого пітингу).

Установа конструктивно складається з трьох базових вузлів: електричного приводу, масивного вала, вузла кріплення і вимірювання вібрацій випробовуваного підшипника. Обертання випробовуваного підшипника, встановленого у вузлі кріплення і вимірювання вібрацій (зображений у лівій частині рис. 4.5), забезпечується електричним двигуном постійного струму типу П-51 через масивний вал. Цей двигун потужністю 11 кВт забезпечує обертання випробовуваного підшипника з будь-якою швидкістю в діапазоні від 10 до 1500 об/хв. Застосування спеціальної муфти з гумовими пальцями дає змогу максимально знизити вібрації, зумовлені роботою електричного приводу. Крім того, зниженню вібрацій вала експериментальної установки сприяє закріплення його в опорах з підшипниками ковзання, виготовленими з фторопласту, а також розміщення вала та вузла кріплення і вимірювання вібрацій випробовуваного підшипника на масивній плиті.

Головне призначення вузла кріплення і вимірювання вібрацій підшипника — це можливість штучно відтворювати основні

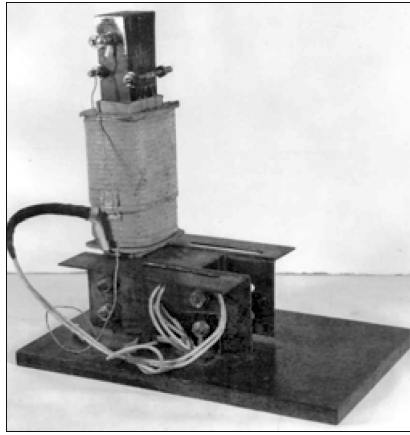


Рис. 4.6. Макет шихтованого магнітопроводу



Рис. 4.7. Ударний молоток

дефекти підшипника та розміщення первинної віброперетворювальної апаратури (акселерометрів). Для вимірювання віброприскорень досліджуваного підшипника використовувався акселерометр типу АВС-017, що дало змогу вимірювати вібрації підшипника в діапазоні частот 20 Гц—30 кГц. Акселерометр встановлювали в радіальному напрямку відносно випробуваного підшипника. Детальний опис установки для випробування підшипників наведено в [4, 59].

**Установка для перевірки ступеня пресування пластин шихтованого магнітопроводу.** Як об'єкт дослідження використовувалася частина шихтованого магнітопроводу малопотужного трансформатора, встановленого на спеціальному випробувальному стенді (рис. 4.6).

Пресування пластин магнітопроводу виконувалося за допомогою шпильок, затягування яких здійснювалося динамометричним ключем з моментом 30 Н · м. Сигнал віброприскорення вимірювали за допомогою встановленого на досліджуваному магнітопроводі акселерометра. Акселерометр типу АВС 17 використовували для вимірювання вібраційної хвилі в діапазоні частот 20 Гц—30 кГц, спричинену ударним молотком (рис. 4.7) у тілі шихтованого магнітопроводу.

Експеримент з діагностування стану пресування пластин магнітопроводу виконували так. За допомогою встановлених на шпильках затискних гайок пакет пластин магнітопроводу стискували із зу-



силлям  $30 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Потім включали і налаштовували лабораторний зразок ІВС ударної діагностики [4]. Після налаштування ІВС в напрямку, перпендикулярному до площини пластин, відбувався удар, який фіксувався акселерометром, встановленим на молотку. Сигнал з акселерометра надходив на схему запуску ІВС ударної діагностики і відбувалось вимірювання вібраційного сигналу у тілі магнітопроводу акселерометром, який встановлювали на пластинах магнітопроводу.

Після цього повністю відпускали гайки шпильок, якими було стягнуто пластини шихтованого магнітопроводу, і експеримент повторювали у наведеній послідовності.

**Вітроелектричний агрегат ВЕА-20.** Експериментальні дослідження з вимірювання вібраційного сигналу здійснювали на головному валу вітроенергетичної установки ВЕУ-20 виробництва ТОВ «Карбон» [16]. Основні технічні характеристики ВЕУ-20: номінальна потужність 20 кВт; номінальна швидкість вітру 9 м/с; номінальна напруга 380/220 В; частота вихідної напруги 50 Гц; частота обертання генератора 100 об/хв; максимальна робоча швидкість вітру 25 м/с; гранично допустима швидкість вітру 50 м/с; швидкість рушання 3 м/с; маса вітрогенератора  $\leq 800$  кг.

Блок сенсорів розташовували на безпосередньо досяжному місці головного вала ВЕУ. Вимірювання проводили після встановлення усталеного режиму обертання ротора вітроагрегату. Блок приймання та опрацювання інформації (БПОІ) [16] знаходився на рівні землі на відстані 40 м від початкового положення блока сенсорів. За допомогою програмного модуля БПОІ виконуються такі операції: керування блоком сенсорів; статистичне опрацювання виміряних сигналів; навчання системи для визначення певного типу дефекту; побудова розв'язувальних правил та прийняття рішення з визначення технічного стану діагностованого вузла. Експерименти полягали у вимірюванні віброприскорень на головному валу ВЕА за різних рівнів споживаної електроенергії (потужності).

Розглянемо формування навчальних сукупностей згідно з (4.2) і (4.3). Нагадаємо, що за виразом (4.2) формуються моделі за видом дефектів, і саме за такого способу формувалися навчальні сукупності, побудовані за даними оброблення вібрацій підшипників кочення, які випробували на установці (див. рис. 4.5). Оскільки деталі підготовки і проведення цих експериментів докладно описано у працях [4, 59], розглянемо лише вибраний діагностичний простір та міри, сформовані за різним станом підшипників кочення.

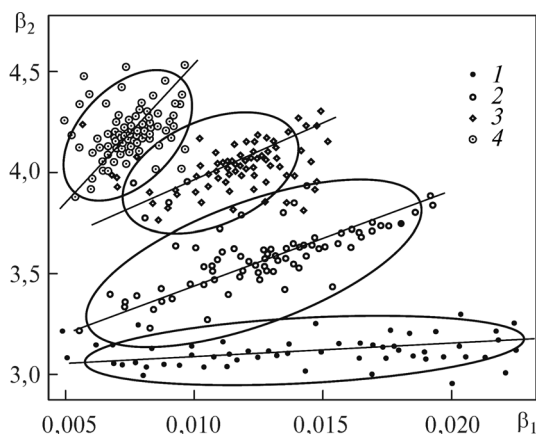
Таблиця 4.1. Коефіцієнти асиметрії та ексцесу

Умови випробування підшипника	Число вибраних для аналізу реалізацій	Інтервальні оцінки середнього значення коефіцієнтів	
		$k$	$\gamma$
Справний	60	$0,12 \pm 0,04$	$0,17 \pm 0,06$
Відсутнє мастило	89	$0,114 \pm 0,011$	$0,66 \pm 0,12$
Перекіс	75	$0,105 \pm 0,007$	$1,07 \pm 0,09$
Дефект внутрішнього кільця	85	$0,087 \pm 0,005$	$1,22 \pm 0,11$

Експериментально встановлено, що найінформативнішими діагностичними ознаками є коефіцієнти асиметрії  $k$  і ексцесу  $\gamma$  досліджуваних вібрацій, які пов'язані з третім і четвертим моментами розподілу випадкових величин відомими співвідношеннями [4, 59].

У табл. 4.1 наведено спостережувані значення оцінок коефіцієнтів асиметрії  $k$  та ексцесу  $\gamma$  вібрацій підшипників 309 ЕШ<sub>2</sub>, деякі досліджувані зразки яких мали різні технічні стани і послідовно встановлювались у випробувальну установку.

Базуючись на цих даних, за діагностичний простір було обрано відому у статистиці діаграму Пірсона [4, 59] з координатами  $(\beta_1, \beta_2)$ . На рис. 4.8, як приклад, наведено типові навчальні сукупності у вигляді [4, 59] еліпсів розсіювання, сформованих у двовимірному діагностичному просторі  $(\beta_1, \beta_2)$ .



**Рис. 4.8.** Навчальні сукупності в двовимірному діагностичному просторі  $(\beta_1, \beta_2)$ : 1 — справний підшипник; 2 — відсутнє мастило; 3 — перекіс  $14' \pm 2,5'$ ; 4 — дефект внутрішнього кільця

Діагностику дефектів за навчальними сукупностями зручніше виконувати не в прямокутній системі координат  $(\beta_1, \beta_2)$ , а в полярній системі  $(\rho, \varphi)$ , перехід до якої здійснюється за співвідношеннями

$$\rho = \sqrt{\beta_1^2 + (\beta_2 - 1)^2}, \quad (4.4)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\beta_2 + 3}{\beta_1 + 4}. \quad (4.5)$$

З порівняння рис. 4.8 та діаграми Пірсона [4, 59] отримуємо, що області визначення параметрів розподілу мають вигляд секторів, вершини яких починаються в точках з координатами  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$  і  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$ . Цим і зумовлений перехід згідно з (4.4) і (4.5) до нової системи координат. У такій системі навчальні сукупності, які відповідають різним технічним станам підшипників, виявляються витягнутими уздовж радіуса  $\rho$  і стиснутими за кутом  $\varphi$ . Тому перетин щільності розподілу в площині кута  $\varphi$  за фіксованого  $\rho$  є чутливішим до зміни типу кривої та її параметрів, ніж у будь-якій іншій площині.

Навчальні сукупності, які наведено на рис. 4.8, можуть бути перетворені до одновимірному діагностичного простору і є гістограмами, побудованими за точками, що утворюють певний еліпс розсіяння, або згладжуючі ці гістограми криві (рис. 4.9).

Навчальні сукупності для контролю стану пресування пластин шихтованого магнітопроводу було отримано за допомогою макета шихтованого магнітопроводу (див. рис. 4.6) та ударного молотка (див. рис. 4.7).

Отримані експериментальні дані є результатами вимірювання віброприскорення на поверхні досліджуваного шихтованого маг-

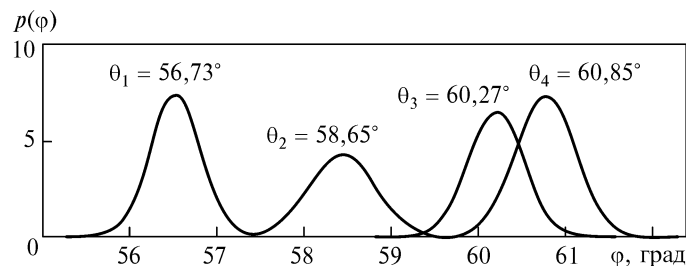


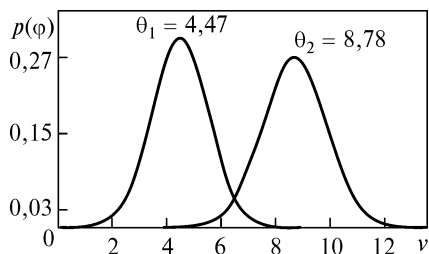
Рис. 4.9. Криві, що згладжують гістограми, побудовані за точками еліпсів розсіяння з рис. 4.8

нітопроводу. Ці вимірювання та подальше спектральне оброблення отриманого діагностичного сигналу здійснювали за допомогою ІВС віброударної діагностики, докладно описаної в [4, 59].

Формування навчальних сукупностей (еталонів), що відповідають певним ступеням пресування пластин магнітопроводу, виконаємо для двох випадків:

- залежність лише від ступеня пресування пластин (модель (4.2)), тобто залежність від дефекту;
- залежність від ступеня пресування та від режиму роботи (величини напруги, що подається на обмотку магнітопроводу, модель (4.3)).

У першому випадку експерименти полягали у вимірюванні вібраційних сигналів, збуджених ударним молотком (див. рис. 4.7) у масиві шихтованого магнітопроводу (див. рис. 4.6), який стискався із зусиллям 30 Н·м і повністю знятим зусиллям стиску. Після вимірювання ці реалізації вібрацій оброблялися на ІВС ударної діагностики за допомогою програми спектрального аналізу. За результатами такої обробки було отримано спектрограми  $S(f)$  вібрацій магнітопроводу, дослідження яких переконливо довело, що найефективнішою діагностичною ознакою ступеня його пресування є кількість резонансних максимумів  $\nu$ , зафіксованих на певному амплітудному рівні спектрограми  $S(f)$ . Докладно ці експерименти описано в працях [4, 59], ми лише нагадаємо, що саме за результатами обробки понад 200 спектрограм вібрацій  $S(f)$  вибирали діагностичні простори, в яких будували навчальні сукупності, що давали змогу діагностувати ступінь пресування магнітопроводу. Кожна така навчальна сукупність являла собою гістограму розподілу резонансних максимумів для різного стану магнітопроводу. Але побудову розв'язувальних правил з виявлення стану пресування магнітопроводу зручніше виконувати не за гістограмами, а за згладжувальними ці гістограми кривими розподілу. Саме такі криві наведено на рис. 4.10.



У другому випадку шихтований магнітопровід випробували в динамічному режимі, тобто на його обмотку (див. рис. 4.6) по-

**Рис. 4.10.** Криві, що згладжують гістограми осередненої кількості  $\nu$  максимумів спектрограми  $S(f)$

давали напругу різної величини, а пластини магнітопроводу стискали із зусиллям різного ступеня. Надалі, у випадках комбінації різних умов випробування за допомогою молотка в тілі магнітопроводу збуджувалась ударна хвиля і з використанням ІВС ударної діагностики здійснювали вимірювання та статистичну обробку діагностичного сигналу.

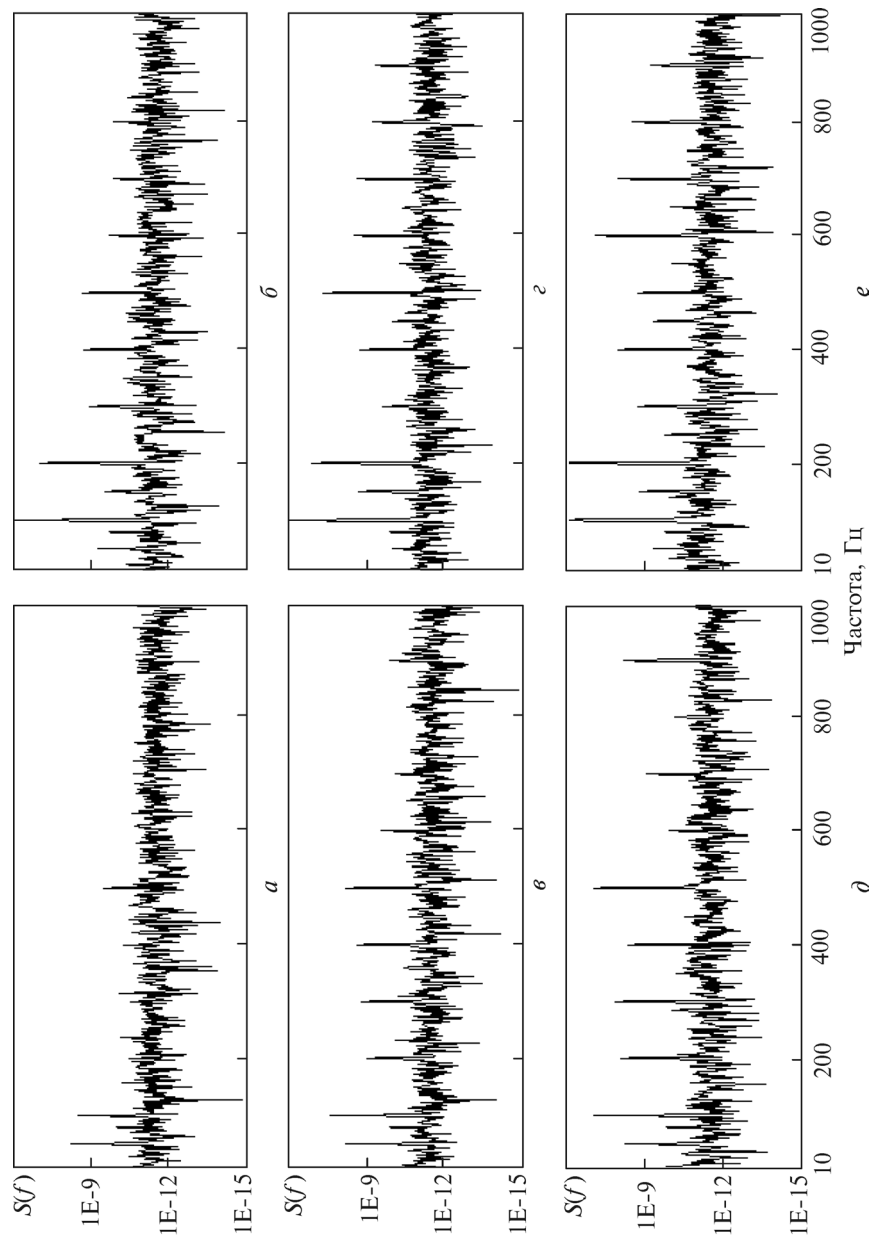
Так само, як і у вище розглянутому випадку, вимірювання виконували для двох крайніх станів пресування магнітопроводу: «розпушеності» і спресованості за допомогою динамометричного ключа із зусиллям 30 Н · м. Зміну режиму роботи здійснювали регулюванням напруги на обмотці магнітопроводу. Вимірювали значення напруги  $U$  та струму  $I$  через обмотку. Сигнали віброприскорення шихтованого пакету магнітопроводу вимірювали за допомогою акселерометра АВС-017, після чого із застосуванням відповідного програмного забезпечення ІВС діагностування визначали кількісні оцінки параметрів  $\sigma$ ,  $k$  та  $\gamma$  (табл. 4.2), а також будували спектрограми  $S(f)$ , деякі з яких наведено на рис. 4.11.

З наведених у табл. 4.2 експериментальних даних бачимо, що за умови розпушення магнітопроводу значення всіх досліджених параметрів змінюються, причому середньоквадратичне відхилення  $\sigma$  систематично збільшується, але не спостерігається певних закономірних змін кількісних оцінок коефіцієнтів асиметрії  $k$  та ексцесу  $\gamma$ . Отже, параметри  $k$  та  $\gamma$  не є інформативними і у випадку діагностування даного виду дефекту, а параметр  $\sigma$  є інформативним.

Поряд із залежністю середньоквадратичного відхилення  $\sigma$  від стану пресування магнітопроводу спостерігалася чітка закономірність зростання його значення зі збільшенням струму через обмотку. При цьому можливі випадки, коли для різних станів пресування спостерігаються близькі значення  $\sigma$ , але за різного навантаження

Таблиця 4.2. Кількісні оцінки параметрів  $\sigma$ ,  $k$  та  $\gamma$

№	Ступінь навантаження		Стан пресування магнітопроводу					
	Напруга $U$ , В	Струм $I$ , А	Спресований			Розпушений		
			$\sigma$	$k$	$\gamma$	$\sigma$	$k$	$\gamma$
1	50	3,3	$0,161 \cdot 10^{-3}$	0,257	-0,119	$0,322 \cdot 10^{-3}$	0,023	-1,000
2	100	6,0	$0,240 \cdot 10^{-3}$	0,108	-0,036	$1,045 \cdot 10^{-3}$	-0,340	-1,100
3	150	9,1	$0,493 \cdot 10^{-3}$	0,131	-0,131	$4,322 \cdot 10^{-3}$	-0,028	-0,773





**Рис. 4.11.** Спектрограми вібрацій  $S(f)$  магнітопроводу залежно від ступеня навантаження обмотки: *a* — напруга 50 В, струм 3,5 А. Магнітопровід спресований; *б* — напруга 50 В, струм 3,5 А. Магнітопровід розпушений; *в* — напруга 100 В, струм 6 А. Магнітопровід спресований; *г* — напруга 100 В, струм 6 А. Магнітопровід розпушений; *д* — напруга 150 В, струм 9,1 А. Магнітопровід спресований; *е* — напруга 150 В, струм 9,1 А. Магнітопровід розпушений

трансформатора. Отже, неможливо однозначно визначити стан пресування магнітопроводу трансформатора, використовуючи лише інформацію про середньоквадратичне відхилення  $\sigma$  сигналу віброприскорення. Необхідно додатково враховувати навантаження трансформатора вимірюванням електричних параметрів — струму або напруги.

Результати експериментальних досліджень щодо ступеня пресування магнітопроводу та струмового режиму обмотки магнітопроводу довели інформативність спектрального аналізу досліджуваних вібрацій. Аналіз отриманих спектрограм (див. рис. 4.11) показав, що у випадку розпушування магнітопроводу з'являються додаткові спектральні компоненти з високою амплітудою.

Наприклад, за низького навантаження (експеримент № 1 — струм через обмотку близько 3,5 А; рис. 4.11, *a*, *б*) у вібраціях спресованого магнітопроводу є дві чітко виражені частотні компоненти в діапазоні частот 50 Гц і 100 Гц, а також менш інтенсивна складова з частотою близько 500 Гц. Під час розпушення магнітопроводу інтенсивність цих компонент змінюється і у спектрограмі додатково з'являються достатньо інтенсивні піки на частотах 200 Гц, 300 Гц, 400 Гц та ряд менш інтенсивних. За більшого навантаження (експеримент № 3 — струм через обмотку близько 9,1 А; рис. 4.11, *д*, *е*) при спресованому магнітопроводі кількість суттєвих частотних компонент спектрограми дорівнює 7, а при розпушеному магнітопроводі їх кількість зростає до 9. В інших експериментах кількість спектральних піків змінювалася аналогічним чином.

Отже, кількість суттєвих максимумів спектрограм  $S(f)$  можна вважати інформативною ознакою для діагностування ступеня пресування магнітопроводу трансформатора, але за умови врахування ступеня його навантаження. На етапі навчання системи діагностування на базі досліджень отриманих спектрограм в автоматичному режимі вибирають рівень, що визначає, які частотні компоненти слід вважати суттєвими. Далі обчислюється кількість частотних максимумів, які перевищують цей рівень, і саме

ця кількість використовується для формування навчальних сукупностей у межах одного режиму роботи досліджуваного об'єкта. Навчання системи здійснюється послідовно для різних режимів навантаження обладнання, яке діагностується.

За результатами подальшого дослідження певної кількості спектрограм  $S(f)$  для кожного ступеня навантаження обмотки магнітопроводу можуть бути сформовані навчальні сукупності для діагностування та моніторингу стану пресування магнітопроводу, що працює з різним ступенем навантаження.

Під час проведення експериментальних досліджень підтверджено інформативність середньоквадратичного значення  $\sigma$  сигналу віброприскорення і кількості суттєвих частотних максимумів у спектрограмі цього сигналу як діагностичних ознак для визначення ступеня пресування магнітопроводу трансформатора, а також необхідність врахування режиму проведення функціональної діагностики режимних параметрів, таких як напруга  $U$  або струм  $I$  через обмотку.

**Експериментальні випробування вітроагрегату ВЕА-20.** У цих експериментах було використано умовно справний вітроагрегат ВЕА-20. Головна мета експериментів — довести необхідність врахування режимів роботи ВЕА під час формування навчальних сукупностей, а надалі і під час діагностування певних дефектів у його вузлах.

Реалізації інформаційного сигналу отримували їх вимірюванням на досяжній частині вала ВЕА за допомогою сенсора. Для передачі вимірянних даних до приймальних блоків ІВС вібродіагностики використовували бездротовий канал, що дало змогу вимірювати діагностичні сигнали безпосередньо на рухомих частинах ВЕА-20.

Випробування ВЕА виконували у трьох режимах навантаження (споживаної потужності): 700 Вт, 5 кВт та 9 кВт. Зареєстровані вибірки в ІВС вібродіагностики оброблювали за допомогою програми гістограмного аналізу з метою отримання оцінок середньоквадратичного відхилення  $\sigma$  і коефіцієнтів асиметрії  $k$  та ексцесу  $\gamma$ . Результати цих експериментів наведено в табл. 4.3.

Наведені у табл. 4.3 дані було отримано за результатами опрацювання 150 реалізацій, вимірянних на головному валу ВЕА-20 для кожного ступеня навантаження вітроагрегата.

За результатами проведених експериментальних досліджень підтверджено інформативність середньоквадратичного значення  $\sigma$  сигналу віброприскорення. Так, згідно з даними табл. 4.3 бачимо,



Таблиця 4.3. Результати експериментів

№ експеримента	Ступінь навантаження, кВт	Оцінки статистичних параметрів		
		$\sigma \cdot 10^{-2}$	$k \cdot 10^{-2}$	$\gamma$
1	0,7	0,29 ± 0,04	0,10 ± 0,04	1,238 ± 0,023
2	5,0	0,57 ± 0,07	0,099 ± 0,021	1,74 ± 0,07
3	9,0	0,64 ± 0,05	0,12 ± 0,03	1,50 ± 0,06

що відбувається стійке збільшення  $\sigma$  разом із зростанням ступеня навантаження на виході ВЕА. Тобто параметр  $\sigma$  може бути використаний як діагностична ознака і має бути врахований під час формування навчальних сукупностей для подальшої вібродіагностики вузлів ВЕА.

#### 4.4. ПРАВИЛА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ ОБ'ЄКТІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

Наступним і завершальним кроком проведення діагностування електроенергетичного обладнання є побудова розв'язувальних правил з діагностування і класифікації певних видів дефектів у вузлах ЕО. Стисло зупинимося на розгляді цих питань.

Для побудови розв'язувальних правил з діагностування конкретних дефектів у підшипниках скористаємося навчальними сукупностями, сформованими за результатами гістограмного аналізу досліджуваних вібрацій у діагностичному просторі  $\varphi$  у вигляді згладжувальних гістограми кривих (див. рис. 4.9).

Розподіли оцінок  $\varphi$ , які відповідають різним технічним станам випробувального підшипника, зміщені один відносно одного і мають різні математичні сподівання: справний підшипник —  $\varphi = 56,73^\circ$ ; відсутність мастила —  $\varphi = 58,65^\circ$ ; перекис  $14' \pm 2,5'$  —  $\varphi = 60,27^\circ$ ; дефект внутрішнього кільця —  $\varphi = 60,83^\circ$ . Отримані криві належать до XIII, IV або VII типів кривих з системи Пірсона, тобто можуть бути апроксимовані нормальним законом розподілу [4, 59].

Для побудови розв'язувальних правил під час діагностування зазначених дефектів у підшипнику можна використовувати класичну двохальтернативну процедуру перевірки статистичних гіпотез за Нейманом—Пірсоном, яку для нормального розподілу описують відносно прості математичні співвідношення.

Для діагностування технічного стану підшипників і класифікації дефектів у них можна побудувати двохальтернативні розв'язувальні правила, що зводяться до перевірки таких гіпотез:

$$H_0: \theta_1 = 56,73^\circ \text{ (справний)} \leftrightarrow H_1: \theta_2 = 58,65^\circ \text{ (немає мастила);}$$

$$H_0: \theta_1 = 56,73^\circ \text{ (справний)} \leftrightarrow H_1: \theta_3 = 60,27^\circ \text{ (перекіс } 14' \pm 2,5'');}$$

$$H_0: \theta_1 = 56,73^\circ \text{ (справний)} \leftrightarrow H_1: \theta_4 = 60,83^\circ \text{ (дефект кільця);}$$

$$H_0: \theta_2 = 58,65^\circ \text{ (немає мастила)} \leftrightarrow H_1: \theta_3 = 60,27^\circ \text{ (перекіс } 14' \pm 2,5'');$$

$$H_0: \theta_3 = 60,27^\circ \text{ (перекіс)} \leftrightarrow H_1: \theta_4 = 60,83^\circ \text{ (дефект кільця).}$$

На базі сформульованих гіпотез розглянемо конкретний приклад діагностування технічного стану підшипників 309 ЕШ<sub>2</sub>, встановлених на випробувальній установці. Побудуємо розв'язувальне правило для діагностування відсутності мастила в підшипнику. Розв'язання задачі почнемо з планування експерименту.

Діагностування відсутності мастила в підшипнику 309 ЕШ<sub>2</sub> зводиться до перевірки головної гіпотези  $H_0: \theta_1 = 56,73^\circ$  (підшипник справний) проти простої альтернативи  $H_1: \theta_2 = 58,65^\circ$  (відсутнє мастило). Приймаючи ймовірності помилок першого і другого роду  $\alpha = 0,05$  і  $\beta = 0,01$  і знайшовши для них значення за таблицями [2] стандартного нормального розподілу відповідні квантилі  $u_{1-\alpha} = -1,645$  і  $u_{1-\beta} = -2,326$ , визначимо необхідну кількість спостережень і величину порога з урахуванням того, що дисперсія  $\sigma^2 = 0,3933$ :

$$n = \frac{(u_\alpha + u_\beta)^2 \sigma^2}{(\theta_2 - \theta_1)^2} = \frac{6,202}{3,6864} \approx 2,$$

$$C = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(u_\alpha - u_\beta)}{2(u_\alpha + u_\beta)} + (\theta_1 + \theta_2)/2 = 57,52^\circ.$$

Отримавши в результаті проведеного планування експерименту всі необхідні дані для побудови розв'язувального правила, здійснимо діагностування відсутності мастила в конкретних зразках підшипників типу 309 ЕШ<sub>2</sub>, встановлених на випробувальній установці.

Для перевірки технічного стану підшипників було довільно обрано чотири підшипника кочення, які послідовно випробували на установці. У процесі випробувань виміряно й оброблено за про-

грамою гістограмного аналізу за допомогою ІВС вібродіагностики по 2 вибірки, що містять вібрації випробовуваних підшипників у кожному з експериментів. Оцінки значень параметра  $\varphi$  вібрацій підшипників, встановлених на установці, наведено в табл. 4.4.

Згідно з [4, 59] співвідношення порогової нерівності для даного випадку має вигляд

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j \leq C.$$

Ліва частина наведеної порогової нерівності після підстановки в неї даних з табл. 4.4 для 1—4-го зразків випробовуваних підшипників набуває значення, що дорівнюють 55,91°; 57,41°; 56,53°; 57,02°. Права частина зазначеної нерівності після підстановки в неї даних, отриманих під час планування експерименту, дорівнює 57,52°. Таким чином, на підставі отриманих результатів приймаємо гіпотезу  $H_0$  — усі чотири зразки підшипників 309 ЕШ<sub>2</sub>, що випробували на установці — справні.

Після цього в усіх випробовуваних підшипниках видаляли мастило. Потім були проведені аналогічні експерименти з вимірювання й оброблення вібрацій підшипників, що працюють без змащення, для всіх чотирьох досліджуваних зразків підшипників. Оцінки значень параметра вібрацій випробовуваних підшипників наведено також у табл. 4.4.

Після підстановки даних з табл. 4.4 у наведену вище порогову нерівність його ліва частина для (1—4)-го випробовуваних підшип-

Таблиця 4.4. Параметри вібрацій підшипників

Вимірюваний параметр	Номер досліджуваного підшипника			
	1	2	3	4
<b>Справний підшипник</b>				
$\varphi_1$	55,28°	56,92°	57,10°	56,03°
$\varphi_2$	56,53°	57,89°	55,95°	58,91°
$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j$	55,91°	57,41°	56,53°	57,02°
<b>Мастило відсутнє</b>				
$\varphi_1$	55,99°	60,58°	59,70°	60,04°
$\varphi_2$	59,26°	56,10°	57,35°	60,36°
$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j$	57,63°	58,34°	58,53°	60,20°

ників набуває значень  $57,63^\circ$ ;  $58,34^\circ$ ;  $58,53^\circ$ ;  $60,20^\circ$ , тобто для всіх чотирьох зразків підшипників 309 ЕШ<sub>2</sub> ліва частина порогової нерівності більше за праву. Отже, на підставі отриманих результатів приймаємо гіпотезу  $H_1$  — у підшипниках відсутнє мастило. Аналогічно за гіпотезами, сформульованими вище, будемо розв'язувальні правила для діагностування інших видів дефектів.

Зупинимося на питаннях вибору діагностичних просторів і побудови навчальних сукупностей, відповідних різному ступеню пресування шихтованого магнітопроводу (див. рис. 4.6). У п. 4.3 були обґрунтовані діагностичні ознаки, статистичні оцінки яких можна отримати на базі статистичного спектрального аналізу. Енергетичний спектр, що визначається внаслідок такого аналізу, характеризує розподіл за частотами ударної вібраційної хвилі, яку збуджує в досліджуваному магнітопроводі спеціальний ударний молоток (див. рис. 4.7).

Виходячи з розгляду спектрограм ударних вібраційних хвиль, що поширюються шихтованим магнітопроводом [1], зазначимо, що найінформативнішими діагностичними ознаками, що дають змогу діагностувати ступінь пресування шихтованого магнітопроводу, є амплітуди  $A_f$  основних максимумів спектрограми  $S(f)$ ; частоти  $f_n$  основних максимумів спектрограми  $S(f)$ ; кількість  $v_j$  основних максимумів спектрограми  $S(f)$  у фіксованій смузі частот.

Для діагностування ступеня пресування шихтованого магнітопроводу побудуємо двохальтернативне розв'язувальне правило, яке зводиться до перевірки гіпотез:  $H_0 : \theta_1 = 4,47$  (магнітопровід спресований із зусиллям  $30 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ) проти  $H_1 : \theta_2 = 8,78$  (стягувальне зусилля в магнітопроводі відсутнє).

Виконаємо перевірку головної гіпотези. Взявши за значення помилок першого і другого роду  $\alpha = 0,05$  і  $\beta = 0,01$  та знайшовши для них за таблицями [2] стандартного нормального розподілу відповідні квантілі  $u_{1-\alpha} = -1,645$  і  $u_{1-\beta} = -2,326$ , визначимо необхідну кількість спостережень  $N$  і величину порога  $C$ , використовуючи вирази, наведені в [4, 59] під час описання правил перевірки статистичних гіпотез за методом Неймана—Пірсона.

Необхідна кількість спостережень з урахуванням того, що  $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$ ,  $u_{1-\beta} = -u_\beta$ , становить

$$N = \frac{(u_\alpha + u_\beta)^2 \sigma^2}{(\theta_2 - \theta_1)^2} = \frac{15,769 \cdot 4,36}{(4,31)^2} = 3,70 \approx 4,$$

$$C = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(u_\alpha - u_\beta)}{2(u_\alpha + u_\beta)} + \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} = -\frac{2,935}{7,942} + 6,625 = 6,255,$$

де  $\sigma$  — найбільше значення дисперсії серед кривих, наведених на рис. 4.10. Для даної задачі  $\sigma = 2,09$ .

Отримавши в результаті проведеного планування експерименту всі необхідні дані для побудови розв'язувального правила, здійснимо діагностування ступеня пресування шихтованих магнітопроводів, подібних до наведеного на рис. 4.6. Для перевірки ступеня пресування було довільно обрано п'ять таких магнітопроводів, які послідовно монтували і випробовували на стенді. У процесі випробувань за допомогою лабораторного зразка ІВС ударної діагностики виміряно по чотири вибірки, що містять вібрації шихтованого магнітопроводу. Кількість  $\nu$  максимумів спектрограми  $S(f)$  цих вібрацій на рівні 0,5 амплітуди  $S(f)$  наведено в табл. 4.5.

Ліва частина вказаної вище порогової нерівності після підстановки в неї даних з табл. 4.5 для (1–5)-го зразків випробуваних магнітопроводів набуває значень 1,75; 4,5; 3,75; 3; 4,75. Права

Таблиця 4.5. Максимуми спектрограми  $S(f)$  вібрацій

Вимірюваний параметр	Номер досліджуваного магнітопроводу				
	1	2	3	4	5
<b>Магнітопровід, стиснутий із зусиллям 30 Н · м</b>					
$\nu_1$	3	5	4	3	5
$\nu_2$	1	3	4	4	6
$\nu_3$	1	5	3	3	4
$\nu_4$	2	5	4	2	4
$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \nu_j$	1,75	4,5	3,75	3	4,75
<b>Магнітопровід без стискувального зусилля</b>					
$\nu_1$	8	11	6	9	7
$\nu_2$	7	8	7	10	9
$\nu_3$	7	9	8	10	8
$\nu_4$	5	8	7	11	9
$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \nu_j$	6,75	9	7	10	8,25

частина порогової нерівності після підстановки в неї даних, отриманих під час планування експерименту, дорівнює 6,255. Таким чином, на підставі отриманих результатів приймаємо гіпотезу  $H_0$  — досліджувані магнітопроводи стиснуті із зусиллям 30 Н · м.

Після цього в усіх випробовуваних магнітопроводах було знято стискувальне зусилля і виконано аналогічні експерименти з вимірювання та обробки вібрацій, викликаних ударним впливом, за всіма п'ятьма досліджуваними магнітопроводами. Оцінки значень параметра  $\nu$  вібрацій випробовуваних магнітопроводів наведено в табл. 4.5. Після підстановки даних з табл. 4.5 у вираз для порогової нерівності його ліва частина для (1—5)-го досліджуваних магнітопроводів набуває значення 6,75; 9; 7; 10; 8,25, тобто для всіх п'яти зразків ліва частина порогової нерівності більша за праву, тому приймаємо гіпотезу  $H_1$  — у магнітопроводах відсутнє стягувальне зусилля.

Отже, з розглянутого прикладу випливає, що число  $\nu_j$  максимумів спектрограми вібрацій шихтованого магнітопроводу можна використовувати як діагностичну ознаку для визначення ступеня його пресування.

Аналогічно можуть бути побудовані розв'язувальні правила з діагностики стану пресування магнітопроводу під час його роботи в динамічному режимі, тобто за струмового навантаження його обмотки (див. рис. 4.6). Однак у цьому випадку під час побудови розв'язувальних правил треба користуватися навчальними сукупностями, що відповідають певному ступеню навантаження, які, наприклад, наведено в табл. 4.3.

Відносно просте застосування розглянутих вище розв'язувальних правил у комплексі з лабораторним зразком ІВС ударної діагностики обумовлює придатність для практичного використання запропонованого способу ударної діагностики шихтованих магнітопроводів.

Підсумовуючи викладене у розділі, можна констатувати, що запропонований підхід до формування навчальних сукупностей (еталонів) дає змогу систематизувати користування цими навчальними сукупностями під час роботи у складі ІВС діагностики, які працюють за технологіями Smart Grid. Залежно від умов роботи досліджуваного обладнання завдяки формалізованим правилам роботи з векторами (модель (4.2)) або матрицями (модель (4.3)) ІВС може оперативно обирати необхідний еталон, не чекаючи, поки працююче обладнання досягне певних умов, для яких у банку даних є відповідна навчальна сукупність.

## ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ І МІР НА КОЛІ

Розроблені у кутометрії моделі і міри на колі знайшли нове застосування в дослідженні циклічних процесів. Власне і слово «цикл» походить від грецького «kuklos» — коло, що є найприроднішою геометричною фігурою для відображення кутів. Під *циклом* розуміють сукупність взаємопов'язаних явищ чи процесів, що утворюють кругообіг протягом певного проміжку часу — *періоду*. Розділені цим проміжком часу значення процесу можуть і не збігатися абсолютно точно — суттєвим лишається повторюваність найхарактерніших ознак останнього. Процеси, в яких можна виділити цикли, називають *циклічними*.

Циклічні процеси можуть бути загасальними і незагасальними. Незагасальним циклічним процесом є зміна сезонів пори року. Інші приклади — коливання фізичного маятника, загасальні коливання електричних струмів у резонансному контурі, процеси зміни тиску крові у кровоносних судинах людини тощо.

Циклічні сигнали та їх граничний випадок — періодичні сигнали, які широко застосовуються у фазометрії. Головним об'єктом дослідження цієї галузі вимірювальної техніки є фазовий зсув між двома циклічними сигналами. Такі вимірювання відомі для широкого кола прикладних застосувань у радіотехніці, неруйнівному контролі, медицині, радіолокації і радіонавігації, захисті інформації тощо [32, 53, 71, 80]. Використання розроблених моделей і мір на колі у фазометрії суттєво розширює можливості цієї галузі вимірювань.

Розглянуті приклади не охоплюють усе різноманіття варіантів прикладного застосування моделей і мір на колі для вимірювань, проте переконливо свідчать про їхній потужний методологічний потенціал.

## 5.1. ФАЗОВІ СИСТЕМИ УЛЬТРАЗВУКОВОЇ ЛУНА-ІМПУЛЬСНОЇ ТОВЩИНОМЕТРІЇ

Під час контролю виробів з матеріалів зі значним загасанням ультразвукових коливань постає задача виявлення ультразвукових імпульсних сигналів з гармонічним сигналом-носієм на тлі істотних шумів. Ця задача має ефективний розв'язок за допомогою визначення дискретних фазових характеристик таких сигналів та подальшого їх статистичного аналізу. Такий спосіб запропоновано і досліджено в [8, 49, 122].

Луна-імпульсний метод ультразвукової товщинометрії (УЗТ) ґрунтується на визначенні затримки  $\tau_3$ , необхідної для поширення ультразвукового сигналу через об'єкт контролю. Остання за відомої швидкості  $c$  поширення повздовжньої ультразвукової хвилі у двох напрямках між поверхнею і дном об'єкта однозначно визначає його товщину:  $h = 0,5c\tau_3$ . Зазвичай значення  $\tau_3$  оцінюють за інтервалом часу між обвідними двох донних ультразвукових сигналів. Такий спосіб дуже чутливий до наявності шумів.

Визначення  $\tau_3$  за фазовими характеристиками луна-сигналів має певні переваги у заводській практиці, а в сукупності зі статистичними методами опрацювання цих характеристик дає змогу виявляти сигнали УЗТ за відношення сигнал/шум ( $c/\text{ш}$ ), близького до одиниці і менше, та використовувати їх для прецизійного вимірювання затримки  $\tau_3$  у конструкційних матеріалах зі значним загасанням ультразвукових хвиль.

Запропонований спосіб ультразвукової товщинометрії полягає в тому, що формують ультразвуковий зондувальний імпульсний сигнал, уводять його в об'єкт контролю, приймають сигнал після його поширення в об'єкті і відбиття від протилежного боку об'єкта, визначають фазову характеристику відбитих сигналів (луна-сигналів), обчислюють різницю фаз луна-сигналів і сигналу-носія, виконують її ковзне віконне опрацювання, обчислюють для відібраних вікном даних поточні значення  $r$ -статистики (ВРД), а час  $\tau_3$  знаходять за його максимумами. Товщину об'єкта обчислюють за формулою

$$h = 0,5\tau_{1,k}c/(k-1), \quad (5.1)$$

де  $\tau_{1,k}$  — інтервал часу між першим і  $k$ -м донними сигналами.

Цей спосіб дає змогу визначити послідовності загасальних донних імпульсів у присутності значного за рівнем шуму, віді-



лити затримку  $\tau_{1,k}$  між першим і  $k$ -м донними сигналами і за рахунок цього зменшити середньоквадратичне значення похибки квантування часового інтервалу  $\tau_3 = \tau_{1,k}/k - 1$  у  $\sqrt{k-1}$  разів.

Методологія цього способу ґрунтується на визначенні поточних значень  $r$ -статистики. Порядок отримання і статистичного опрацювання результатів фазових вимірювань наведено на рис. 5.1.

Експериментальне дослідження ефективності застосування запропонованого способу виконували так: у зразок з відомою товщиною (або часом поширення ультразвукового сигналу) випромінювався ультразвуковий зондувальний сигнал у формі радіоімпульсу. Аналізували сигнал, який являв собою адитивну суміш

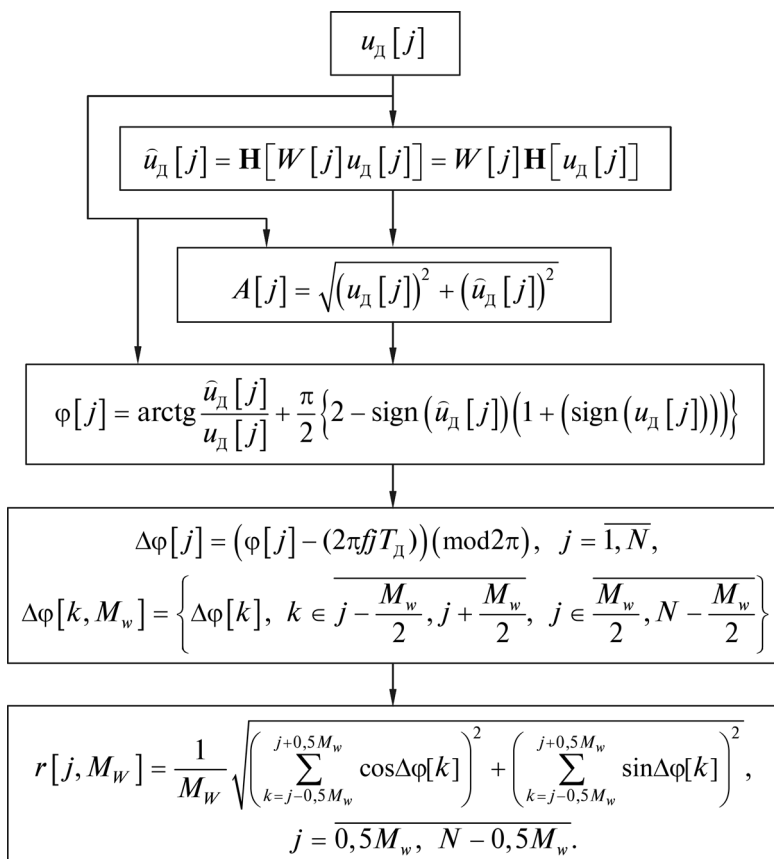


Рис. 5.1. Графічне зображення методики визначення  $r$ -статистики

періодичної (період повтору  $T_{\Pi}$ ) послідовності луна-сигналів і реалізації гауссового шуму  $\xi(t)$  з нульовим математичним сподіванням і дисперсією  $\sigma^2$ . Його дискретизований прототип мав вигляд

$$u_{\text{д}}[j] = \sum_{i=1}^d k_{\text{ЕАТ}_i} \cdot u_3(j - \tau - (i-1)T_{\Pi}) + \xi[j],$$

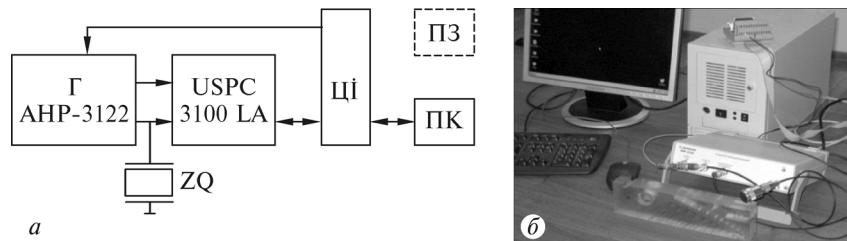
де  $k_{\text{ЕАТ}_i}$  — коефіцієнти електроакустичного тракту для  $i$ -го луна-сигналу,  $i = \overline{1, d}$ ;  $\tau$  — затримка першого луна-сигналу відносно зондувального,  $j = \overline{1, N}$ ;  $N$  — обсяг вибірки, значення якої отримано в дискретні моменти часу  $jT_{\text{д}}$ ;  $T_{\text{д}}$  — період дискретизації.

Відношення с/ш визначали за величиною  $U_{\text{max},i}/\sigma$ , де  $U_{\text{max},i}$  — максимальне значення обвідної  $i$ -го луна-сигналу.

Для проведення експериментальних досліджень ефективності застосування такого способу УЗТ розроблено лабораторний стенд, структурна схема і загальний вигляд якого наведено на рис. 5.2.

Для формування сигналу використовували двоканальний генератор сигналів довільної форми АНР-3122 з такими характеристиками:

- смуга частот — 0,02 Гц—10 МГц;
- розрядність цифро-аналогового перетворювача — 12 біт;
- максимальна кількість точок на канал — 128 К;
- максимальна частота дискретизації сигналу — 80 МГц;
- тривалість фронту прямокутного сигналу — 20 нс.



**Рис. 5.2.** Лабораторний стенд: *a* — структура (Г — генератор сигналів, ZQ — п'єзоелектричний перетворювач, USPC — ультразвуковий дефектоскоп, ПК — персональний комп'ютер, ЦІ — цифровий інтерфейс, ПЗ — програмне забезпечення); *б* — загальний вигляд

Використовували два типи перетворювачів сумішеного типу: Panametrics C308 з робочою частотою 5 МГц і Panametrics C305 з частотою 2,25 МГц.

Як пристрій попереднього оброблення сигналів УЗТ використовували ультразвуковий дефектоскоп USPC 3100 LA виробництва компанії «Socomec» (Франція), виконаний конструктивно у вигляді РСІ-плати для ПК. Дефектоскоп здійснює підсилення, фільтрацію та аналого-цифрове перетворення сигналу, попередню цифрову обробку експериментальних даних та зберігання результату в оперативному запам'ятовувальному пристрої для подальшої передачі пакетами в ПК. Основні технічні характеристики дефектоскопа USPC 3100 LA:

- смуга частот приймача — 0,35—30 МГц;
- динамічний діапазон амплітуди сигналу — до 105 дБ;
- частота дискретизації АЦП — 100 МГц;
- розрядність АЦП — 10 біт.

Дослідження виконували на чотирьох зразках, акустичні властивості матеріалів зразків наведено в табл. 5.1. Загальний вигляд зразків показано на рис. 5.3.

У всіх дослідах частота дискретизації  $f_d = 100$  МГц. Для прозвучування об'єкта контролю застосовували імпульсний сигнал з прямокутною обвідною і тривалістю, що дорівнювала 4 періодам сигналу-носія.

**Зразок № 1.** Частота сигналу заповнення 2,3 МГц. Отримані експериментальні дані та результати розрахунків наведено на рис. 5.4.

З рис. 5.4, *а*, *б* бачимо, що аналізований сигнал являє собою послідовність донних радіоімпульсів у суміші з гауссовим шумом, які загасають за експоненціальним законом. Графік на рис. 5.4, *в* є пилкоподібною функцією з множиною значень  $[0, 2\pi)$ . На інтервалах часу, в межах яких присутні донні імпульси, графік набуває вигляду кривої, яка змінюється значно повільніше (ділянки 1—7).

З порівняльного аналізу обвідної  $A$  (рис. 5.4, *б*) і статистики  $r[j, M_w]$  (рис. 5.4, *г*) можна зробити висновок, що запропонований метод фазової УЗТ є ефективнішим ніж амплітудний, оскільки забезпечує виявлення більшої кількості луна-сигналів, тобто можливість їх виявлення за меншого відношення сигнал/шум. Дійсно, за обвідною сигналу  $u_d[j]$ , починаючи з  $i = 5$ , практично неможливо вирізнити луна-сигнали на тлі шуму. Натомість за

Таблиця 5.1. Акустичні властивості матеріалів зразків

Матеріал	Товщина зразка $h$ , мм	Час поширення сигналу, мкс	Густина $\times 10^3$ , кг/м <sup>3</sup>	Швидкість поздовжньої хвилі, 10 <sup>3</sup> м/с	Модуль Юнга, ГПа	Коефіцієнт Пуассона	Коефіцієнт загасання на 2,5 МГц, Нп/м	Хвильовий опір $Z$ , 10 <sup>6</sup> Па · с/м
<b>Зразок № 1</b> Сталь вуглецева (марка сталі 10 — сталь конструкційна вуглецева якісна) СО-2А	56	18,9	7,856	5,925	210 (при 20 °С)	0,28	1,7	46,5
<b>Зразок № 2</b> Неіржавна сталь (12Х18Н10Т — сталь неіржавна конструкційна кріогенна: 0,12 % — вуглець, 18 % — хром, 10 % — нікель)	17,8	6,2	7,920	5,742	198 (при 20 °С)	0,30	2,2	45,4
<b>Зразок № 3</b> Плексиглас СО1 (згідно з ГОСТ 14782-86)	25,4	19,3	1,19	2,674	3,1	0,35	30	3,2
<b>Зразок № 4</b> Фарфор-кераміка (скловидна фаза)	10,9	5,5	2,27	3,942	59	0,17	0,3	8,9

графіком статистики  $r[j, M_w]$  можна впевнено виявити вісім луна-сигналів ( $d = 8$ , для восьмого маємо  $U_{\max,8}/\sigma_{ш} \approx 1,8$ ).

З метою визначення середньоквадратичного відхилення (СКВ) оцінки часового інтервалу  $\tau$  виконували серію  $S = 20$  експериментів з подальшим усередненням отриманих оцінок.

Середнє значення  $\bar{\tau}_{kS}$  для  $k$ -го інтервалу для  $S$  експериментів визначали за формулою  $\bar{\tau}_{kS} = S^{-1} \sum_{s=1}^S \tau_{ks}$ , де  $\tau_{ks}$  — затримка між  $k$  і  $k + 1$  імпульсами в  $s$ -му експерименті,  $k = \overline{1, K}$ ;  $s = \overline{1, S}$ . СКВ для

### 5.1. Фазові системи ультразвукової луна-імпульсної товщинометрії

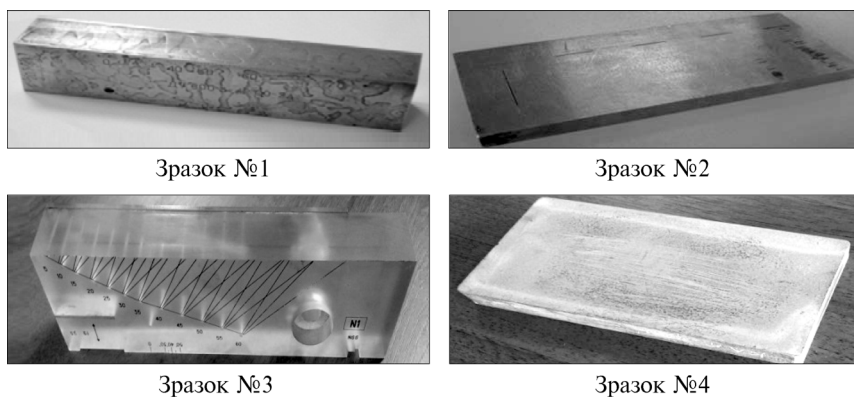


Рис. 5.3. Загальний вигляд досліджуваних зразків

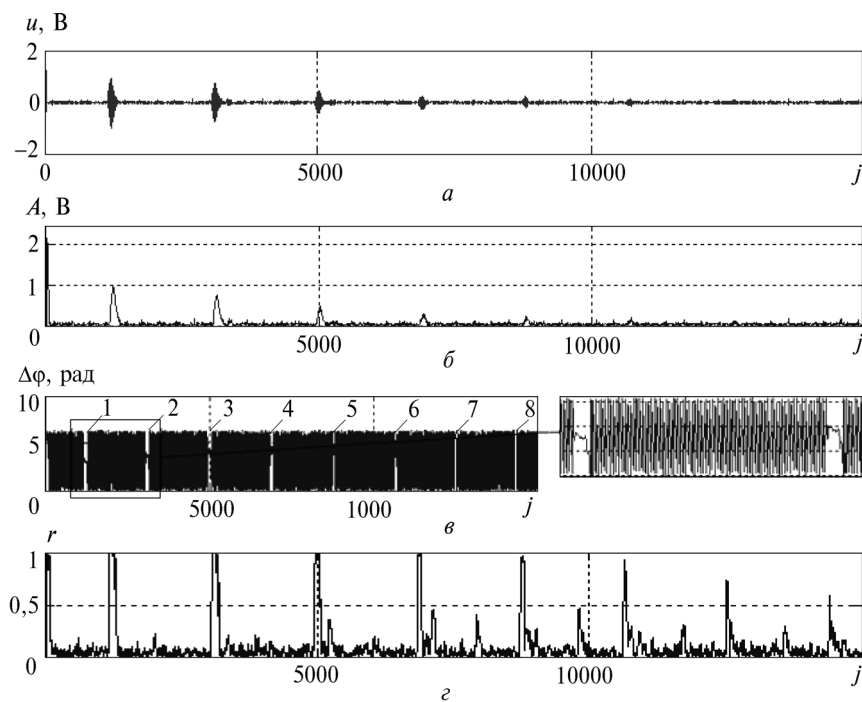


Рис. 5.4. Експериментальні та розрахункові дані для зразка № 1:  $a$  — графік сигналу УЗТ;  $\text{б}$  — обвідна сигналу;  $\text{в}$  — фрагмент графіка різниці дискретних фазових характеристик сигналу УЗТ і сигналу-носія синусоїдної форми;  $\text{г}$  — графік значень статистики  $r[j, M_w]$  для ковзного вікна з апертурою  $M_w = 110$

$\bar{\tau}_{kS}$  знаходили за формулою

$$\sigma_{kS} = \sqrt{(S-1)^{-1} \sum_{n=1}^S (\tau_{kn} - \bar{\tau}_{kS})^2}.$$

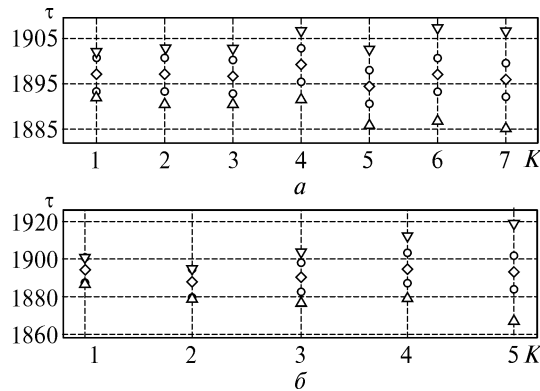
Для об'єднання результатів серії окремих і незалежних вимірювань однієї величини необхідно використати середнє зважене значення цих вимірювань з метою отримання найкращої оцінки [49, 93]:

$$\bar{\tau}_H = \sum_{k=1}^K \bar{\tau}_{kS} / \sigma_{kS}^2 / \sum_{k=1}^K \sigma_{kS}^{-2}. \quad (5.2)$$

СКВ цієї оцінки визначали так:

$$\sigma_{\bar{\tau}_H} = \left( \sum_{k=1}^K \sigma_{kS}^{-2} \right)^{-0,5}. \quad (5.3)$$

На рис. 5.5, *a*, *б* наведено значення  $\bar{\tau}_{kS}$  і границі СКВ для  $\bar{\tau}_{kS}$  і  $\bar{\tau}_N$ , отримані за статистикою  $r$  та обвідною сигналу. З їх аналізу можна зробити висновок, що для відношень  $c/\text{ш} \gg 1$  вищу точність вимірювання часових інтервалів забезпечує амплітудний метод. Зі зменшенням відношення  $c/\text{ш}$  фазовий спосіб вимірю-



**Рис. 5.5.** Графіки середнього значення часу поширення сигналу  $\bar{\tau}_{kS}$  і границі СКВ для  $\bar{\tau}_{kS}$  і  $\bar{\tau}$ , отриманих за статистикою  $r$  (*a*) та за обвідною сигналу (*б*): ромби — значення  $\bar{\tau}_{kS}$ ; трикутники — границі СКВ для  $\bar{\tau}_{kS}$ ; кола — границі СКВ для  $\bar{\tau}$

вання стає ефективнішим, а для  $c/\text{ш} < 2$  амплітудний метод взагалі втрачає здатність до визначення часових інтервалів ((6—8)-й луна-сигнали не виявляються за обвідною сигналу).

**Зразок № 2.** Частота сигналу заповнення 2,23 МГц. Отримані експериментальні дані та результати обчислення наведено на рис. 5.6.

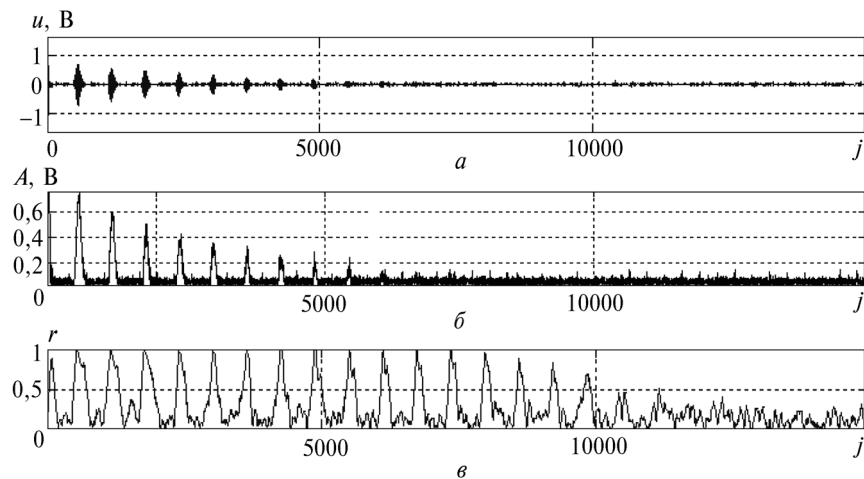
У цьому експерименті обвідна сигналу  $u_d[j]$ , починаючи з  $i = 10$ , практично не дає змоги вирізнити луна-сигнали на тлі шуму. Натомість графік статистики  $r[j, M_W]$  свідчить про те, що в даному експерименті впевнено виявляються  $d = 18$  луна-сигналів. Для імпульсу з номером  $i = 8$  відношення  $c/\text{ш}$  становить  $\sim 1$ .

**Зразок № 3.** Частота сигналу заповнення 2,3 МГц. На рис. 5.7 наведено отримані експериментальні та розрахункові дані.

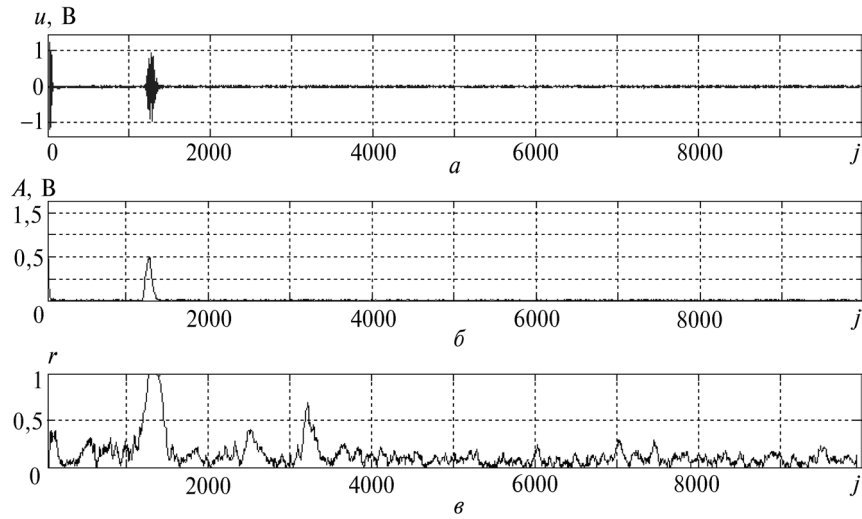
З рис. 5.7, *a, б* бачимо, що за обвідною сигналу визначається лише один луна-сигнал, натомість графік статистики  $r[j, M_W]$  свідчить про можливість виявлення двох імпульсів.

**Зразок № 4.** Частота сигналу заповнення 2,3 МГц. На рис. 5.8 наведено отримані експериментальні та розрахункові дані.

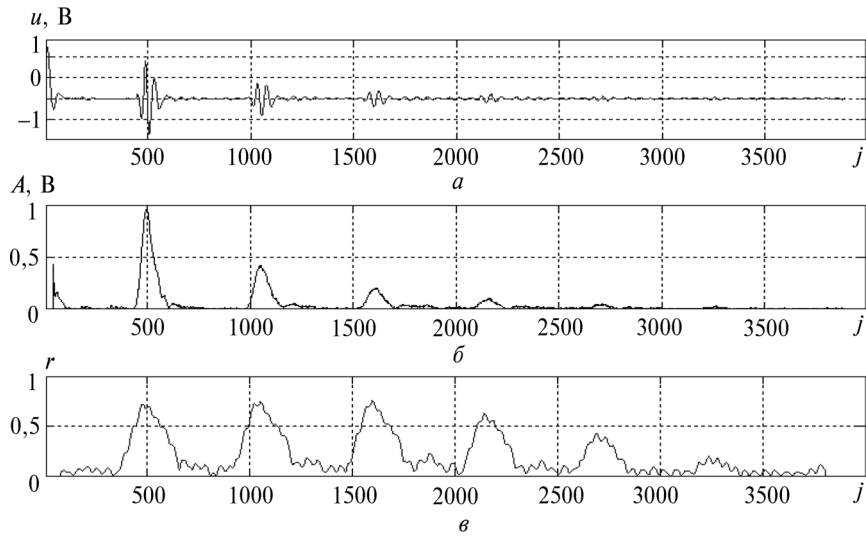
З порівняння графіків обвідної сигналу і статистики  $r[j, M_W]$  можна зробити висновок, що в цьому випадку фазовим методом



**Рис. 5.6.** Експериментальні дані для зразка № 2: *a* — графік сигналу  $u_d[j]$ ; *б* — графік обвідної сигналу  $A[j]$ ; *в* — графік статистики  $r[j, M_W]$



**Рис. 5.7.** Експериментальні дані для зразка № 3:  $a$  — графік сигналу УЗТ;  $б$  — графік обвідної сигналу;  $в$  — графік статистики  $r[j, M_W]$



**Рис. 5.8.** Експериментальні дані для зразка № 4:  $a$  — графік сигналу  $u_d[j]$ ;  $б$  — графік обвідної сигналу  $A[j]$ ;  $в$  — графік статистики  $r[j, M_W]$



впевнено виділяються 6 луна-сигналів, у той час як за амплітудним — 4—5 луна-сигналів. Відношення с/ш для останнього з виявлених луна-сигналів становить 2,3. Загалом фазовий метод виявлення сигналів УЗТ з гармонічним сигналом-носієм на тлі адитивної гауссової завади за відношення с/ш < 2 дає змогу отримати під час експериментів більший обсяг вимірювальної інформації порівняно з амплітудним методом і в зв'язку з цим підвищити точність вимірювання товщини виробів ультразвуковим луна-імпульсним методом.

Розглянутий метод також може знайти застосування в ультразвуковій дефектометрії в завданнях виявлення дефектів типу порушення суцільності зі зменшеними розмірами.

### **5.2. БАГАТОШКАЛЬНІ ФАЗОВІ ВИМІРЮВАННЯ НА ОСНОВІ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ**

Фазовий метод вимірювання ґрунтується на використанні принаймні однієї пари гармонічних сигналів з фазовим зсувом  $\varphi$  між ними як інформативним параметром. Зазвичай цей параметр зв'язаний з вимірюваною фізичною величиною  $L \in [0, L_{\max}]$ , де  $L_{\max}$  — максимальне вимірюване значення, залежністю у вигляді

$$\varphi(L) \equiv kF(L) \pmod{2\pi}. \quad (5.4)$$

Тут  $F(L)$  — деяка функція від  $L$ ;  $k$  — розмірний коефіцієнт. Наприклад, у завданні вимірювання відстані фазовим методом [53, 71] цей коефіцієнт дорівнює  $k = 2\pi/\lambda$ , де  $\lambda$  — довжина хвилі в середовищі її поширення вздовж відстані  $L$ , а  $F(L) = L$ . У цьому випадку  $\varphi(L)$  є порівняним з  $kL$  за модулем  $2\pi$ , що визначає нелінійний характер перетворення (5.4) у значному динамічному діапазоні.

Гомоморфне за умови  $kF(L) \geq 2\pi$  перетворення (5.4) призводить до неоднозначності вимірювання. Ефективна реалізація фазового методу передбачає необхідність однозначного визначення фазових зсувів сигналів у вигляді  $\Phi(L) = kF(L) = 2\pi n(L) + \varphi(L)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Таке завдання відоме як розв'язання (усунення, розрізнення, стикування шкал) фазової неодно-

значності і має розв'язки, які ґрунтуються на додаткових  $i = 1, 2, \dots$  фазових вимірюваннях, наприклад на декількох нижчих частотах (тобто з меншими  $k_i i$ , відповідно, меншою точністю вимірювання  $L$ ) [53, 71]. У цьому випадку вимірювання на кожній з частот утворює свою шкалу з відповідним коефіцієнтом перетворення, а методи подолання багатозначності зводяться до послідовного перерахунку результатів вимірювань з однієї шкали в іншу (якщо для однієї зі шкал виконується умова однозначності:  $k_i F(L_{\max}) < 2\pi$ ), або на переборі всіх можливих значень  $n$  (за суттєвого обмеження  $n$ , що притаманне фазовим пеленгаторам [20]) і виборі найімовірнішого за певним критерієм значення.

Водночас існує інша можливість визначення  $n$ , яка ґрунтується на використанні особливостей числової системи залишкових класів (СЗК) [1, 134]. Ця ідея ґрунтується на подібності модульного зображення фазових зсувів сигналів (5.4) та для запису цілих чисел  $A$  в СЗК залишками у вигляді  $a_i \equiv A \pmod{p_i}$ , де цілі числа  $p_i > 1$  — модулі СЗК.

Найактивніше теорію СЗК розробляли і використовували у галузі обчислювальної техніки для побудови відмовостійких швидкодійних засобів обчислень [1, 13]. У праці [9] запропоновано використання СЗК для опрацювання інтерферограм в оптиці. Автори запропонували використання цієї ідеї для усунення багатозначності у фазових далекомірах та фазових пеленгаторах [43, 45, 49].

**Визначення та особливості СЗК.** Сутність СЗК полягає у зображенні чисел  $A$  з робочого інтервалу  $[0, A_p)$  множиною невід'ємних залишків  $A_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ . Цілі числа  $a_i, i = \overline{1, m}$ , утворюються від ділення  $A$  на інші цілі взаємно прості числа  $p_i, i = \overline{1, m}$ , — модулі СЗК, тобто  $a_i \equiv A \pmod{p_i}$ . Множина всіх залишків за кожним модулем утворює кільце цілих чисел  $\alpha_i \in [0, p_i)$  за відповідним модулем.

Відновлення чисел  $A$  у позиційній системі числення з  $A_{\text{СЗК}}$  ґрунтується на китайській теоремі про залишки [56]: відновлення  $A$  можливе у випадку взаємооднозначної відповідності  $A$  та  $A_{\text{СЗК}}$ , що досягається виконанням таких умов: 1) модулі системи є взаємно простими числами; 2) максимальне відновлюване число задовольняє нерівність  $A_{\max} < A_p = \prod_{i=1}^m p_i$ . За виконання цих

умов існує обернене перетворення  $A_{\text{СЗК}} \Rightarrow A$ . Число  $A$  може бути обчислене, наприклад, за алгоритмом

$$A = \sum_{i=1}^m a_i B_i \pmod{A_p}, \quad (5.5)$$

де  $(B_1, \dots, B_i, \dots, B_m)$  — система ортонормованих базисів, яку обчислюють для вибраних модулів СЗК, наприклад, за викладеною в [1] методикою.

*Приклад 5.1.* Нехай число  $A = 31$  наведено в СЗК за системою модулів  $(5, 7)$ :  $A_{\text{СЗК}} = (1, 3)$ . Число  $A$  задовольняє умову  $A \leq A_{\text{max}} = 34$ ; система ортонормованих базисів дорівнює  $B = (21, 15)$ . Умова ортонормованості полягає у виконанні для елементів базису сукупності співвідношень:

$$\begin{aligned} B_1 \pmod{p_1} &= 21 \pmod{5} = 1, & B_1 \pmod{p_2} &= 21 \pmod{7} = 0, \\ B_2 \pmod{p_1} &= 15 \pmod{5} = 0, & B_2 \pmod{p_2} &= 15 \pmod{7} = 1. \end{aligned}$$

У результаті обчислення за (5.5) отримуємо значення:  $A = (1 \cdot 21 + 3 \cdot 15) \pmod{5 \cdot 7} = 66 \pmod{35} = 31$ .

Головні теореми та твердження про СЗК наведено в [1, 134]. Для обґрунтування використання СЗК у фазометрії важливе значення має таке твердження.

*Твердження 5.1.* Якщо число  $A \in R$  і модуль  $p_i \in N$  мають спільний множник  $a \in N$ , то

$$A \pmod{p_i} = a \left[ \frac{A}{a} \pmod{\left( \frac{p_i}{a} \right)} \right]. \quad (5.6)$$

Твердження 5.1 дає формальні підстави виконувати модульні операції, по-перше, з дійсними числами, по-друге — з іменованими числовими значеннями фізичних величин. Нехай, наприклад, фізична величина та її одиниця вимірювання мають числові значення  $A$  і  $p_i$  та розмірність  $[A]$ . Тоді згідно з (5.6) маємо

$$\{A[A]\} \pmod{\{p_i[A]\}} = (A \pmod{p_i})[A]. \quad (5.7)$$

З (5.6) випливає й інший важливий для практики вимірювання наслідок: якщо фізична величина змінюється за циклами, які чисельно визначаються не цілими числами, існує можливість звести модульні операції з такими величинами до операцій з ці-

лими числами. Для прикладу розглянемо дробову частину повного фазового зсуву сигналів:

$$[\Phi(L)] \bmod 2\pi = 2\pi [(\Phi(L)/2\pi) \bmod 1] \text{ [рад]}. \quad (5.8)$$

З метою оптимізації обчислювальних витрат інколи необхідно визначити залишок  $\alpha_i = A \bmod p_i$  з результатів обчислень за іншим модулем  $p_j$ . Такий перерахунок згідно з (5.6) виконується як

$$\alpha_i = A \bmod p_i = \frac{p_i}{p_j} \left( \frac{Ap_j}{p_i} \bmod p_j \right). \quad (5.9)$$

Якщо, наприклад, вибрати  $p_j = 2^s$ , то залишок  $\alpha_i$  утворюватиметься автоматично в результаті виконання операцій  $Ap_j/p_i$  у разі обмеження розрядної сітки обчислювача  $g$  двійковими розрядами.

Важливою особливістю СЗК є можливість організації контролю (і навіть виправлення) помилок, що виникають під час отримання залишків і виконання арифметичних операцій з ними. Для цього основу СЗК доповнюють додатковим модулем  $p_{m+1} > p_i$ ,  $i \in \overline{1, m}$  (одним або декількома). Нова СЗК має повний діапазон перетворення чисел  $[0, A_p)$ ,  $A_p = p_1 \dots p_m p_{(m+1)} = A_p p_{m+1}$ . Систему модулів  $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_{m+1})$ , яка задовольняє умову  $p_1 < p_2 < \dots < p_{m+1}$ , називають *упорядкованою*, а представлення  $A_{\text{СЗК}, i} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{m+1})$ , отримане з  $A_{\text{СЗК}}$  вилученням залишку  $\alpha_i$ , — *проекцією* числа  $A$  за модулем  $p_i$ . Довільну помилку в одному залишку  $A_{\text{СЗК}}$  називають *однократною*, у двох залишках — *двократною*, в декількох — *багатократною*. Виявлення помилок у  $A_{\text{СЗК}}$  обґрунтовується таким твердженням.

*Твердження 5.2.* Нехай модулі упорядкованої СЗК  $p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}$  є взаємно простими числами і нехай  $A_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$  — правильне число. Тоді число  $\tilde{A}_{\text{СЗК}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \tilde{\alpha}_k \neq \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$  зі спотвореним залишком  $\tilde{\alpha}_k$  — неправильне число.

Отже, довільне спотворення одного із залишків, якими представляється число  $A < A_p$  у СЗК, переводить його у разі відновлення в позиційній системі в інтервал  $[A_p, A_p)$ . Процес перехо-



Рис. 5.9. Ілюстрація процесу спотворення і відновлення цілого числа  $A$

ду в повний діапазон неправильного числа зі спотворенням одного залишку і повернення числа в робочий діапазон після виправлення залишку показано на рис. 5.9.

Спотворення будь-якого залишку в новому представленні  $(a_1, \dots, a_{m+1})$  призводить до того, що відновлене число  $\tilde{A} = \left( \sum_{i=1}^{m+1} a_i B'_i \right) \pmod{A_n}$ , де  $(B'_1, \dots, B'_i, \dots, B'_{m+1})$  — нова система ортонормованих базисів, переходить з робочого діапазону  $[0, A_p)$  (з діапазону так званих правильних чисел) у діапазон  $[A_p, A_p p_{m+1})$ , що є ознакою помилки.

Твердження 5.2 дає теоретичне підґрунтя для виявлення і виправлення помилок у даних, поданих кодами СЗК. Критерієм відсутності помилки в  $A_{\text{СЗК}}$  є виконання умови

$$A = \left[ \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i B_i \right] \pmod{A_n} < A_p. \quad (5.10)$$

Перевірку неушкодженості  $A_{\text{СЗК}}$  можна виконати і в інший спосіб — порівнянням різних проєкцій відновленого числа. За даними [1] введення лише одного додаткового модуля  $p_{m+1} > p_m$  дає змогу виявляти всі однократні помилки і близько 95 % двократних помилок.

*Твердження 5.3.* Нехай у СЗК з упорядкованими модулями  $p_1, p_2, \dots, p_m, p_{m+1}$ , які є взаємно простими числами, задано правильне число  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{m+1})$ . Відновлені за проєкціями  $A_{\text{СЗК},i}$  за різними основами СЗК числа  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_{m+1}$  збігаються, тобто

$$A_1 = A_2 = \dots = A_i = \dots = A_{m+1} = A. \quad (5.11)$$

Якщо  $A > A_p$ , а проекція  $A_i < A_p$ , це свідчить про наявність помилки в  $i$ -му залишку. Корекція виявлених помилок потребує додаткових обчислень і може бути виконана за наведеними в [1, 49] методами.

**Застосування СЗК для вимірювання відстані у фазових далекомірах.** Нехай гармонічний сигнал (наприклад, електромагнітної природи) поширюється вздовж відстані  $D$  у прямому і зворотному напрямках, що призводить до фазового зсуву сигналів  $\Phi(D) = 4\pi D\lambda^{-1}$ :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \sin(2\pi ft), \quad t \in [0, T_c]; \\ u_2(t, x) &= U_2 \sin[2\pi ft - \Phi(D)], \quad t \in [0, T_c], \end{aligned} \quad (5.12)$$

де  $T_c, f$  — відповідно час спостереження та частота сигналу.

Доступним вимірюванню є фазовий зсув:

$$\varphi(D) \equiv \Phi(D) \bmod 2\pi \equiv 4\pi D\lambda_i^{-1} \bmod 2\pi. \quad (5.13)$$

Нехай визначається незмінна на інтервалі часу спостереження  $T_c$  відстань  $D \in (0, D_{\max})$  з дискретним кроком  $d_0$ . Організуємо вимірювання фазових зсувів сигналів (5.12) на  $m$  частотах  $\{f_i, i = \overline{1, m}\}$  з довжинами хвиль  $\lambda_i \ll D_{\max}$  таким чином. Робочі частоти виберемо кратними взаємно простим числам  $p_i, i = \overline{1, m}$ :

$$f_i = v/p_i d_0 = v/\lambda_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.14)$$

де  $v$  — швидкість поширення хвиль у середовищі.

Множина гармонічних сигналів з частотами (5.14) є множиною з ортогональними компонентами на часовому інтервалі  $T_{\text{опт}} = d_0/v \prod_{i=1}^m p_i$ , що дає змогу застосовувати полігармонічний сигнал і виконувати фазові вимірювання одночасно на всіх частотах.

Результатом вимірювання є вектор фазових зсувів сигналів  $\overline{\varphi_m} = (\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_m)$ ; для кожного  $\varphi_i(D)$  виконується порівняння:  $\varphi_i(D) \equiv 4\pi D\lambda_i^{-1} \pmod{2\pi}$ . Вектор  $\overline{\varphi_m}$  однозначно визначає відстань  $D$ .

Порівняння (5.13) згідно з (5.6) запишемо у вигляді

$$\frac{\varphi_i(D)}{2\pi} p_i \equiv \frac{2D}{\lambda_i} p_i \pmod{p_i}. \quad (5.15)$$

Виберемо дискретний крок вимірювання фазових зсувів сигналів:

$$\Delta\varphi_i = 2\pi/p_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.16)$$

Тоді порівняння (6.15) можна записати так:

$$\frac{\varphi_i(D)}{\Delta\varphi_i} \equiv \frac{2D}{d_0} \pmod{p_i}. \quad (5.17)$$

Узявши до уваги лише цілі частини порівняння (5.17), отримаємо залишки:

$$\alpha_i(D) = [\varphi_i(D)/\Delta\varphi_i]^+. \quad (5.18)$$

Вибір значень  $\Delta\varphi_i$  і процесу визначення залишків  $\alpha_i(D)$  для системи модулів (5, 7) ілюструє рис. 5.10, для якого  $A = 24$ ,  $A_{\text{СЗК}} = (4, 3)$ .

На підставі визначених на всіх  $i = \overline{1, m}$  частотах залишків складаємо систему порівнянь:

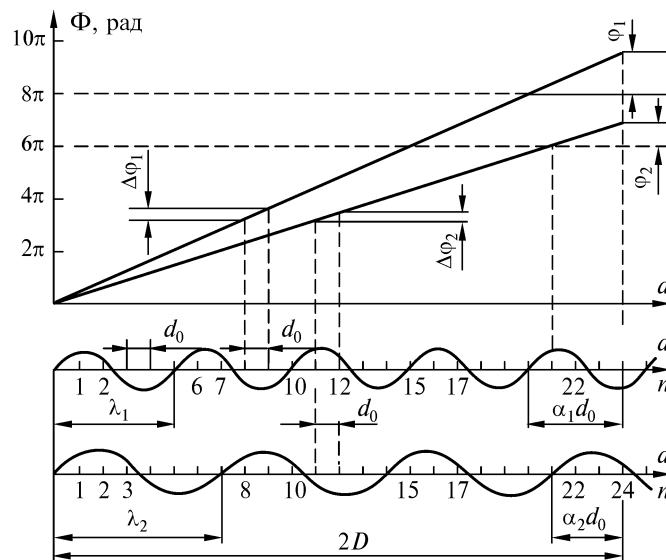


Рис. 5.10. Графічна ілюстрація процесу зображення результатів вимірювання фазових зсувів сигналів (відстані) цілими числами в СЗК з модулями (5, 7)

$$\begin{cases} \alpha_1(D) \equiv A(D) \pmod{p_1}, \\ \dots \\ \alpha_i(D) \equiv A(D) \pmod{p_i}, \\ \dots \\ \alpha_m(D) \equiv A(D) \pmod{p_m}. \end{cases} \quad (5.19)$$

У (5.19) число  $A(D)$  дорівнює кількості відрізків довжиною  $0,5d_0$ , що вкладається на вимірюваній відстані, а  $\alpha_i(D)$  — залишки  $A(D)$  за модулями  $p_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Таким чином, накладені на вибір частот та дискретність вимірювання фазових зсувів початкові умови (5.14) і (5.16) дають змогу зобразити числовий результат вимірювання  $A(D)$  залишками цього числа за системою модулів  $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_m)$  і звести розв'язання неоднозначності фазових вимірювань до завдання відновлення числа  $A(D)$  з  $A(D)_{\text{СЗК}} = (\alpha_1(D), \dots, \alpha_i(D), \dots, \alpha_m(D))$ .

За належного вибору  $p_i$  та  $m$  результат вимірювання відстані має вигляд

$$D = \frac{d_0}{2} \left[ \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\varphi_i(D)}{\Delta\varphi_i} \right]^+ B_i \right] \pmod{A_p}. \quad (5.20)$$

Отже, визначення відстані за виразом (5.20) подібне відновленню числа  $A$  за його поданням  $A_{\text{СЗК}}$ , а між даними СЗК і параметрами сигналів існує відповідність:

$$n_i \Rightarrow f_i, \quad a_i \Rightarrow \varphi_i, \quad A \Rightarrow \Phi. \quad (5.21)$$

*Приклад 5.2.* Вимірюємо відстань 1955,1 м з кроком 1 м ( $D = 1955,1$  м,  $d_0 = 1$  м) і модулі СЗК:  $p_1 = 13, p_2 = 17, p_3 = 19$ . Використовуємо електромагнітні хвилі ( $v = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Робочий діапазон СЗК:  $A_p = p_1 p_2 p_3 = 13 \cdot 17 \cdot 19 = 4199$ .

Перевіркою умови однозначного вимірювання відстані  $D < D_{\text{max}}$  отримуємо

$$D_{\text{max}} = 0,5d_0 A_{\text{max}} = 0,5 \cdot 4198 = 2099 \text{ м} > D.$$



У результаті обчислення частот згідно з (5.14) маємо

$$f_1 \approx 23,077 \text{ МГц}, f_2 \approx 17,647 \text{ МГц}, f_3 \approx 15,789 \text{ МГц}.$$

Ортонормовані базиси для обраної системи модулів СЗК становлять

$$B_1 = 1938, B_2 = 494, B_3 = 1768.$$

Перевіряємо умову правильності визначення базисів:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^3 B_i \right] (\text{mod } A_p) &= [1938 + 494 + 1768] (\text{mod } 4199) = \\ &= [4200] (\text{mod } 4199) = 1. \end{aligned}$$

Розрахункові вихідні дані —  $\Delta\varphi_i$ , отримані за (5.16) і  $\varphi_i(D)$  (5.13), зведено в табл. 5.2.

На етапі опрацювання даних спочатку визначаємо залишки  $\alpha_i(D)$  (5.18) і за відсутності похибок вимірювань отримуємо

$$\alpha_1(D) = 10, \alpha_2(D) = 0, \alpha_3(D) = 15.$$

Результат вимірювання відстані згідно з (5.20) формуємо у вигляді

$$\begin{aligned} D &= 0,5 \cdot [10 \cdot 1938 + 0 \cdot 494 + 15 \cdot 1768] (\text{mod } 4199) = \\ &= 0,5 \cdot 45900 (\text{mod } 4199) = 1955 \text{ м}. \end{aligned}$$

Фазовий метод дає змогу виконати уточнення результату, отриманого в межах одного кроку. Зазначимо, що модульна арифметика потребує безпомилкових вихідних даних для правильного відновлення чисел. Навіть незначні похибки вимірювання фазових зсувів сигналів здатні призвести до спотворення кінцевого результату. Тому обчислення доцільно виконувати в розширеній СЗК із застосуванням методів виявлення/корекції помилок.

**Застосування СЗК для визначення азимуту у фазовому пеленгаторі.** Фазові радіопеленгатори [10] при-

Таблиця 5.2. Вихідні дані

Параметр	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$\Delta\varphi_i$ , рад	0,4833	0,3696	0,3307
$\varphi_i(D)$ , рад	4,9361	0,0691	4,9876

значені для визначення пеленга — кута між напрямком на джерело радіосигналів з гармонічною носівною та однією з площин, яку взято за початок відліку кутових координат. В авіаційній і морській навігації під пеленгом розуміють азимут. Принцип дії радіопеленгаторів ґрунтується на тому факті, що нормаль до фазового фронту плоскої хвилі, поширюваної в однорідному середовищі, збігається в просторі із напрямком на джерело випромінювання. Інформацію стосовно орієнтації фазового фронту хвилі в просторі отримують за результатами вимірювання та аналізу фазових зсувів сигналів, які вважають рознесеними в просторі елементами лінійних антен (рис. 5.11).

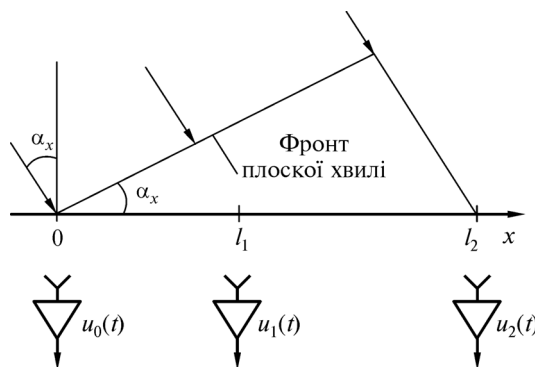
Останні повинні мати широкі діаграми напрямленості та ідентичні фазочастотні характеристики. Для підвищення точності визначення пеленга в широкому діапазоні значень використовують антенні системи з декількома базами та збільшують величини баз (під базою розуміють відстань між фазовими центрами антен).

Прийняті сигнали мають вигляд

$$u(t, \alpha_x, l_i) = U_i \cos[2\pi ft - \varphi_i(\alpha_x, l_i)], \quad t \in [0, T_c), \quad (5.22)$$

де  $U_i, f, \varphi_i(\alpha_x, l_i)$  — амплітуда, частота і початкова фаза сигналу на виході  $i$ -го елемента антени ( $i = 0, 1, 2$ ),  $\varphi_{1,2} \in [0, 2\pi)$ ,  $\varphi_0 = 0$ ;  $l_i$  —  $i$ -та база антени;  $T_c$  — час спостереження сигналу,  $T_c > 1/f$ ;  $\alpha_x$  — вимірюваний азимут.

Елементи лінійної антени у двобазовому фазовому пеленгаторі (див. рис. 5.11) рознесені у просторі відносно опорного елемента (з індексом  $i = 0$ ) на відстані  $l_1, l_2$ . Вважають, що відстань



**Рис. 5.11.** Схема приймання сигналу рознесеними у просторі елементами антени пеленгатора

від антени до джерела сигналу набагато більша за  $l_2$ , що дає змогу вважати хвилю плоскою,  $l_1 = p_1 \Delta l$ ,  $l_2 = p_2 \Delta l$ , де  $\Delta l$  — квант баз антени;  $p_1, p_2$  — цілі числа.

Затримка сигналів, що надходять на перший і другий елементи антени, відносно нульового елемента становить

$$\tau_i(\alpha_x, l_i) = l_i \sin \alpha_x / v, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5.23)$$

Повні фазові зсуви сигналів між нульовим та  $i$ -м ( $i = 1, 2$ ) елементами антени аналітично визначають так:

$$\Phi_i(\alpha_x, l_i) = 2\pi l_i \lambda^{-1} \sin \alpha_x, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (5.24)$$

а їх доступні однозначному вимірюванню частини в межах  $[0, 2\pi)$  — за формулою

$$\varphi_i(\alpha_x, l_i) = 2\pi \Delta l p_i \lambda^{-1} \sin \alpha_x \pmod{2\pi}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (5.25)$$

Модульний характер залежності  $\varphi_i(\alpha_x, l_i)$  від азимуту зумовлює можливість усунення багатозначності вимірювань  $\alpha_x$ , базуючись на застосуванні модулярної арифметики.

Отримаємо умови, за яких задача усунення багатозначності вимірювань  $\alpha_x$  у фазовому пеленгаторі зводиться до задачі відновлення цілого числа з його зображення в СЗК.

*Твердження 5.4.* Для того щоб результати вимірювання у двобазовому фазовому пеленгаторі, у випадку однопроменевого поширення гармонічного сигналу від одного джерела випромінювання можна було представити залишками в СЗК з модулями  $(p_1, p_2)$ , необхідно виконання таких умов:

- 1) бази пеленгатора мають бути кратними числами  $(p_1, p_2)$ ;
- 2) кванти вимірювання фазових зсувів сигналів у каналах пеленгатора слід обирати з умови  $\Delta\varphi_{1(2)} = 2\pi/p_{2(1)}$ .

Це твердження не важко довести. Позначимо довжину хвилі у середовищі поширення сигналу  $\lambda$ , а бази пеленгатора —  $l_1 = p_1 \Delta l$ ,  $l_2 = p_2 \Delta l$ . Нехай хвиля приходить на пеленгатор під кутом  $\alpha_x$ . Вимірювання фазових зсувів в інтервалі  $[0, 2\pi)$  в каналах пеленгатора відбувається без похибок. Повний фазовий зсув у каналах пеленгатора визначають за виразом (5.24).

Для зображення даних пеленгатора в СЗК необхідно забезпечити рівність квантів кута на різних базах. Ця умова трансформується в умову вибору різних квантів вимірювання відстані, яку проходить сигнал у різних каналах пеленгатора. З урахуванням логіки представлення даних в СЗК та з метою узгодження модульних операцій з визначення залишків та довжини хвилі  $\lambda$  необхідно виконати умови

$$\lambda = \lambda_0 p_1 q_1, \quad \lambda = \lambda_0 p_2 q_2, \quad (5.26)$$

де  $\lambda_0$  — частина довжини хвилі,  $q_1, q_2, p_1, p_2 \in N$ . З (5.26) випливає, що  $p_1 q_1 = p_2 q_2$ . Цю рівність можна перетворити на тотожність, поклавши  $q_1 = p_2$ ,  $q_2 = p_1$ , тоді  $\lambda_0 = \lambda / p_1 p_2$ . Отже, квантування відстаней для різних баз необхідно виконати з кроками

$$\Delta \lambda_1 = \lambda / p_2, \quad \Delta \lambda_2 = \lambda / p_1. \quad (5.27)$$

Квантуванням відстані  $l_{1(2)} \sin \alpha_x$  квантами (6.27) отримуємо залишки

$$a_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) \equiv \left[ \frac{l_{1(2)} \sin \alpha_x}{\Delta \lambda_{1(2)}} \right]^+ \bmod p_{2(1)} \equiv \left[ \frac{\Delta l \sin \alpha_x}{\lambda_0} \right]^+ \bmod p_{2(1)}. \quad (5.28)$$

Використовуючи твердження 5.1, зводимо (5.28) до вигляду

$$a_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) \equiv \left[ \frac{p_{2(1)}}{2\pi} \left( \frac{2\pi l_1 \sin \alpha_x}{\lambda} \bmod 2\pi \right) \right]^+. \quad (5.29)$$

З (5.29) маємо доступну для вимірювання частину  $\Phi_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)})$ :

$$\begin{aligned} 2\pi a_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) / p_{2(1)} &= \varphi_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) = \\ &= (2\pi l_{1(2)} \lambda^{-1} \sin \alpha_x) \bmod 2\pi = \Phi_{1(2)}(\alpha_x, l_{1(2)}) \bmod 2\pi, \end{aligned} \quad (5.30)$$

що і треба було довести.

Враховуючи наведене вище, обчислюємо напрямний синус з похибкою до кванта фазового зсуву:

$$\sin \alpha_x = A\lambda / \Delta l p_1 p_2^2 = \lambda \left( \sum_{i=1}^2 a_i(\alpha_x, l_i) B_i \right) (\bmod A_p) / \Delta l p_1 p_2^2. \quad (5.31)$$

З рівняння (5.31) отримуємо однозначне в широкому секторі кутів значення азимуту, але зі значною похибкою квантування.

Для підвищення точності визначення  $\alpha_x$  за рахунок використання можливостей прецизійного вимірювання фазових зсувів сигналів у (5.31) замість числа  $A$  необхідно підставити його уточнене (з дробовою частиною) значення:

$$A_T = (\alpha_1(\alpha_x, l_1) B_1 + \alpha_2(\alpha_x, l_2) B_2) \bmod A_p - \left[ \frac{p_1}{2\pi} \left( \frac{2\pi \Delta l \sin \alpha_x}{\lambda} \right) \bmod 2\pi \right]^+ + \frac{p_1}{2\pi} \left( \frac{2\pi \Delta l \sin \alpha_x}{\lambda} \right) \bmod 2\pi. \quad (5.32)$$

З урахуванням (5.31) і (5.32) значення азимуту обчислюємо так:

$$\alpha_x = \arcsin(A_T \lambda / \Delta l p_1 p_2). \quad (5.33)$$

Сектор однозначного визначення азимуту обмежений кутом:

$$\alpha_{x, \max} = \arcsin(A_{\max} \lambda / \Delta l p_1 p_2). \quad (5.34)$$

*Приклад 5.3.* Нехай плоска гармонічна електромагнітна хвиля надходить на двобазову лінійну антену (див. рис. 5.11) під кутом  $\alpha_x = 60, 75^\circ$ . Задамо відношення  $\Delta l / \lambda = 1, 1$ , і нехай бази антени відносяться як  $l_1 / l_2 = 11 / 13$ . Необхідно визначити азимут  $\alpha_x$  за результатами вимірювання фазових зсувів сигналів пеленгатора, застосовуючи для усунення фазової багатозначності СЗК. Похибка вимірювання фазових зсувів сигналів відсутня.

На підставі вихідних даних приймаємо  $p_1 = 11$ ,  $p_2 = 13$ , отже,  $A_p = 11 \cdot 13 = 143$ . Коректність поставленої задачі підтверджується виконанням умови  $\alpha_x < \alpha_{x, \max}$ :

$$\alpha_{x, \max} = \arcsin\left(\frac{11 \cdot 13 - 1}{11 \cdot 13 \cdot 1, 1}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 64, 2^\circ > \alpha_x = 60, 75^\circ.$$

Розв'язання задачі виконано у два етапи. На першому підготовлено дані для обчислень: ортонормований базис —  $B_1 = 66$ ,  $B_2 = 78$ . Обчислені за (5.24), (5.25) очікувані фазові зсуви сигналів зведено в табл. 5.3.

На другому етапі за отриманими  $\varphi_i(\alpha_x)$  визначаємо  $\alpha_x$ .

Обчислюємо залишки за виразом (5.30) і отримуємо

Таблиця 5.3. Фазові зсуви сигналів

Фазовий зсув	База $l_1$	База $l_2$
$\Phi_i(\alpha_x)$ , рад	6,33628	78,3933
$\varphi_i(\alpha_x)$ , рад	3,501	2,9951

$$a_1(\alpha_x, l_1) = [13 \cdot 3,501/2\pi]^+ = 7, \quad a_2(\alpha_x, l_2) = [11 \cdot 2,9951/2\pi]^+ = 5.$$

Знаходимо число  $A$  за формулою (5.5):

$$A = (7 \cdot 66 + 5 \cdot 78) \bmod(143) = 137,$$

а його уточнене значення — за формулою (5.32):

$$A_r = 137 - 5 + 5,2435 = 137,2435.$$

Азимут визначаємо за (5.33):

$$\alpha_x = \arcsin\left(\frac{137,2435}{1,1 \cdot 11 \cdot 13}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 60,7499^\circ,$$

що відповідає вихідним даним прикладу 5.3.

У пеленгаторах на базі СЗК ознакою спотворення одного залишка є отримання результату з множини комплексних чисел.

Для порівняльного аналізу застосування СЗК для багатоскалькових фазових вимірювань у далекомірах та пеленгаторах у табл. 5.4 наведено їхні характеристики.

Таким чином, доведено можливість зображення даних вимірювань у фазових далекомірах і пеленгаторах у СЗК і на підставі цього розв'язання багатозначності фазових вимірювань. Поєднання СЗК і фазового методу вимірювання забезпечує останньому унікальну властивість — можливість виявлення і виправлення грубих помилок вимірювання. Пошук спотворених залишків та їх вилучення/виправлення реалізуються збільшенням елементів антени (у пеленгаторі) або робочих частот (у далекомірі) та ускладненням алгоритму опрацювання даних вимірювань. Це сприяє збереженню працездатності таких засобів вимірювання за умов значного зменшення відношення сигнал/шум.

Таблиця 5.4. Результати фазових вимірювань у далекомірах і пеленгаторах

№	Характеристика	Фазовий далекомір	Фазовий пеленгатор
1	Вимірюваний параметр $L$ , одиниця вимірювання	Відстань, метр	Площинний кут, радіан
2	Характер залежності $\varphi(L)$	Лінійна	Нелінійна
3	Кількість робочих частот	$m$	1
4	Кількість вимірювальних каналів	1	$m + 1$
5	Орієнтовна кількість цілих фазових циклів $n$ , що визначається однозначно	~100—1000	~10—40
6	Необхідна кількість модулів СЗК	3—7	2—4

### 5.3. СТАТИСТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ ДАНИХ У СИСТЕМАХ МОНІТОРИНГУ ПАРАМЕТРІВ ДОВКІЛЛЯ НА БАЗІ БЕЗПІЛОТНИХ АВІАЦІЙНИХ КОМПЛЕКСІВ

Для розв'язання прикладних задач контролю параметрів довкілля особливо важливими є [4]:

- оцінка просторового розподілу шкідливих викидів з метою визначення найімовірніших напрямків їхнього поширення з прив'язкою до географічних координат;
- порівняльний аналіз розвитку у просторі та часі негативних процесів техногенного характеру;
- аналіз процесів надходження, накопичення і поширення шкідливих речовин від джерел забруднення з урахуванням ландшафтних та фізико-географічних особливостей місцевості розташування джерел забруднення;
- прогнозування найімовірніших сценаріїв розвитку процесів впливу шкідливих речовин на довкілля.

Вирішення цих питань дає змогу створювати нові й удосконалювати існуючі моделі поширення впливу шкідливих викидів, техногенних інцидентів та катастроф і приймати обґрунтовані управлінські рішення з метою мінімізації наслідків аварій.

Отримання виміральної інформації для вирішення таких завдань доцільно виконувати за допомогою комп'ютеризованих інформаційно-вимірвальних систем (КІВС) на базі безпілотних авіаційних комплексів (БАК). Така реалізація апаратної складової системи контролю довкілля дає змогу зберігати працездатність системи в широкому діапазоні змін метеорологічних умов, пори року та доби; вести хімічну та радіаційну розвідки; оперативно переналаштовувати систему на контроль різних шкідливих речовин; змінювати відповідно до завдання перелік точок чи трас контролю; встановлювати, за наявності підсистеми контролю поточного часу, причинно-наслідкові зв'язки між різними подіями в зоні контролю; контролювати параметри та характеристики довкілля в небезпечних для людини умовах; розробляти і уточнювати моделі процесів атмосферного перенесення радіонуклідів та інших шкідливих речовин й їх осадження на земну поверхню для оцінювання та прогнозування забруднення довкілля шкідливими викидами з об'єктів енергетики; отримувати надійні експериментальні дані.

У КІВС на базі БАК зазвичай передбачається переміщення датчиків у просторі в районі джерел забруднення по певних замк-

нених траєкторіях. Останні можуть змінюватися внаслідок зміни рози вітрів, інших метеорологічних умов або завдань контролю. Поточне положення безпілотного літального апарата (БПЛА) з сенсорами у просторі та часі періодично фіксується з достатньою точністю, наприклад, за допомогою системи GPS.

Отримана в такий спосіб первинна вимірювальна інформація, наприклад потужність експозиційної дози або рівень радіаційного фону, що визначається за допомогою лічильників Гейгера—Мюллера, може бути використана для побудови гістограм розподілу цих даних, полів градієнтів функцій, ліній однакових рівнів забруднення (ізоліній) простору різними шкідливими викидами тощо.

У процесі опрацювання первинних вимірювальних даних постає інша важлива задача — їх аналіз у полярній системі координат, що сприятиме вивченню та прогнозуванню найнебезпечніших напрямків поширення шкідливих викидів методами статистичного аналізу кутових спостережень [1, 49].

Розглянемо завдання аналізу первинних даних контролю доквілля за допомогою КІВС на базі БАК. Нехай БПЛА рухається в околі об'єкта контролю на значній відстані від нього та незмінній висоті по замкненій траєкторії, яка є кривою другого порядку. Ця траєкторія охоплює джерело шкідливих викидів, розміри якого значно менші за розміри траєкторії. Це допускає розглядати джерело забруднення атмосфери як точкове, координати якого на поверхні землі  $(x_0, y_0)$  відомі. Дані сенсора — результати вимірювання параметра  $s$  отримують за умови регулярної, тобто періодичної в часі, дискретизації з детермінованим періодом  $T_d$  і з прив'язкою в часі та просторі, тобто як функцію  $s(x, y, t, \bar{p})$ , де  $\bar{p}$  — вектор метеопараметрів.

Необхідно побудувати круговий розподіл у просторі параметра  $s$ .

Розв'язання цієї вимірювальної задачі має певні особливості, характерні для кутових вимірювань. Для спрощення задачі вважатимемо умови проведення вимірювального експерименту незмінними (стаціонарними), що дає змогу розглядати результати експерименту як незалежні від аргументів  $t$  та  $\bar{p}$ .

Процес накопичення первинної вимірювальної інформації відбувається під час руху БАК уздовж замкненої траєкторії. Наприклад, на рис. 5.12 у декартовій системі координат  $xOy$  такою траєкторією є зовнішня крива 2. Початок системи координат  $x_0 = 0, y_0 = 0$  прив'язаний до джерела викидів. На траєкторії польоту позначено множину точок  $(A, B, C, D, E, F, G, H, J)$  з відомими координа-



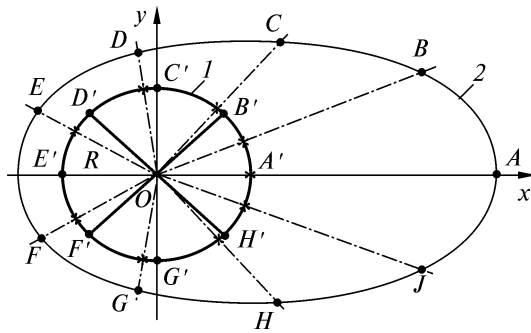


Рис. 5.12. Приклад відображення результатів спостережень з довільної кривої другого порядку (крива 2) на коло (крива 1)

тами, в яких відбувається визначення контрольованого параметра. На рис. 5.2 ці точки розподілено рівномірно по зовнішній кривій (тобто з однаковими відстанями між точками по траєкторії польоту), що за умови регулярної дискретизації можливе за відсутності вітру, тобто коли  $V = 0$ . Якщо спроектувати ці точки на коло радіуса  $R$  (крива 1), отримуємо множину нерівномірно розподілених по колу точок (на рисунку вони позначені зірочками). Така трансформація даних з кривої 2 на криву 1 у кожному окремому випадку має виконуватися з урахуванням координат точок на цих кривих та фізики формування полів шкідливих викидів чи випромінювань.

За наявності вітру або інших дестабілізуючих метеофакторів кутова нерівномірність отримуваних експериментальних даних посилюватиметься. Така нерегулярність не є штучною, а виникає природно як наслідок способу отримання первинної вимірювальної інформації за допомогою БПЛА, тому її принципово не можна усунути вибором режиму її збирання.

Опрацювання даних вимірювань у випадку нерівномірної дискретизації на колі виконувати вкрай незручно. З огляду на це доцільно виконати прив'язку експериментальних даних до множини точок розбиття кола на рівні клас-інтервали. На рис. 5.12 такі точки позначено ( $A', B', C', D', E', F', G', H'$ ). Їх отримано розбиттям центрального кута величиною  $2\pi$  на вісім рівних клас-інтервалів завбільшки  $\Delta\theta = \pi/4$ . Значення параметра в цих точках можна отримати інтерполяцією нерівномірно розподілених по колу даних. У загальному випадку кількість клас-інтервалів може не збігатися з множиною точок на кривій 2.

За значного числа точок розбиття достатньо застосувати лінійну інтерполяцію. Об'єктивні умови проведення вимірюваль-

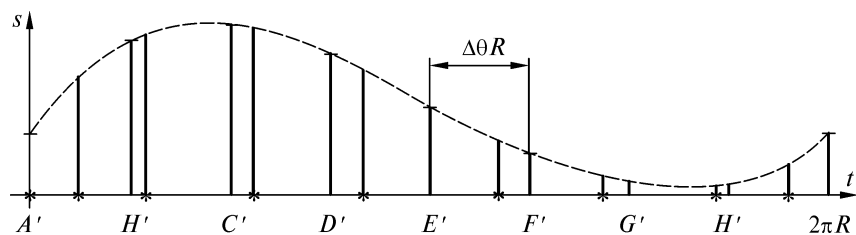


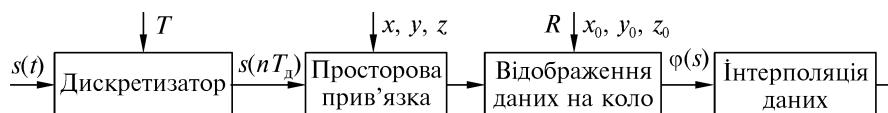
Рис. 5.13. Ілюстрація переходу до рівномірної на колі дискретизації даних інтерполяцією нерівномірно дискретизованих вхідних даних

ного експерименту можуть призвести до зменшення кількості вузлів інтерполяції. До такого наслідку, наприклад, призводить відсутність каналу радіозв'язку. У цьому випадку вимірювальна інформація разом з відповідними просторовими координатами накопичується на борту БПЛА. За обмеженого обсягу ОЗУ та значного загального часу польоту це зумовлює необхідність збільшення інтервалу дискретизації і розв'язання задачі апроксимації наведених на колі розріджених даних. У разі зменшення точок розбиття і необхідності точнішого відтворення залежності  $s(t)$  використовують інтерполяцію поліномами вищих порядків.

Приклад апроксимації даних і переходу від нерівномірної до рівномірної за кутом дискретизації показано на рис. 5.13. На цьому рисунку коло радіуса  $R$  зображено у вигляді розгортки завдовжки  $2\pi R$ .

За отриманим в такий спосіб розподілом у просторі значень параметра  $s$  необхідно визначити кутові статистики, що оцінюють ймовірнісні характеристики кутового розподілу цього параметра в околі джерела викидів. Методологія опрацювання таких вимірювань у КІВС на базі БАК і отримання кутових статистик розподілу контрольованих величин у просторі показана на рис. 5.14 за допомогою структури алгоритму опрацювання експериментальних даних.

Розглянемо детальніше питання отримання кутових статистик розподілу у просторі параметра  $s$ . З цією метою представив-



мо отримані дані в циліндричній системі координат  $(\rho, \theta, s)$ . Значення параметра  $s$  відображаються ламаною (або кривою після інтерполяції експериментальних даних) на циліндричній поверхні, як це показано на рис. 5.15. Для зручності вибрано радіус в основі циліндра  $R = 1$ , що не впливає на співвідношення кутів і отримувані кутові статистики. Таке спрощення полегшує аналіз, спрощує аналітичні результати і є загальноприйнятим у теорії статистичного аналізу кутових спостережень.

Обґрунтуємо перехід від вибірки значень параметра  $s[j]$ ,  $j = \overline{1, m}$ , до вибірки кутів таким чином. Нехай за результатами попереднього оброблення отримали  $j$  клас-інтервалів з центрами в точках  $\theta[j] = 2\pi(j - 0,5)/m$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Для перенесення ймовірнісних властивостей параметра  $s$  на вибірку кутів необхідно вибрати частоту попадання кутів у  $j$ -й клас-інтервал пропорційною відповідному відносному значенню:

$$s^*[j] = \left[ s[j] \left( \sum_{j=1}^m s[j] \right)^{-1} K \right]^+, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.35)$$

У виразі (5.35) значення  $s^*[j]$  трактують як кількість отриманих значень кута в  $j$ -му клас-інтервалі. Для узгодження числових значень  $s^*[j]$  з їх змістом та отримання цілочислових значень кількості  $s^*[j]$  у формулу (5.35) уведено безрозмірний коефіцієнт  $K$  та операцію виділення цілої частини числа. Чим більше  $K$ , тим меншою є похибка заокруглення. Доцільно обирати  $K$  таким, щоб похибка заокруглення не перевищувала  $\sim 10^{-3}$ , що дає змогу нехтувати нею порівняно з відносною похибкою вимірювання контрольованого параметра. Величини  $s^*[j]/K$ ,  $j = \overline{1, m}$ , — це стовпчики кругової гистограми, які відповідають емпіричним значенням щільності ймовірності вимірюваного параметра. Формулу (5.35) отримано для ступінчастої інтерполяції розподілу параметра  $s$ . За інтерполяції поліномами вищих порядків значення частот можна знайти за формулою

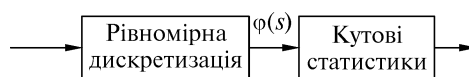


Рис. 5.14. Структура алгоритму формування та опрацювання кутових даних у КІВС на базі БАК

$$s^*[j] = \left[ K \frac{2\pi m^{-1j} \int s(l)dl}{2\pi m^{-1(j-1)} \int_0^{2\pi} s(l)dl} \right]^+, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.36)$$

За результатами такої трансформації маємо  $m$  множин кутів:

$$\begin{aligned} & (\theta_1[1], \dots, \theta_{s^*[1]}[1]), \\ & \dots \\ & (\theta_1[j], \dots, \theta_{s^*[j]}[j]), \\ & \dots \\ & (\theta_1[m], \dots, \theta_{s^*[m]}[m]). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ці множини в сукупності утворюють статистику кутів  $\Theta$  обсягом

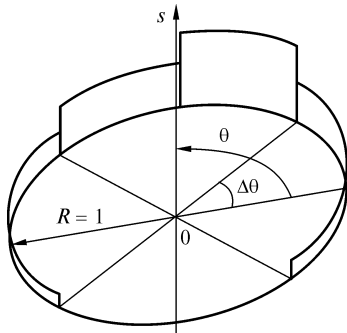
$$M = \sum_{j=1}^m s^*[j]. \quad (5.38)$$

Для отриманої в такий спосіб статистики  $\Theta$  визначають синус- та косинус-моменти  $n$ -го порядку відносно нульового напрямку:

$$C_n = M^{-1} \sum_{j=1}^m s^*[j] \cos(n\theta[j]), \quad S_n = M^{-1} \sum_{j=1}^m s^*[j] \sin(n\theta[j]). \quad (5.39)$$

У формулах (5.39) важливим є застосування вагового оброблення кутів коефіцієнтами  $s^*[j]$ . Така процедура є суттєвою і забезпечує ймовірнісне зображення розподілу в просторі різних фізичних величин єдиною безрозмірною кутовою мірою. Це дає змогу уніфікувати процес опрацювання різнорідних фізичних величин, які отримано за даними польотної інформації БПЛА, та виконати їх кутовий аналіз.

Через визначені синус- та косинус-моменти (5.39) статистики  $\Theta$



можна оцінити інші, застосовувані в теорії статистичного аналізу кутових спостережень вибіркові кругові характеристики: кругове середнє, довжину результуючого вектора, кругові дисперсію і стандартне відхилення, кругові медіану і моду та ін.

**Рис. 5.15.** Графічне зображення розподілу параметра  $s(l)$  в циліндричній системі координат

## **МОДЕЛІ І МІРИ ДЛЯ БЕЗЕТАЛОННИХ ВИМІРЮВАНЬ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Віртуальну міру для оцінювання характеристик композитних матеріалів можна розглядати як образ сигналу або сигнального поля, отриманий з використанням імітаційної моделі, побудованої на базі апріорної інформації про закономірності зміни характеристик інформаційного сигналу за відповідної зміни стану досліджуваного об'єкта. Знання про характер змін інформаційних сигналів можна отримати або експериментально з використанням еталонних зразків (фізичних мір), або на базі математичного моделювання — побудови функціональної залежності зміни інформативної ознаки від зміни стану. Віртуальні міри дають змогу створювати бібліотеки образів інформаційних сигналів, що дає можливість відмовитися від матеріальних мір (стандартних зразків, що відтворюють стан об'єкта дослідження) під час навчання та налаштування діагностичних систем.

До методів створення віртуальних мір можна віднести здатність деяких нейромережових класифікаторів проводити кластерний аналіз і створювати нові класи або образи, які не відтворювалися як еталонні під час навчання.

Віртуальні міри дають змогу моделювати й імовірнісні міри у вигляді стохастичних спотворень інформаційних сигналів або сигнальних полів та різного роду шуму (наприклад, шуму квантування під час дослідження характеристик вимірювальних систем, або структурного шуму, притаманного різного роду середовищам).

Створення віртуальних мір дає можливість підійти до вирішення проблеми безеталонної діагностики, коли створення фізичних еталонів, що відтворюють різні типи дефектів і стани об'єкта дослідження, є ускладненим або неможливим.

### **6.1. МЕТОД ПОБУДОВИ ВІРТУАЛЬНИХ МІР ДЛЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ**

Процес діагностування складних об'єктів характеризується великим впливом випадкових чинників, зумовлених змінами властивостей об'єктів, які виникають внаслідок складності процесів виготовлення, монтажу та експлуатації, великою кількістю типів можливих дефектів, які не піддаються формалізованому опису, недосконалістю методик контролю і діагностичного обладнання та ін.

Достовірність контролю в такому разі визначається не лише використаними фізичними методами отримання інформації про технічний стан об'єкта, а й математичними моделями, покладеними в основу методів діагностики, та методами опрацювання інформації, з метою формування просторів діагностичних ознак і прийняття діагностичних рішень.

У задачах діагностики наявність адекватної моделі, за якою відбувається синтез інформаційних сигналів (віртуальних мір), характерних для об'єктів з різними ступенями пошкодженості або типами дефектів, має велике значення, оскільки дає змогу розв'язати одночасно декілька задач. По-перше, за допомогою такої моделі можна побудувати множину віртуальних мір, які відповідають можливим станам об'єкта діагностування, а отже, можуть бути використані для навчання та налаштування системи діагностики без фізичного виготовлення еталонних зразків. По-друге, модель інформаційних сигналів може використовуватися для вибору граничного значення чутливості діагностичних систем, оцінки їх дієздатності та коригування головних параметрів, для визначення достовірності контролю і класифікації тощо.

Розглянемо метод синтезу віртуальних мір з використанням математичної моделі, яка враховує детерміновану та випадкову складові характеристик реальних сигналів. Цей метод дає змогу виконувати синтез будь-якої необхідної кількості різноманітних інформаційних сигналів, що сприяє зменшенню часових, технічних та економічних витрат, пов'язаних з виготовленням еталонних зразків.

У діагностичних системах широкий клас інформаційних сигналів — це імпульсні або радіоімпульсні сигнали, які характеризуються не лише амплітудою, тривалістю, частотою та фазою носійної, а й своєю формою. Наприклад, такі інформаційні сигнали притаманні акустичним, електромагнітним та іншим методам

неруйнівного контролю. Зміна форми імпульсних сигналів у багатьох випадках є найбільш інформативною та завадостійкою характеристикою, тому доцільно розглянути побудову математичної моделі сигналу, яка дає можливість імітувати саме цю зміну.

Моделювання віртуальної міри у вигляді інформаційного сигналу в цілому, а не окремих його параметрів, дає змогу розробляти класифікатори, що оперують з усім набором характеристик сигналу і тим самим забезпечують побудову адекватніших вирішальних правил діагностики.

Як приклад для побудови імітаційної моделі використано інформаційні сигнали системи, що реалізує контроль композитних виробів та покриттів методом низькошвидкісного удару [25]. Досліджувані об'єкти — композитні панелі з пошкодженнями від ударів з різною кінетичною енергією від 2,3 до 5,1 кДж.

Оскільки інформаційні сигнали характеризуються великою кількістю параметрів, урахування яких може суттєво ускладнити побудову імітаційної моделі, то одним з головних етапів моделювання є зменшення розмірності простору ознак, тобто вибір найінформативніших параметрів, які мають максимальну чутливість до зміни властивостей об'єкта діагностування. Визначивши найінформативніші ознаки, змінюючи їх, можна виконати моделювання інформаційного сигналу з метою формування бібліотеки віртуальних еталонів для налаштування діагностичних систем, відпрацювання методик діагностування, перевірки достовірності роботи систем, їх валідації тощо. Базовою причиною для зменшення розмірності простора ознак є той факт, що використання під час діагностики ознак, на значення яких сильно впливає дія випадкових факторів, може призвести до зниження достовірності контролю та прийняття невірних рішень. Скорочення кількості ознак дає змогу зменшити обчислювальну складність та підвищити загальність класифікатора. Формального підходу до відбору таких ознак не існує. Однак щодо їх вибору можна сформулювати загальні вимоги, такі як придатність для вимірювання, інформативність та завадостійкість.

Під час розв'язання задачі оцінки інформативності ознак необхідно враховувати вплив випадкових факторів, таких як наявність завод у вимірювальних каналах, випадкових похибок датчиків, просторової неоднорідності об'єктів тощо.

Отже, з вектора ознак розмірності  $M$ ,  $A \in \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$  необхідно вибрати найінформативніші, тобто отримати новий вектор ознак розмірності  $M'$ ,  $B \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M'-1}\}$  (множину ознак,

які потрібно виділити в процесі селекції), причому  $M' < M$ . Тоді задача селекції фактично зводиться до відображення однієї множини в іншу:  $A \rightarrow B$ .

Запропонований спосіб — це спосіб виділення ознак, які характеризуються великими відстанями між класами і малими відстанями всередині класів.

Одним з методів відбору діагностичних ознак є дисперсійний аналіз, який проводять для оцінки ступеня зміни інформативної ознаки під впливом певних змінних факторів (багатофакторний аналіз) або фактора (однофакторний аналіз). У загальному вигляді задача дисперсійного аналізу складається з того, щоб із загальної дисперсії виділити дисперсію, яка зумовлена впливом фактора (факторна дисперсія) та зумовлена дією неврахованих факторів (залишкова дисперсія) [28,79]. Тоді рівень впливу фактора визначається за коефіцієнтом значущості:

$$\beta_x = C_x / C_y, \quad (6.1)$$

де  $C_x$  — факторна дисперсія;  $C_y$  — загальна дисперсія.

Ступінь впливу фактора на зміну значення діагностичної ознаки визначається порівнянням з певним пороговим рівнем  $\beta_n$ . Ознаки, які мають великий ступінь впливу фактора на зміну їхніх значень, формують результуючий вектор, який у подальшому може використовуватися в задачах діагностики та класифікації.

Оскільки будується імітаційна модель інформаційного сигналу в цілому, а не його окремих складових, доцільно використовувати його спектральне представлення. Застосування найвживанішого перетворення Фур'є ускладнює процедуру імітаційного моделювання, оскільки відображає масив дійсних чисел (дискрет інформаційного сигналу) в комплекснозначний масив. Тому для спектрального перетворення інформаційних сигналів доцільно застосовувати дискретні ортогональні функції Хартлі, Чебишева, Лагерра та інші, які дають змогу отримувати дійсні значення спектральних коефіцієнтів [11, 61].

Спектри імпульсів, які обчислюють, є загасальними. Це дало можливість обмежити число аналізованих коефіцієнтів до перших  $n_1$ , які мають понад 99 % повної енергії досліджуваних інформаційних сигналів. Для розкладу в кожному базисі можна виділити сукупність коефіцієнтів, які відповідають двом вимогам: є найбільшими за величиною порівняно з іншими і дають змогу для кожного класу виокремити коефіцієнти спектрального розкладу, значення яких суттєво відрізняються від інших.



Кількісно цей висновок можна обґрунтувати, використовуючи коефіцієнт, отриманий з нерівності Бесселя, який характеризує енергетичний внесок перших  $n_1$  складових розкладу в повну енергію інформаційного сигналу:

$$K_{n,n_1} = \sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j|^2 / \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2, \quad (6.2)$$

де  $a_k$  — значення спектрального коефіцієнта;  $n$  — загальна кількість спектральних складових.

Таким чином, якщо вибрати  $n_1$  перших коефіцієнтів розкладу за діагностичні ознаки, то вони характеризуватимуть складові розкладу, що вносять найбільший внесок в енергію інформаційного сигналу. Це також зменшує обчислювальні витрати та підвищує ефективність роботи з отриманими сигналами.

Частина коефіцієнтів розкладу більшою мірою підпорядковані впливу випадкових факторів, ніж інші, тобто мають велику внутрішньогрупову дисперсію. Крім того, коефіцієнти спектрального розкладу по-різному змінюються під час зміни ступеня дефектності виробу, тобто мають різні значення факторної дисперсії. Враховувати всі отримані  $n_1$  спектральні складові не має сенсу, оскільки це призводитиме до невиправданого ускладнення імітаційної моделі і відповідного збільшення обчислювальних витрат.

Для отриманих значень коефіцієнтів розкладу  $a_k, k = \overline{0, n_1}$ , з метою виявлення найінформативніших коефіцієнтів і зменшення простору ознак виконують процедуру дисперсійного аналізу. Для цього для кожного з перших коефіцієнтів визначають загальне розсіяння  $S_y$ , внутрішньогрупове (розсіяння всередині однієї групи коефіцієнтів, які характеризують один клас)  $S_z$  та міжгрупове (розсіяння між групами коефіцієнтів, які характеризують різні класи)  $S_x$  розсіяння значень досліджуваної ознаки. Мірою впливу ступеня дефектності виробу на зміну величини інформативних ознак є коефіцієнт значущості  $\beta_x$ .

Для формування множини діагностичних ознак слід використовувати такі коефіцієнти  $a_k, k = \overline{0, n_1}$ , значення  $\beta_{xk}$  для яких перевищує деякий пороговий рівень. На рис. 6.1 як приклад наведено діаграму оцінки впливу зміни ступеня дефектності на спектральні складові імпульсного інформаційного сигналу. Стовпчики, що відповідають коефіцієнтам розкладу, для яких коефіцієнт  $\beta_x$  перевищує рівень 0,95, виділені сірим кольором. Аналіз

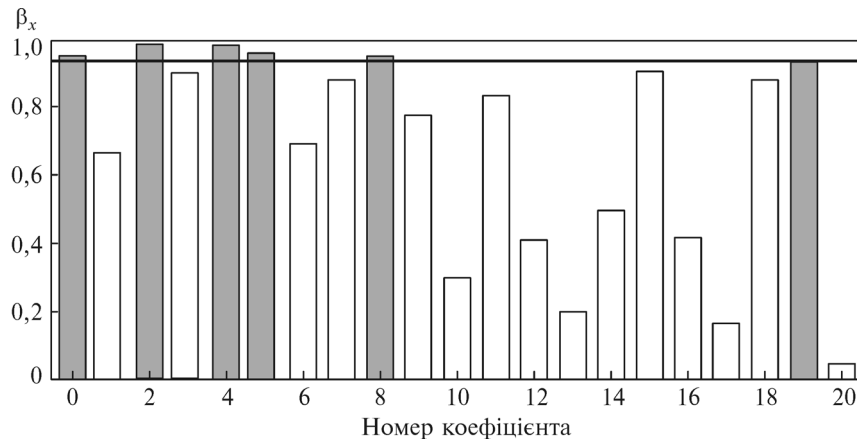


Рис. 6.1. Оцінка впливу дефектності на коефіцієнти спектрального розкладу

наведених діаграм показує, що найінформативнішими є п'ять коефіцієнтів спектрального розкладу  $(a_0, a_2, a_4, a_5, a_8)$ .

Таким чином, процедура ранжування діагностичних ознак виконується в два етапи: вибір з усієї множини коефіцієнтів спектрального розкладу  $n_1$  коефіцієнтів, які мають найбільшу енергію, а також коефіцієнтів (кількістю  $n_1'$ ), значення яких залежать найбільше від ступеня дефектності зразка і найменше від впливу випадкових факторів. Тобто з простору розмірністю  $M$  вибирають такий підпростір з розмірністю  $M'$ , який дає можливість із заданою точністю апроксимувати заданий тип інформаційних сигналів, що відповідають певним вимірювальним перетворювачам. Аналітично це описується виразом

$$\left| X_i(Z) - \hat{X}_i^*(Z) \right| \leq \alpha, \quad (6.3)$$

де  $X_i(Z)$  — фізичний інформаційний сигнал з простору розмірністю  $M$ ;  $\hat{X}_i^*(Z)$  — апроксимований сигнал на основі підпростору  $M'$ ;  $\alpha$  — допустима похибка (розбіжність) між сигналами;  $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_j\}$  — область визначення сигналу  $X(Z)$ ,  $j \in \overline{0, N-1}$ ;  $N$  — кількість відліків дискретного сигналу  $X(Z)$ .

Такий підхід дає можливість суттєво зменшити кількість коефіцієнтів спектрального розкладу для аналізу та імітаційного моделювання інформаційного сигналу. У розглянутій задачі розмірність простору ознак було зведено до  $M' = 5$ .

Для визначення значень відповідних коефіцієнтів розкладу, характерних для інформаційних сигналів, що відповідають станам об'єктів, для яких ці сигнали не досліджувались, тобто для побудови віртуальних еталонних сигналів, необхідно отримати функцію, яка апроксимує розподіл значень кожного з коефіцієнтів спектрального розкладу залежно від стану досліджуваного об'єкта. Таку функцію можна визначити інтерполяцією відомих значень коефіцієнтів розкладу, наприклад, степеневими поліномами або сплайнами. Далі для кожної спектральної складової необхідно вибрати бажане значення ступеня дефектності  $x$  об'єкта, за встановленими функціональними залежностями визначити значення спектральних складових та виконати зворотне перетворення [78].

У задачах інтерполяції інтерполяція за допомогою сплайнів є ефективнішою, ніж інтерполяція поліномами, оскільки дає достовірні результати навіть за менших степенів поліномів. Також за її використання не виникає феномен Рунге, що має місце під час використання поліноміальної інтерполяції, особливо у разі застосування поліномів високих порядків (степенів). Системи лінійних рівнянь, які потрібно розв'язувати для побудови сплайнів, дуже добре обумовлені, що дає змогу отримувати коефіцієнти поліномів з високою точністю. У результаті навіть за дуже великих об'ємів вибірок  $N$  обчислювальна схема не втрачає стійкості. Побудова таблиці коефіцієнтів сплайну потребує  $O(N)$  операцій, а обчислення значення сплайну в заданій точці —  $O(\log_2 N)$ .

Як приклад на рис. 6.2 наведено побудовані із застосуванням кубічних сплайнів Ерміта інтерполяційні функції для перших двох спектральних складових залежно від ступеня дефектності. З рис. 6.2 бачимо, що у разі застосування кубічних сплайнів Ерміта осциляції та від'ємні значення коефіцієнтів спектрального розкладу відсутні.

Для оцінки ефективності розглянутих алгоритмів було виконано порівняння змодельованих сигналів та фізичних сигналів, отриманих під час контролю об'єкта. У даному випадку використовувався дослідний зразок композитної панелі з ділянкою, яку було пошкоджено ударом з енергією 2,9 кДж. На рис. 6.3 зобра-

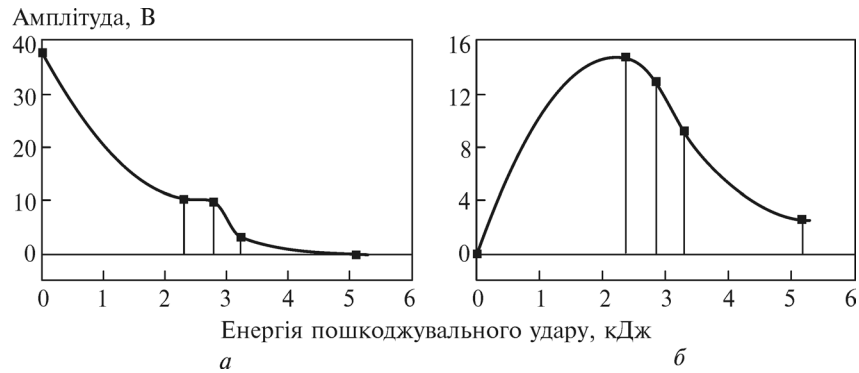


Рис. 6.2. Апроксимація кубічними сплайнами Ерміта 1-ї (а) та 2-ї (б) складових спектрального розкладу інформаційного сигналу

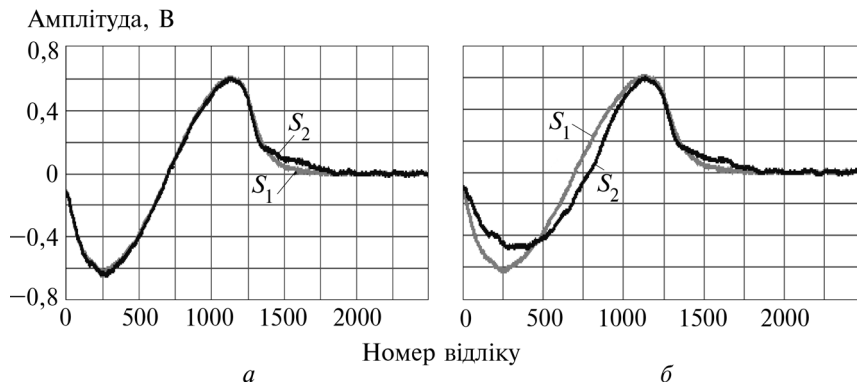


Рис. 6.3. Реальний  $S_1$  та змодельований  $S_2$  інформаційні сигнали

жено реальний сигнал з ділянки з пошкодженням, завданім ударом з енергією 2,9 кДж, — крива  $S_1$  та змодельований сигнал (крива  $S_2$ ): за допомогою кубічних сплайнів Ерміта (рис. 6.3, а) і квадратичних сплайнів (рис. 6.3, б).

Числову оцінку розбіжності змодельованих та реальних сигналів виконано за допомогою розрахунку середньоквадратичної похибки між цими сигналами: для апроксимації кубічними сплайнами Ерміта ця похибка становить  $2,53 \cdot 10^{-3}$ , для апроксимації квадратичними сплайнами —  $3,97 \cdot 10^{-2}$ .

Підставляючи потрібне значення ступеня дефектності зразка, отримуємо відповідне йому значення кожного коефіцієнта спек-

трального розкладу. Відновлюючи сигнал за отриманими коефіцієнтами, можна знайти змодельований відповідний інформаційний сигнал — віртуальну міру. Таке моделювання дає змогу мінімізувати кількість зразків, які відтворюють відповідний стан досліджуваного об'єкта і використовуються під час налаштування систем діагностування, та оптимізувати проведення експериментальних досліджень на фізичному об'єкті.

Під час діагностики об'єктів інформаційні сигнали характеризуються детермінованою та випадковою складовими. Випадкова складова описує такі фактори, як наявність завад у вимірювальних каналах, випадкових похибок перетворювачів, просторової неоднорідності об'єктів дослідження тощо. Отже, для побудови адекватної імітаційної моделі таких сигналів необхідно врахувати обидві складові.

На жаль, моделі, які базуються на фізичних рівняннях, що описують перетворення інформаційних сигналів залежно від стану об'єкта, мають недоліки, які не дають змоги застосовувати їх для розрахунків і формування простору діагностичних ознак. Тому доцільним є побудова стохастичних моделей інформаційних сигналів, які дають змогу врахувати їх випадкові зміни в часі, застосовувати методи статистичної обробки, розширюючи простір діагностичних ознак та підвищуючи достовірність діагностування.

Для вибору методу побудови імітаційної моделі інформаційного сигналу діагностичної системи необхідно виконати статистичну оцінку отриманих значень коефіцієнтів спектрального розкладу. У випадку, коли можна прийняти гіпотезу про гауссовість розподілу ознак, достатньо визначити такі оцінки:

математичне сподівання

$$M\{U\} = \bar{U} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B u_i, \quad (6.4)$$

де  $u_i$  — досліджувана вибірка;  $B$  — об'єм вибірки.

середньоквадратичне відхилення (СКВ):

$$\sigma(U) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (u_i - \bar{u})^2}. \quad (6.5)$$

Імітаційну модель інформаційного сигналу з урахуванням його детермінованої та випадкової складових можна записати у вигляді [27]

$$S_i(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_{i,j} + \eta_j] g_j(Z), \quad i = \overline{0, L-1}, \quad (6.6)$$

де  $a_{i,j}$  — детермінована складова сигналу, яку знаходять за алгоритмом, описаним раніше, через функціональну залежність розподілу значень коефіцієнтів спектрального розкладу залежно від стану об'єкта;  $\eta_j$  — випадкова складова, яку знаходять на основі власних чисел та власних векторів коваріаційної матриці коефіцієнтів спектрального розкладу сигналу;  $g_j(Z)$  — вибраний базис ортогональних функцій дискретного аргументу;  $L$  — обсяг генерованої вибірки інформаційного сигналу;  $n$  — кількість складових у спектрі сигналу.

Детерміновану складову сигналу знаходять так. Розглянемо вектор  $X(Z) = (X_0, X_1, \dots, X_\gamma)$ , елементи якого отримані в результаті рівномірної дискретизації сигналу датчика  $X(t)$ . Тоді можна знайти вектор  $Y(Z) = (Y_0, Y_1, \dots, Y_\gamma)$ ,  $Y_\gamma = \mathbf{M}[X_\gamma]$ , — математичне сподівання вектора  $X(Z)$ ,  $\gamma = \overline{0, N-1}$ ,  $N$  — розмірність цього вектора. Після чого визначаємо значення

$$a_{i,j} = \langle Y(Z)_i, g_j(Z) \rangle, \quad i = \overline{0, L-1}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (6.7)$$

де  $a_{i,j}$  —  $j$ -й коефіцієнт спектрального розкладу  $i$ -ї реалізації інформаційного сигналу;  $L$  — розмірність вибірки.

Для випадку, що розглядається, перший комплекс діагностичних ознак моделі, який характеризує детерміновану складову, формується з п'яти складових розкладу ( $n_1 = 5$ ) інформаційного сигналу за обраним базисом ортогональних функцій Хартлі дискретного аргументу (кількість відліків дискретного сигналу  $X(Z)$  становить  $N = 2500$ ). Моделювання певного ступеня пошкодження зразка відбувається зміною значень необхідних складових спектра сигналу до значень, що характерні для інформаційних сигналів, отриманих на об'єктах з відповідним ступенем пошкодження.

Другий комплекс діагностичних ознак, що характеризує випадкову складову моделі, визначають на базі перетворення Карунена—Лоева. Перетворення Карунена—Лоева має фундаментальне значення, тому що воно призводить до побудови некорельованих ознак. Отже, маємо рівняння

$$\eta_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(j), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (6.8)$$

де  $\xi_k = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \varphi_k(j)$  — коефіцієнти розкладу, які є незалежними гауссовими випадковими величинами з дисперсіями  $D_{\xi_k} = \sigma_k^2$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ ;  $\{\varphi_k(j), k, j = \overline{0, n-1}\}$  — ортонормований базис, елементи  $\varphi_k(j)$  якого є власними векторами коваріаційної матриці  $R$  реального сигналу.

Дисперсії  $D_{\xi_k} = \sigma_k^2$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , дорівнюють власним числам  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , коваріаційної матриці  $R$ , які відповідають власним векторам  $\varphi_k(j)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ . Елементи матриці  $R$  мають вигляд

$$r_{i,j} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k,i} - m_i)(v_{k,j} - m_j)}{n-1}, \quad (6.9)$$

де  $v_{i,j}$  — елементи матриці  $V$  коефіцієнтів спектрального розкладу інформаційних сигналів  $X(Z)$ ;  $m_i$  — елементи матриці  $M$  математичних сподівань кожного коефіцієнта спектрального розкладу інформаційного сигналу.

Матриці  $V$  та  $M$  формують так:

$$V = \begin{pmatrix} v_{0,0} & v_{0,1} & \cdots & v_{0,n-1} \\ v_{1,0} & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{B-1,0} & v_{B-1,1} & \cdots & v_{B-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad M = \{m_0, m_1, \dots, m_{n-1}\}, \quad (6.10)$$

де  $B$  — кількість реалізацій інформаційних сигналів;  $n$  — кількість коефіцієнтів спектрального розкладу однієї реалізації;

$$m_i = \sum_{k=0}^{B-1} v_{k,i} / B.$$

Повну енергію вектора  $\eta = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}\}$  визначають за формулою

$$\sum_{i=0}^{n-1} R_{ii} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k. \quad (6.11)$$

Множини власних чисел  $\lambda_k$  і власних векторів  $\varphi_k(j)$  однозначно характеризують коваріаційну матрицю  $R$ , отже, і вектор  $\eta$ , тому як другий комплекс ознак доцільно вибрати  $n_2 = n_1 = 5$  власних чисел та відповідних власних векторів коваріаційної матриці вектора  $\eta$ .

Моделювання інформаційних сигналів виконується за алгоритмом, наведеним на рис. 6.4.

Вибір коефіцієнтів ортогонального розкладу  $a_{k_1}$ ,  $k_1 = \overline{0, n_1 - 1}$ , власних чисел  $\lambda_{k_2}$  та власних векторів  $\varphi_{k_2}(j)$ ,  $k_2 = \overline{0, n_2 - 1}$ ,  $j = \overline{0, n - 1}$ , здійснювали з використанням реалізацій оцінок цих характеристик, отриманих під час аналізу реальних інформаційних сигналів.

Оскільки кожна складова спектрального розкладу характеризується різним значенням розсіяння залежно від ступеня пошкодження об'єкта та порядкового номера, то в схемі імітаційного моделювання відповідно для кожного коефіцієнта матимуть місце різні за значенням власні числа  $\lambda_k$  та власні вектори  $\varphi_k(j)$ . Таким чином, кожна зі спектральних складових зазнаватиме різного ступеня впливу випадкових факторів на її детерміновану складову, що й відбувається під час аналізу реальних інформаційних сигналів, отриманих при діагностиці виробів. Отже, описаний підхід дає можливість створити імітаційну модель, яка в найбільш повному обсязі описує реальний інформаційний сигнал.

За допомогою описаного алгоритму імітаційного моделювання було згенеровано моделі реалізації інформаційних сигналів, що відповідають різним ступеням дефектності реальних зразків (по 250 реалізацій для кожного з п'яти зразків). На рис. 6.5 наведено реальні та змодельовані сигнали, що виникають під час контролю бездефектного зразка та зразків з різним ступенем пошкодження, де крива  $S_1$  — це реальний сигнал, а крива  $S_2$  — змодельований сигнал.

Для порівняння фізичних і змодельованих сигналів було визначено середньоквадратичну похибку між їхніми значеннями: для бездефектного зразка ця похибка становила  $3,6 \cdot 10^{-3}$ ; для зразків з пошкодженнями ударами з енергіями 2,3 кДж, 2,8 кДж, 3,2 кДж, 5,1 кДж відносна похибка відповідно становить  $2,4 \cdot 10^{-3}$ ,  $2,0 \cdot 10^{-3}$ ,  $2,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $1,8 \cdot 10^{-3}$ .



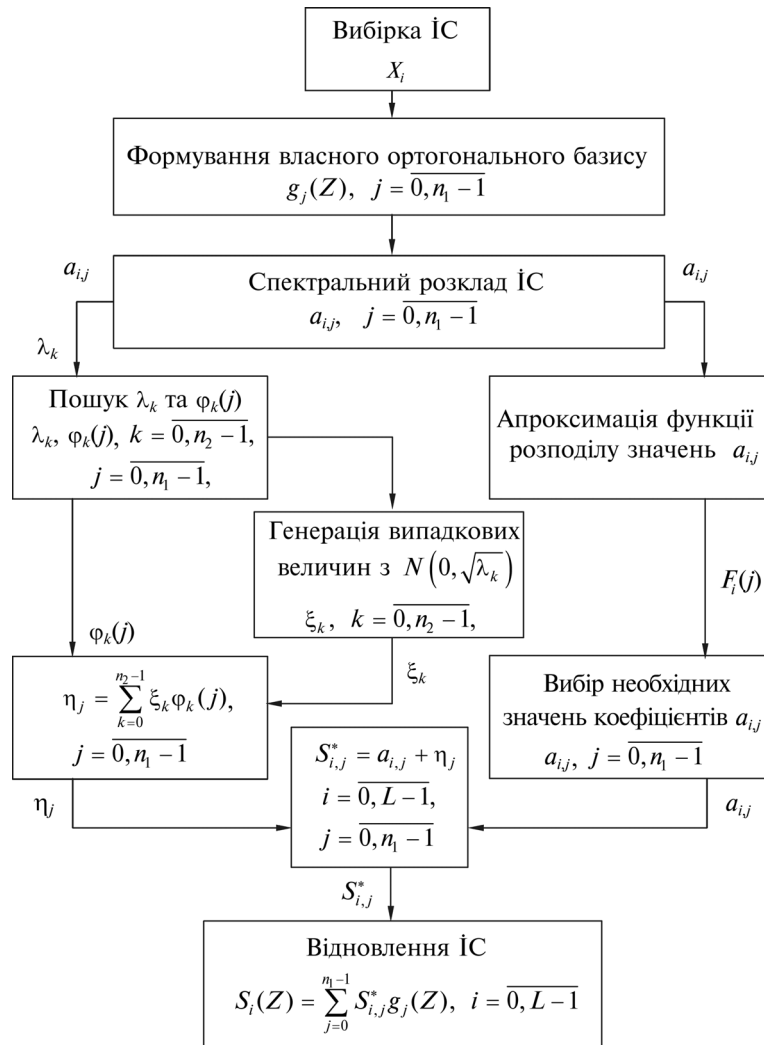
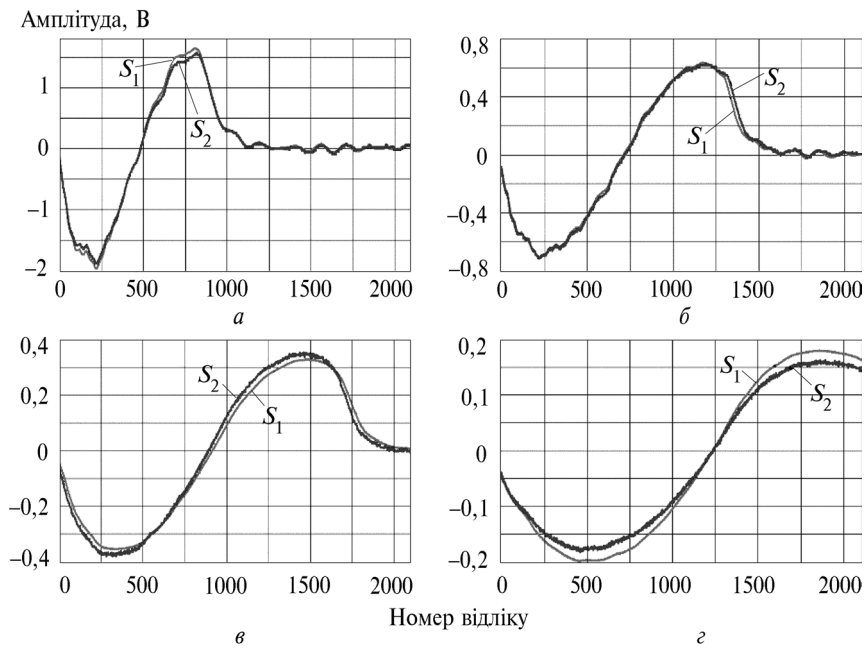


Рис. 6.4. Алгоритм імітаційного моделювання інформаційних сигналів

Таким чином, приходимо до висновку, що отримані імітаційні моделі за параметрами та характеристиками відповідають реальним інформаційним сигналам і можуть бути використані у



**Рис. 6.5.** Фізичні та змодельовані інформаційні сигнали: *а* — зразок без пошкодження та зразки з пошкодженнями ударом, *б* — 2,3 кДж, *в* — 3,2 кДж, *г* — 5,1 кДж

подальшому для формування навчальної вибірки та створення бібліотеки віртуальних еталонів, яку можна використовувати для налаштування діагностичних систем (особливо за багатопараметрової діагностики), а також з метою формування контрольної вибірки для перевірки достовірності роботи класифікатора системи та його валідації за умови обмеженої кількості або відсутності фізичних еталонних зразків. Крім того, імітаційні моделі інформаційних сигналів можуть застосовуватися під час проведення навчання класифікаторів, побудованих на базі штучних нейронних мереж [27].

## 6.2. НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ ТЕХНОЛОГІЇ У БЕЗЕТАЛОННІЙ ДЕФЕКТОСКОПІЇ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Через велику номенклатуру композиційних матеріалів та їх дефектів, а також складність виготовлення стандартних зразків для всіх типів можливих конструкцій з усіма можливими дефектами важливою задачею під час контролю композитів є реалізація принципів безеталонної дефектоскопії. Принцип безеталонної дефектоскопії полягає в тому, що контроль здійснюють без використання стандартних зразків з нормованими характеристиками дефектів, або використовуються їх мінімальна кількість.

Безеталонна дефектоскопія можлива у двох варіантах:

1. Існують зразки досліджуваних композиційних матеріалів, що не містять дефекти, і настройка дефектоскопа відбувається за допомогою еталонних зразків, а з використанням методів безеталонної дефектоскопії вибірки інформативних параметрів з еталонного зразка порівнюють з вибірками досліджуваного зразка і за певними критеріями приймають рішення.

2. За відсутності зразків досліджуваних матеріалів за навчальну беруть вибірку інформативних параметрів із бездефектної зони досліджуваного виробу, наприклад за методом трьох точок.

Безеталонна дефектоскопія базується на визначенні відмінностей інформативного параметра в одній зоні досліджуваного виробу відносно іншої (інших зон). Для побудови вирішальних правил безеталонної дефектоскопії в класичному варіанті застосовуються статистичні критерії перевірки гіпотез, за допомогою яких оцінюється статистична значущість відмінностей між порівнюваними вибірками інформативних параметрів. Тому для побудови і застосування безеталонних вирішальних правил необхідними є накопичення статистичного матеріалу та його обробка.

Вирішальні правила побудовано на критеріях перевірки статистичних гіпотез, що використовують статистичні критерії, які поділяють на критерії згоди та критерії однорідності, параметричні та непараметричні залежно від наявної апріорної інформації про досліджувані об'єкти, їхні закони розподілу та ін. Перевагою цих методів є те, що гіпотеза приймається чи відхиляється при заданому рівні значущості за певним правилом (критерієм) перевірки гіпотези, а значення статистики, отримане на підставі експериментальних даних і визначене за цим критерієм, порівнюється із критичним значенням, яке визначають для відомих законів розподілів статистики критерію за заданим рівнем значу-

щості. Ці методи дають можливість одночасно враховувати ознаки різної природи, тому що вони характеризуються безрозмірними величинами — ймовірностями їхньої появи за різних станів досліджуваних об'єктів [76]. Недоліками застосування методів перевірки статистичних гіпотез для побудови вирішальних правил є значне їх ускладнення у разі використання декількох інформативних ознак, оскільки потрібно виконувати аналіз багатовимірних законів розподілів.

Крім зазначених статистичних методів для побудови вирішальних правил безеталонної дефектоскопії доцільно використовувати нейромережеві класифікатори в поєднанні з методами імітаційного моделювання інформаційних сигналів, що суттєво підвищує достовірність контролю та розрізнявальну здатність під час визначення типу дефекту або його розміру.

За допомогою сучасних методів та засобів діагностики можна отримати велику кількість інформативних параметрів, які характеризують стан об'єкта діагностики. Отже, отримують велику розмірність простору діагностичних ознак, за якими будують вирішальні правила. Таким чином, виникає задача відбору інформативних ознак, за якими здійснюватимуться контроль і формування правил прийняття рішення діагностики, а також задача розробки методів і алгоритмів, що дають змогу ефективно виконувати обробку даних у багатовимірному просторі ознак і не потребують значних апаратних ресурсів. Використання статистичних методів у такому випадку ускладнене, оскільки доводиться аналізувати багатовимірні функції розподілу ймовірності, що значно підвищує обчислювальні витрати на реалізацію відповідного алгоритму. Також додаткові труднощі виникають під час розробки та реалізації відповідного математичного забезпечення інформаційно-діагностичних систем. Доводиться використовувати складні методи обробки інформаційних сигналів та побудови вирішальних правил на базі статистичних критеріїв, які призводять до формування складних вирішальних правил. Тому під час безеталонної дефектоскопії необхідно застосовувати такі методи та алгоритми, які дають можливість ефективно виконувати обробку даних у багатовимірному просторі діагностичних ознак, накопичувати отриману інформацію про можливі дефекти, визначати закономірності в змінненні значень параметрів інформаційних сигналів залежно від ступеня дефектності об'єкта діагностування, розширювати базу класів дефектів та уточнювати її в процесі роботи без повного перенавчання системи.

Найприйнятними в такому випадку є методи класифікації на базі штучних нейронних мереж. Зокрема, мережі з прямим зв'язком є універсальним і ефективним засобом апроксимації функцій, оскільки генерують велику кількість регресійних моделей, що дає змогу використовувати їх для класифікації об'єктів у багатовимірному просторі діагностичних ознак. У задачах діагностики навчена нейронна мережа не тільки вміє розпізнавати (класифікувати) отримані під час контролю інформаційні сигнали, а й зберігає інформацію про закономірності та взаємозв'язки характеристик інформаційного сигналу і стану об'єкта контролю, а також може правильно класифікувати інформаційні сигнали, що відповідають можливим дефектам, які не виникали під час навчання мережі.

Вибір архітектури — дуже важливий етап під час розробки нейромережевого класифікатора у складі діагностичних систем. Необхідно чітко знати, який саме клас задач розв'язуватиме дана діагностична система, оскільки різні архітектури нейронних мереж розроблені та призначені для розв'язання конкретних груп задач.

Галузі застосування найвідоміших парадигм перетинаються, тому для розв'язання конкретної задачі можна використовувати різні архітектури нейронних мереж, при цьому результати можуть виявитися істотно різними. Отже, для вибору кращої архітектури необхідно виконати детальні дослідження.

Серед найпопулярніших і найефективніших основних парадигм нейронних мереж, які застосовують у задачах класифікації та кластерного аналізу, виокремимо такі: багат шаровий перцептрон, радіально-базисні нейронні мережі, нейронні мережі і карти Кохонена, мережі адаптивної резонансної теорії. Також для розв'язання поставлених задач застосовують так звані *гібридні* нейронні мережі, що можуть поєднувати та містити в собі концепції деяких базових парадигм (види нейронів, архітектуру мережі, методи навчання тощо).

У табл. 6.1 наведено найпоширеніші архітектури нейронних мереж і пов'язані з ними алгоритми навчання (список не є вичерпним).

Мережа певної архітектури потребує відповідного алгоритму навчання і призначена для розв'язання обмеженого класу задач. Окрім розглянутих алгоритмів навчання поширеними також є такі алгоритми: Adaline і Madaline [126], лінійний дискримінантний аналіз, проекції Саммона, аналіз головних компонентів [128] тощо.

Таблиця 6.1. Архітектури нейронних мереж

Парадигма	Правило навчання	Архітектура	Алгоритм навчання	Задача
З учителем	Корекція помилки	Одношаровий та багатошаровий персептрон	Алгоритми навчання персептрона. Зворотне розповсюдження	Класифікація образів. Апроксимація функцій. Прогнозування
	Больцмана	Рекурентна	Алгоритм навчання Больцмана	Класифікація образів
	Хебба	Багатошарова прямого розповсюдження	Лінійний дискримінантний аналіз	Аналіз даних. Класифікація образів
Без учителя	Хебба	Прямого розповсюдження	Аналіз головних компонентів	Аналіз даних. Стиснення даних
		Мережа Хопфілда	Навчання асоціативної пам'яті	Асоціативна пам'ять
		Мережа LVQ	Змагання. Векторне квантування	Категоризація. Стиснення даних
		SOM Кохонена	SOM Кохонена	Категоризація. Аналіз даних
		Мережі ART	ART-1, ART-2, Fuzzy-ART	Категоризація. Класифікація образів
Змішана	Корекція помилки та змагання	Мережа RBF	Алгоритм навчання RBF	Класифікація образів. Апроксимація функцій. Прогнозування

Для вибору архітектури нейронної мережі, яку можна використовувати в задачах безеталонної дефектоскопії, необхідними умовами є можливість навчатись без учителя, здатність вирішувати задачі категоризації даних (кластерний аналіз) та класифікації. З табл. 6.1 бачимо, що серед розглянутих архітектур ці вимоги задовольняють нейронні мережі адаптивної резонансної теорії (ART).

Алгоритм побудови класифікатора на базі нейронних мереж має такий вигляд:

**1. Робота з даними:**

- підготувати вибірку навчальних прикладів, характерних для даної задачі;
- розбити всю сукупність даних на навчальну, контрольну і тестову множини.

**2. Попередня обробка:**

- вибрати систему ознак, характерних для даної задачі, і виконати перетворення даних відповідним чином для подачі на вхід мережі. У результаті бажано отримати лінійно роздільний простір множини даних;

- вибрати систему кодування вихідних значень.

**3. Конструювання, навчання й оцінка якості мережі:**

- вибрати топологію мережі: кількість шарів, число нейронів у шарах тощо;
- вибрати функцію активації нейронів;
- вибрати алгоритм навчання мережі;
- оцінити якість роботи мережі на основі тестової множини або іншого критерію, оптимізувати архітектуру;
- вибрати оптимальний варіант мережі й оцінити достовірність її роботи.

**4. Застосування та діагностика:**

- дослідити ступінь впливу різних чинників на прийняття рішення;
- переконатися, що мережа забезпечує необхідну достовірність виявлення аномалій і класифікації;
- за необхідності повернутися на етап 2, змінивши спосіб зображення об'єктів або змінивши базу даних;
- практично використовувати мережу для розв'язання поставленої задачі.

Узагальнену структурну схему блока діагностики, який реалізує безеталонний метод, на базі нейромережевого класифікатора наведено на рис. 6.6 (НМ — нейронна мережа). Такий блок реалізовано у вигляді спеціалізованого програмного забезпечення діагностичних систем.

Зазначимо, що процес навчання блока діагностики може проводитися не лише експериментально на еталонних або реальних (контрольованих) зразках, а й за допомогою імітаційного моделювання інформаційних сигналів, що відповідають різним типам можливих дефектів. У разі імітаційного моделювання використовують моделі інформаційних сигналів, які спостерігають



Рис. 6.6. Структурна схема блока діагностики

під час контролю конкретного виробу певним типом первинного перетворювача.

Моделі інформаційних сигналів відрізняються одна від одної використаними перетворювачами, методами контролю, первинною обробкою інформаційних сигналів тощо.

**Безеталонна діагностика виробів нейронними мережами адаптивної резонансної теорії.** У процесі розв'язання задачі безеталонної діагностики виникає дилема: яким чином зробити так, щоб пам'ять НМ залишалася пластичною, здатною до сприйняття нових даних і побудови нових класів, що відповідають новим типам дефектів, і в той же час зберігала стабільність, яка гарантує, що інформація про вже відомі класи не знищиться і не зруйнується в процесі функціонування.



Мережі й алгоритми адаптивної резонансної теорії [119, 120] дають змогу зберігати пластичність, необхідну для вивчення нових класів об'єктів, водночас запобігаючи зміненню раніше запам'ятованих класів.

Мережі ART містять декілька парадигм, кожна з яких визначається формою вхідних даних і способом їхньої обробки. ART-1 розроблена для обробки бінарних вхідних векторів, а мережі ART-2 та Fuzzy-ART можуть класифікувати як бінарні, так і неперервні вектори даних [119, 121].

Мережі ART являють собою векторний класифікатор і працюють за алгоритмом, який зображено на рис. 6.7. Вхідний вектор класифікується залежно від того, на який з раніше запам'ятованих мережею еталонних векторів він схожий. Рішення щодо класифікації вхідного вектора мережа ART виражає у формі збудження одного з нейронів шару розпізнавання.

Якщо вхідний вектор не відповідає жодному із запам'ятованих образів, створюється нова категорія (виділяється новий нейрон та запам'ятовується новий вектор), яка відповідає вхідному вектору. Якщо визначено, що вхідний вектор схожий на один із раніше запам'ятованих векторів за визначеним критерієм подібності, еталонний вектор у пам'яті НМ буде змінюватися (навчатися) під впливом нового вхідного вектора таким чином, щоб стати більш схожим на даний вхідний вектор.

Запам'ятований еталонний вектор не буде змінюватись, якщо поточний вхідний вектор не виявиться схожим на нього. У такий спосіб вирішується дилема стабільності-пластичності. Новий вектор може створювати додаткові класифікаційні категорії, однак новий вхідний вектор, що відповідає новим типам дефектів, не може змусити змінитися або зітерти існуючу пам'ять.

**Класифікатор на основі модифікованої нейронної мережі ART-2.** Нейронна мережа ART-2 була розроблена для аналізу неперервних вхідних сигналів. С. Гроссберг і Г. Карпентер у працях [119, 120] описали декілька можливих архітектур мережі ART-2 (рис. 6.8).

Основні рівняння, що описують роботу шару порівняння  $F_1$  мережі, мають вигляд

$$p_i = u_i + \sum_j g(y_j) v_{j,i}, \quad q_i = p_i / (e + |p|), \quad u_i = z_i / (e + |z|), \quad (6.12)$$

$$z_i = f(t_i) + b \cdot f(q_i), \quad s_i = x_i + a \cdot u_i, \quad t_i = s_i / (e + |s|), \quad (6.13)$$



Рис. 6.7. Алгоритм роботи нейронних мереж сімейства ART

де  $|\bullet|$  —  $L_2$ -норма вектора в евклідовому просторі;  $y_j$  — вихід  $j$ -го нейрона шару розпізнавання  $F_2$ ;  $v_{j,i}$  — елементи матриці вагових коефіцієнтів  $V$ ;  $a$  і  $b$  — коефіцієнти, які знаходять експериментально;  $e$  — параметр, який характеризує відношення між часом роботи нейронів шарів  $F_1$  і  $F_2$ ,  $0 < e \ll 1$ ;  $f(x)$  — нелінійна сигнальна функція активації нейронів, може бути неперервно диференційованою:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \theta \cdot x^2 / (x^2 + \theta^2) & \text{при } 0 \leq x < \theta; \\ x & \text{при } x \geq \theta, \end{cases} \quad (6.14)$$

або кусково-лінійною:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < \theta; \\ x & \text{при } x \geq \theta. \end{cases} \quad (6.15)$$

Основні рівняння, що описують роботу шару розпізнавання  $F_2$  мережі ART-2, мають вигляд

$$T_j = \sum_i p_i w_{i,j}, \quad T_k = \max \{T_j : j = \overline{1, m}\}, \quad (6.16)$$

$$g(y_k) = \begin{cases} d & \text{при } T_k = \max(T_j), \\ 0 & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (6.17)$$

де  $w_{i,j}$  — елементи матриці вагових коефіцієнтів  $W$ ;  $d$  — коефіцієнт, який знаходять експериментально.

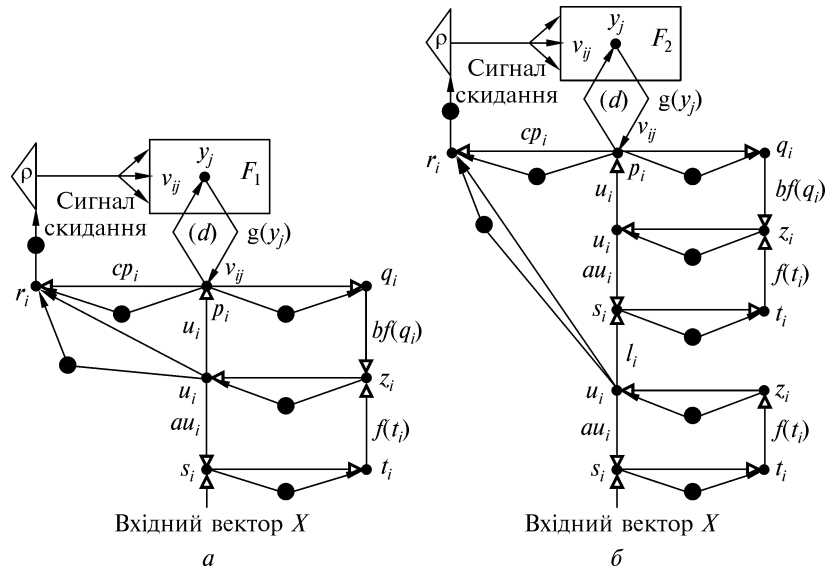


Рис. 6.8. Типи архітектур нейронних мереж ART-2: білі стрілки — специфічні операції у шарах  $F_1$  і  $F_2$  мережі ART-2, чорні стрілки — операції елементів керування мережі, чорні кола — операції пошуку норми вектора

Таким чином, на пристрій порівняння поступатиме вектор  $p_i$ :

$$p_i = \begin{cases} u_i & \text{за неактивних нейронів шару } F_2; \\ u_i + d \cdot v_{k,i} & \text{за активного нейрона-переможця } k. \end{cases} \quad (6.18)$$

Пристрій порівняння активує сигнал заглушення, якщо не буде виконано умову:  $\rho / (e + |r|) \geq 1$ . Коефіцієнт чутливості класифікатора  $\rho$  вибирають в інтервалі  $[0, 1]$ , а  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  — вектор, що характеризує ступінь відмінності вхідного вектора  $X$  та еталонного вектора  $W_k$  у пам'яті мережі  $r_i = \frac{u_i + c \cdot p_i}{e + |u| + |c \cdot p|}$ ,  $c$  —

ваговий коефіцієнт, який вибирають з нерівності  $c \cdot d / (1 - d) \leq 1$ .

У випадку правильної класифікації вхідного вектора сигнал заглушення не активується, а вагові коефіцієнти матриць  $W$  та  $V$  модифікуються:

$$v_{j,i}^{new} = v_{j,i}^{old} + \Delta v_{j,i}, \quad \Delta v_{j,i} = g(y_j) [p_i - v_{j,i}] = d \cdot (p_i - v_{k,i}), \quad (6.19)$$

$$w_{i,j}^{new} = w_{i,j}^{old} + \Delta w_{i,j}, \quad \Delta w_{i,j} = g(y_j) [p_i - w_{i,j}] = d \cdot (p_i - w_{i,k}), \quad (6.20)$$

де  $v_{j,i}^{old}$  і  $v_{j,i}^{new}$  — вагові коефіцієнти матриці  $V$  відповідно до та після модифікації;  $w_{i,j}^{old}$  і  $w_{i,j}^{new}$  — вагові коефіцієнти матриці  $W$  відповідно до та після модифікації.

На початку роботи мережі ART-2 та під час формування нового нейрона (у випадку формування нового класу) значення відповідних вагових коефіцієнтів ініціалізуються початковими значеннями:

$$v_{j,i} = 0, \quad w_{i,j} \leq 1 / (1 - d) \sqrt{N}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.21)$$

де  $N$  — розмірність вхідного вектора  $X$ ;  $m$  — кількість нейронів у шарі розпізнавання  $F_2$  (кількість запам'ятованих класів).

Нейронна мережа ART-2 не чутлива до порядку пред'явлення вхідних векторів, може працювати як з бінарними, так і з неперервними сигналами, має високу швидкодію роботи та високу достовірність класифікації даних. До того ж ART-2 має властивість до самостійного виправлення помилок класифікації після певної кількості циклів повторного пред'явлення навчальної вибірки.

На рис. 6.9 показано структурну схему модифікованої мережі ART-2, де виділено блоки, які були змінені та доповнені порівняно з класичною мережею.

Під час застосування розробленої мережі ART-2 та алгоритму її роботи була отримана вища достовірність контролю стану виробів з композиційних матеріалів порівняно з класичною реалізацією. У табл. 6.2 для порівняння наведено результати роботи класичної та модифікованих архітектур ART-2. Для порівняльного аналізу використовували вибірку з 2500-ма реалізаціями інформаційних сигналів дефектоскопа, що реалізує метод низькошвидкісного удару, отриманих під час контролю стільникових панелей.

Модифікована і класична мережі ART-2 мають такі переваги: стабільність запам'ятованої інформації та можливість динамічно розширювати власну базу знань, високу роздільну здатність при класифікації даних, підвищену заводо захищеність, інваріантність відносно порядку пред'явлення вхідних векторів, можливість змінювати швидкість навчання мережі, при повторному пред'явленні навчальної вибірки здатність виправляти помилки, які були допущені на попередньому етапі навчання, можливість працювати з неперервними сигналами.



Рис. 6.9. Структурна схема модифікованої нейронної мережі ART-2

Таблиця 6.2. Результати роботи архітектурних мереж

Архітектура мережі	Показник				
	Час аналізу вибірки, мс	Обсяг пам'яті для зберігання мережі, кБ	Достовірність контролю при значенні коефіцієнта чутливості $\rho$		
			0,965	0,975	0,985
Класична ART-2	1740	203	0,98	0,99	0,98
ART-2 з однією матрицею вагових коефіцієнтів	1080	127	0,99	0,99	0,98
ART-2 з двома критеріями порівняння	1610	203	0,99	1,00	1,00

**Класифікатор на основі модифікованої нейронної мережі Fuzzy-ART.** Розширена архітектура мережі ART-1 за рахунок уведення нечітких елементів має назву Fuzzy-ART [121] або нечіткої ART-мережі. Нечіткі оператори використовуються для:

- визначення класу  $k$  (визначення нейрона-переможця);
- розрахунку ступеня подібності вхідного та еталонного векторів;
- адаптації вагових коефіцієнтів нейронів мережі.

На рис. 6.10 зображено базову архітектуру мережі Fuzzy-ART.

Необхідно відзначити характерну особливість мережі Fuzzy-ART: обидві матриці вагових коефіцієнтів ( $W$  та  $V$ ) об'єднуються в одну матрицю  $W$ . Складові вхідних векторів  $X$  — дійсні числа, нормуються в інтервалі  $[0, 1]$ . У шарі розпізнавання  $F_2$  містяться нейрони для зберігання інформації про вивчену номенклатуру класів.

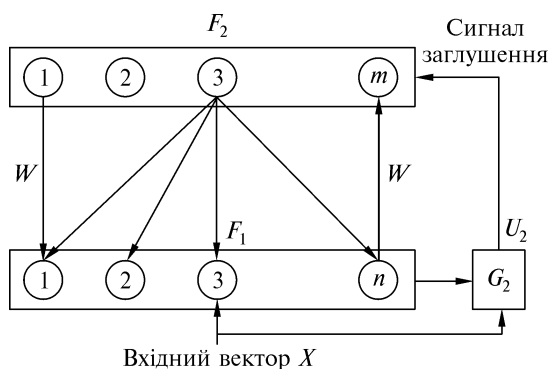


Рис. 6.10. Архітектура нейронної мережі Fuzzy-ART

На початку процесу навчання НМ кожен клас  $j$  встановлюють у неактивний початковий стан. Між входом і шаром розпізнавання розташована матриця вагових коефіцієнтів  $W$ . Усі її елементи (вагові коефіцієнти) спочатку ініціалізуються одиницями, тобто  $w_{ij} = 1$  для  $i = 1, 2, \dots, n$  та  $j = 1, 2, \dots, m$  (індекс  $i$  відповідає елементу вхідного вектора, а  $j$  — нейрону (номеру класу) шару розпізнавання). У мережі Fuzzy-ART встановлюють також такі параметри:

- параметр вибору  $\alpha > 0$ , що визначає вибір класу в момент класифікації;
- коефіцієнт корекції  $\eta \in [0, 1]$ , що суттєво впливає на швидкість навчання нейронної мережі;
- коефіцієнт чутливості класифікатора або рівень подібності вхідного та еталонного векторів  $\rho \in [0, 1]$ , що впливає на процес формування класів.

Для визначення класу  $k$ , до якого належить вхідний вектор  $X$ , визначається спочатку ступінь активації нейронів  $y_j = \frac{|X \cap W_j|}{\alpha + |W_j|}$ , при цьому вхідний вектор  $X$  відноситься до того класу  $y_j$ , для якого ступінь активації є максимальним:  $y_k = \max_j (y_j)$ .

У тих випадках, коли два класи мають однакове максимальне значення ступеня активації, вибирається клас з еталонним сигналом з найменшим індексом. Цим самим забезпечується той факт, що нейрони шару розпізнавання  $F_2$  виділяються для кожного класу вхідних сигналів у послідовності  $1, 2, \dots, n$ .

Після першої фази розпізнавання відбувається фаза порівняння. Вона полягає у порівнянні поточного вхідного вектора з прототипом визначеного класу  $k$ . Під час виконання даного критерію активується процес адаптації (модифікації) вагових коефіцієнтів. У протилежному випадку продовжується пошук альтернативного класу в шарі розпізнавання або виділення нового нейрона для формування нового класу вхідних сигналів. Корекція вектора вагових коефіцієнтів відбувається за правилом

$$W_j(t+1) = \eta [X \cap W_j(t)] + (1 - \eta)W_j(t),$$

де  $t$  — номер поточного етапу навчання.

Класична мережа Fuzzy-ART має деякі недоліки, що роблять її непридатною для розв'язання задачі безеталонної діагностики.

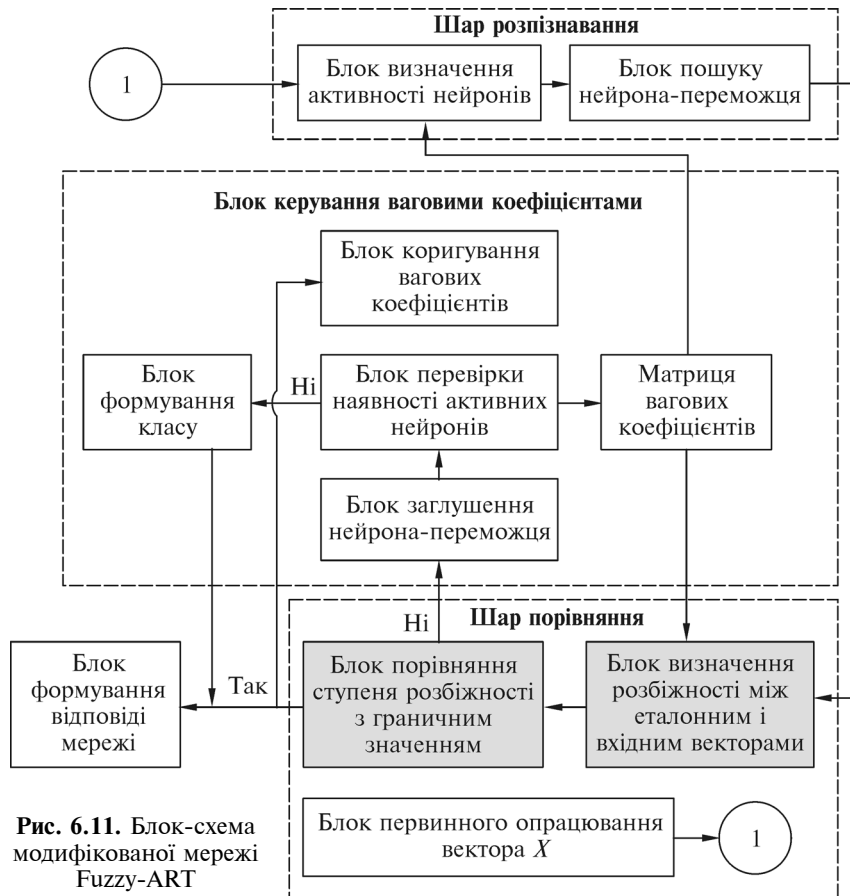


Рис. 6.11. Блок-схема модифікованої мережі Fuzzy-ART

Вирішити цю проблему можна заміною певних складових елементів мережі. На рис. 6.11 наведено блок-схему модифікованої мережі Fuzzy-ART, де виділено блоки, що були додані або змінені порівняно з класичною реалізацією мережі.

Класична архітектура даної мережі чутлива до порядку пред'явлення вхідних векторів під час роботи. Щоб усунути описаний недолік, запропоновано модифікацію класичної архітектури та алгоритму функціонування мережі Fuzzy-ART. Для цього додатково застосовується оператор нечіткого АБО  $\cup$ :

$$X \cup Y = \max(X, Y), \quad (6.22)$$



тобто за певного  $x_i \leq y_i$  виконуватиметься рівність

$$x_i \cup y_i = \max(x_i, y_i) = y_i. \quad (6.23)$$

У модифікованій мережі Fuzzy-ART у шарі порівняння на другій фазі обчислюється коефіцієнт чутливості:

$$\rho^* = \frac{|(X \cup W_k) - (X \cap W_k)|}{|X|}. \quad (6.24)$$

За виразом (6.24) визначається ступінь подібності вхідного вектора  $X$  та еталонного вектора  $W_k$  у базі даних нейронної мережі. При  $w_{k,i} = x_i$  (для всіх  $i = \overline{1, n}$ )  $\rho^* = 0$  і зростатиме пропорційно збільшенню відмінності між двома векторами. Елемент  $G_2$  активує сигнал заглушення, якщо не виконується умова  $\rho^* \leq 1 - \rho$ , де  $\rho$  — коефіцієнт чутливості класифікатора.

Викладений підхід надає Fuzzy-ART незалежність від порядку зображення вхідних векторів, і таку НМ можна використовувати для розв'язання поставлених задач безеталонної діагностики.

У табл. 6.3 наведено результати дослідження основних характеристик модифікованої нейронної мережі Fuzzy-ART.

У табл. 6.4 наведено результати порівняльного аналізу мережі ART-2 та Fuzzy-ART.

З табл. 6.4 бачимо, що класифікатори модифікованої мережі ART-2 і Fuzzy-ART забезпечують високу достовірність контролю, швидкість роботи, потребують достатньо малого обсягу фізичної пам'яті для зберігання, а також динамічно розширюють власну базу знань про можливі класи в процесі роботи (без зупинки процесу діагностики) і без повного перенавчання мережі, що фактично забезпечує можливість проведення безеталонної діагностики.

**Результати дослідження класифікаторів, побудованих на базі нейронних мереж сімейства ART.** Досліджено як класичні архітектури

Таблиця 6.3. Основні характеристики модифікованої нейронної мережі

Архітектура мережі	Показник				
	Час аналізу вибірки, мс	Обсяг пам'яті для зберігання мережі, кБ	Достовірність контролю при значенні коефіцієнта чутливості $\rho$		
			0,90	0,92	0,93
Fuzzy-ART	1530	115	0,99	1,00	0,98

Таблиця 6.4. Результати порівняльного аналізу деяких мереж

Показник	Тип нейронної мережі		
	ART-2	Fuzzy-ART	Гібридна мережа
Швидкість навчання, с	1,6	1,5	5,7
Достовірність контролю	0,98—0,99	0,98—0,99	0,96—0,98
Можливість визначити нові (аномальні) об'єкти	ТАК	ТАК	ТАК
Час класифікації вибірки, мс	1610	1530	2210
Обсяг пам'яті для зберігання мережі, кБ	203	115	219

мереж ART-2 і Fuzzy-ART, так і модифіковані архітектури, що були описані в попередніх параграфах. За діагностичні ознаки використано зміну форми інформаційного сигналу дефектоскопа, який реалізує метод низькошвидкісного удару. В результаті визначено оптимальний рівень коефіцієнта чутливості  $\rho$  для кожної з архітектур ART-мереж. Також для дослідження достовірності контролю зазначеними нейронними мережами були змодельовані реалізації інформаційних сигналів дефектоскопа, що відповідають пошкодженню

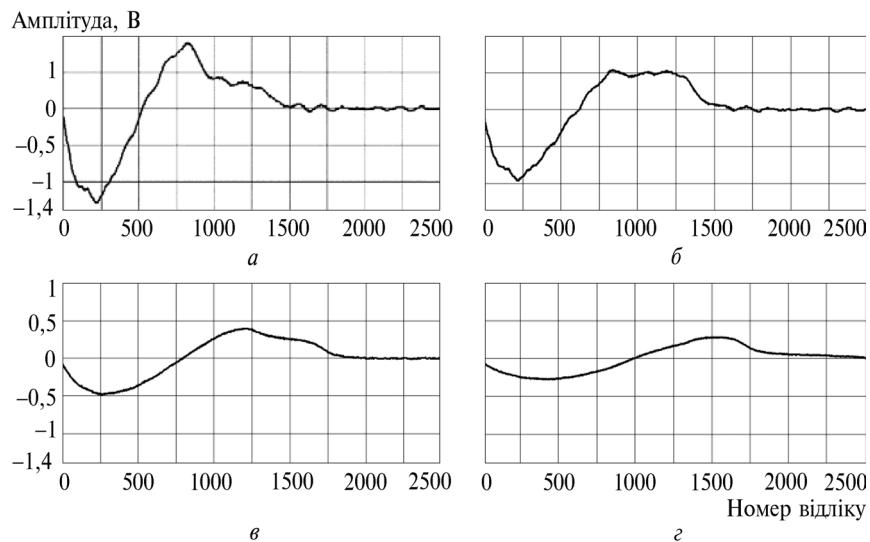


Рис. 6.12. Змодельовані інформаційні сигнали, що відповідають дефектам внаслідок пошкоджувального удару з енергією 0,81 кДж (а), 1,38 кДж (б), 3,08 кДж (в) і 4,21 кДж (з)

## 6.2. Нейромережеві технології у безеталонній дефектоскопії композитних матеріалів

ділянки зразка з енергією пошкоджувального удару 0,81 кДж, 1,38 кДж, 3,08 кДж, 4,21 кДж та 4,59 кДж. Моделювання зазначених сигналів здійснювалося із застосуванням методики, яку описано в п. 6.1. Змодельовані сигнали наведено на рис. 6.12.

Результати роботи розроблених ART-мереж наведено в табл. 6.5 і 6.6, де вказано кількість сигналів, віднесених до кожного класу під час діагностики стільникових панелей.

Також було досліджено залежність достовірності контролю стану стільникових панелей з використанням НМ ART-2 і Fuzzy-ART від коефіцієнта чутливості мережі  $\rho$ .

Як бачимо з табл. 6.5 і 6.6, за певних значень коефіцієнта чутливості  $\rho$  мережа створювала один спільний клас для декількох типів дефектів або навпаки для одного типу дефекту мережа створювала декілька класів. У таблицях ряскою (—) позначено ситуації, коли мережа не змогла класифікувати наведені сигнали

Таблиця 6.5. Коефіцієнт чутливості ART-2 мережі

Тип ділянки	Коефіцієнт чутливості мережі $\rho$					
	0,96	0,975	0,98	0,985	0,99	0,995
Без дефекту	100	100	100	100	100	86
						14
Дефект 1 (2,23 кДж)	200	100	100	100	100	100
Дефект 2 (2,81 кДж)		100	100	100	98	50
Дефект 3 (3,24 кДж)	100	100	100	100	2	50
					99	92
Дефект 4 (5,11 кДж)	100	100	100	100	100	100
Дефект 5 (0,81 кДж)	—	100	100	100	—	—
Дефект 6 (1,38 кДж)	—	100	100	100	—	—
Дефект 7 (3,08 кДж)	—	100	100	100	—	—
Дефект 8 (4,21 кДж)	—	99	96	74	—	—
			4	40		
Дефект 9 (4,59 кДж)	—	101	8	86	—	—
			92			

Таблиця 6.6. Коефіцієнт чутливості Fuzzy-ART мережі

Тип ділянки	Коефіцієнт чутливості мережі $\rho$				
	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94
Без дефекту	100	100	100	98	88
				2	10
					2
Дефект 1 (2,297 кДж)	200	100	100	100	100
Дефект 2 (2,812 кДж)		100	100	97	42
				3	58
Дефект 3 (3,240 кДж)	100	100	100	100	100
Дефект 4 (5,109 кДж)	100	100	100	100	100
Дефект 5 (0,804 кДж)	—	100	100	—	—
Дефект 6 (1,378 кДж)	—	100	100	—	—
Дефект 7 (3,082 кДж)	—	100	100	—	—
Дефект 8 (4,212 кДж)	—	75	92	—	—
		28	8		
Дефект 9 (4,586 кДж)	—	97	91	—	—
			9		

(наприклад, у табл. 6.5 для ділянок дефектів 5—9 при  $\rho = 0,96$  або  $\rho = 0,995$ ). Аналізуючи результати досліджень, можна зробити висновок, що для нейронної мережі ART-2 зі зміненою архітектурою необхідно вибирати значення коефіцієнта чутливості мережі в діапазоні  $0,975 \leq \rho \leq 0,986$ , а для модифікованої нейронної мережі Fuzzy-ART оптимальні значення коефіцієнта чутливості мережі знаходяться в діапазоні  $0,90 \leq \rho \leq 0,92$ .

Результати дослідження достовірності контролю  $D$  стільникових панелей у разі використання модифікованої мережі ART-2 наведено на рис. 6.13, а мережі Fuzzy-ART — на рис. 6.14. Достовірність контролю визначалась з урахуванням помилок першого  $\alpha$  і другого  $\beta$  роду.

Для дослідження чутливості та роздільної здатності класифікатора на базі нейронних мереж ART-2 і Fuzzy-ART в експери-



Рис. 6.13. Достовірність контролю з використанням класифікатора на базі мережі ART-2

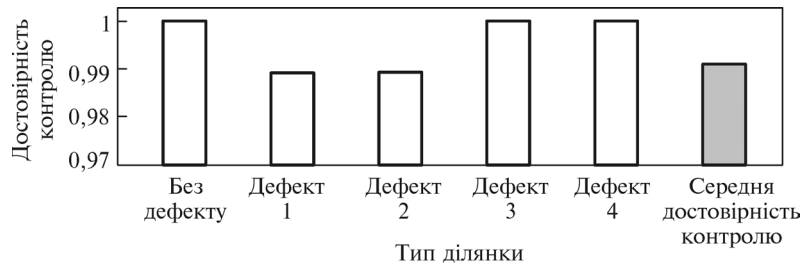
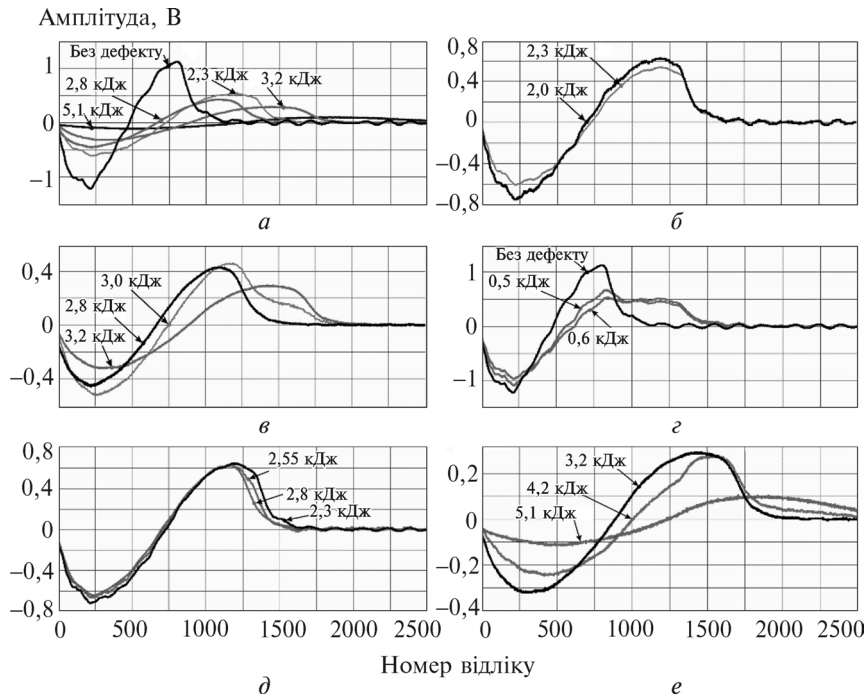


Рис. 6.14. Достовірність контролю з використанням класифікатора на базі мережі Fuzzy-ART

ментах застосовувалися синтезовані інформаційні сигнали. Було змодельовано по 100 реалізацій інформаційних сигналів, які відповідають пошкодженню ділянки зразка з енергією пошкоджувального удару 0,5 кДж; 0,6 кДж; 2,0 кДж; 2,5 кДж; 3,0 кДж та 4,2 кДж. Змодельовані сигнали наведено на рис. 6.15.

Для дослідження чутливості класифікатора на базі нейронних мереж ART-2 і Fuzzy-ART до дефектів у композиційних матеріалах (визначення мінімального рівня пошкодженості зразка, який може бути виявлено та класифіковано) використовувались інформаційні сигнали (рис. 6.15, *a—e*), які характерні для ділянок з різним ступенем пошкодженості.

Результати контролю наведено в табл. 6.7, в яку занесено кількість вірно класифікованих сигналів для кожного типу дефекту під час діагностики стільникових панелей. З отриманих результатів бачимо, що розроблений класифікатор дає змогу достовірно визначати дефекти, які відповідають пошкодженню, завданому ударом з енергією 0,5 кДж, а також розрізняє дефекти, що за-



**Рис. 6.15.** Реалізації інформаційних сигналів, які відповідають ділянкам з різним ступенем пошкодження, та синтезовані сигнали: *a* — 2,3 кДж, 2,8 кДж, 3,2 кДж, 5,1 кДж та без дефекту; *б* — 2,0 кДж та 2,3 кДж; *в* — 2,8 кДж, 3,0 кДж та 3,2 кДж; *з* — 0,5 кДж, 0,6 кДж та без дефекту; *д* — 2,3 кДж, 2,55 кДж та 2,8 кДж; *е* — 3,2 кДж, 4,2 кДж та 5,1 кДж

вдані з близькими значеннями енергії пошкоджувального удару (наприклад, 2,0 і 2,3 кДж; 2,3, 2,5 і 2,8 кДж; 2,8, 3,0 і 3,2 кДж; 3,2, 4,2 і 5,1 кДж). Мінімальний ступінь пошкодження зразків стільникових панелей, який можна достовірно визначати за допомогою розробленого класифікатора на базі нейронних мереж адаптивної резонансної теорії, відповідає дефекту, завданому з енергією пошкоджувального удару 0,6 кДж.

Для дослідження роздільної здатності класифікатора було вибрано п'ять основних ділянок досліджуваних зразків: без дефекту та ділянки з пошкодженням з енергією 2,23 кДж, 2,81 кДж, 3,24 кДж та 5,11 кДж. В експерименті визначали інтервали енергії пошкоджувального удару для кожної з наведених ділянок стільникової панелі, за яких сигнали будуть правильно класифіковані.

## 6.2. Нейромеревеві технології у безеталонній дефектоскопії композитних матеріалів

Таблиця 6.7. Результати дослідження достовірності контролю

Ділянка з пошкодженням, завданім ударом з енергією <i>A</i>										
(Без дефекту)	0,5 кДж	0,6 кДж	2,0 кДж	2,3 кДж	2,5 кДж	2,8 кДж	3,0 кДж	3,2 кДж	4,2 кДж	5,1 кДж
100	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Для розв'язання поставленої задачі здійснювали синтез інформаційних сигналів дефектоскопа, які відповідають ділянкам з пошкодженням, завданім ударом з енергією від 0 до 5,11 кДж з кроком 0,01 кДж. Далі отримані сигнали подавали на вхід класифікатора для визначення класу, до якого вони належать. Таким чином, було досліджено роздільну здатність класифікатора та визначено інтервали енергії пошкоджувального удару для зазначених ділянок стільникової панелі. Отримані за допомогою мереж ART-2 і Fuzzy-ART (F-ART) межі класів наведено в табл. 6.8.

Таблиця 6.8. Інтервали енергії пошкоджувального удару

Тип мережі	Тип ділянки									
	Без дефекту		Дефект 1 (2,30 кДж)		Дефект 2 (2,81 кДж)		Дефект 3 (3,24 кДж)		Дефект 4 (5,11 кДж)	
	від, кДж	до, кДж	від, кДж	до, кДж	від, кДж	до, кДж	від, кДж	до, кДж	від, кДж	до, кДж
F-ART	0	0,54	2,09	2,55	2,56	2,95	3,17	3,834	4,96	5,11
ART-2	0	0,53	2,05	2,56	2,57	2,94	3,19	3,95	4,98	5,11

Із викладених результатів досліджень бачимо, що розроблені класифікатори на базі нейронних мереж ART-2 та Fuzzy-ART зі зміненою архітектурою мають високі показники достовірності діагностики і можуть автоматично розширювати власну базу знань про можливі дефекти досліджуваних об'єктів, а також характеризуються достовірністю діагностування 97—99 %.

Результати дослідження нейромеревевих класифікаторів для безеталонної діагностики також наведено в працях [24, 123, 135].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.* Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Сов. радио, 1968. 440 с.
2. *Бабак В.П., Хандецкий В.С., Шрюфер Е.* Обробка сигналів: Підручник. К.: Либідь, 1999. 496 с.
3. *Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є.* Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручник. К.: Техніка, 2004. 288 с.
4. *Бабак В.П.* Теоретичні основи захисту інформації: Підручник. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2008. 752 с.
5. *Бабак С.В., Мыслович М.В., Сысак Р.М.* Статистическая диагностика электротехнического оборудования. К.: Ин-т электродинамики НАН Украины, 2015. 456 с.
6. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 540 с.
7. *Берка К.* Измерения. Понятия, теории, проблемы: пер. с чеш. М.: Прогресс, 1987. 320 с.
8. *Близинок Е.Д., Еременко В.С., Быстрая И.Н. и др.* Фазовый обнаружитель сигналов для ультразвукового неразрушающего контроля. *Техническая диагностика и неразрушающий контроль*. 2011. № 2. С. 21–24.
9. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1965. 482 с.
10. *Браун С., Датнер В.* Анализ вибраций роликовых и шариковых подшипников. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия «Конструирование и технология машиностроения». 1979. Т. 101, № 1. С. 65–72.
11. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли: Теория и приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 175 с.
12. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. Физматлит, 1986. 544 с.
13. *Вибрация энергетических машин: Справочное пособие.* Под ред. Н.В. Григорьева. Л.: Машиностроение, 1974. 464 с.
14. *Волков Л.К., Ковалев Р.Н., Никифорова Г.И. и др.* Вибрация и шум электрических машин малой мощности. Л.: Энергия, 1979. 205 с.
15. *Герцик С.М., Мыслович М.В.* Моделі формування навчальних сукупностей для діагностування електротехнічного обладнання з урахуванням режимів його роботи. *Метрологія та прилади*. 2017, № 5. С. 94–97.
16. *Гижко Ю.І., Мыслович М.В.* Елементи теорії та питання практичного застосування систем вібродіагностування рухомих частин електричних машин. *Технічна електродинаміка*. 2015. № 2. С. 45–56.



17. *Гужов В.И., Ильиных С.* Компьютерная интерферометрия. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 252 с.
18. *Гуляев В.А.* Вычислительная диагностика. К.: Наукова думка, 1992. 232 с.
19. *Дайер В., Стюарт Р.* Обнаружение повреждения подшипника качества путем статистического анализа вибраций. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия «Конструирование и технология машиностроения». 1978. Т. 100, № 2. С. 23—31.
20. *Денисов В.П., Дубинин Д.* Фазовые радиопеленгаторы. Томск: ТГУСУР, 2002. 251 с.
21. *Директор С., Рорер Р.* Введение в теорию систем. Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 464 с.
22. *Дорожовець М., Мотало В., Стадник Б. та ін.* Основи метрології та виміральної техніки: Підручник. за ред. Б. Стадника. Т. 2. Вимірвальна техніка. Львів: Вид-во Національного ун-ту «Львівська політехніка», 2005. 656 с.
23. *Драган Я.П.* Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів. Львів: ЦСДЕС, 1997. 333 с.
24. *Еременко В.С., Переєденко А.В., Куц Ю.В.* Применение нейронных сетей для повышения достоверности неразрушающего контроля изделий из композиционных материалов. *Научни известия.* София, Болгария. 2013. № 2 (139). С. 62—67.
25. *Еременко В.С., Мокийчук В.М., Овсянкин А.М.* Обнаружение ударных повреждений сотовых панелей методом низкоскоростного удара. *Техническая диагностика и неразрушающий контроль.* 2007. № 1. С. 24—27.
26. *Ермолин Н.П., Жерихин И.П.* Надежность электрических машин. Л.: Энергия, 1976. 248 с.
27. *Еременко В.С., Переїденко А.В., Монченко О.В.* Застосування нейромережових технологій у системах неруйнівного контролю. *Техническая диагностика и неразрушающий контроль.* 2012. № 1. С. 35—41.
28. *Еременко В.С., Переїденко А.В., Піколенко Є.О.* Ранжування інформативних ознак при неруйнівному контролі композиційних матеріалів. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». 2010, № 57. С. 159—164.
29. Информационно-измерительные системы. Применение интеллектуальных модулей, методов и средств повышения точности физических измерений / А.А. Зори, С.И. Клевцов, В.Д. Коренев и др. Донецк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2011. 206 с.
30. Інформаційне забезпечення моніторингу об'єктів теплоенергетики: Монографія / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Берегун та ін. За ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака. К., 2015. 512 с.
31. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений: Пер. с англ. Под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Наука, 1966. 588 с.
32. *Кинкулькин И.Е., Рубцов В., Фабрик М.* Фазовый метод определения координат. М.: Сов. радио, 1979. 280 с.
33. *Колмогоров А.Н., Фомин С.Ф.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. 544 с.
34. *Крамер Г.* Математические методы статистики: Пер. с англ. Под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Мир, 1975. 648 с.

35. Краснобаев В.А., Маврина М., Кошман С., Курчанов В. Концепция создания компьютерных средств обработки данных на основе использования кодов класса вычетов. *Системы обработки информации*. 2013. № 4 (111). С. 133—138.
36. Кузьмин И.В., Кедрус В.А. Основы теории информации и кодирования: Учебник. К.: Вища школа, 1986. 238 с.
37. Куйбышев А.Б. Надежность асинхронных электродвигателей общепромышленного применения. М.: Изд-во стандартов, 1972. 104 с.
38. Кулаков Ю.О., Куц В.Ю. Використання вибіркової колової медіани як інформативної характеристики в статистичній обробці кутових даних. *Електроніка та системи управління*. 2007. № 3 (13). С. 30—36.
39. Куликовский К.Л., Купер В.Я. Методы и средства измерений. М.: Энергоатомиздат, 1986. 448 с.
40. Кухарчук В.В., Кучерук В.Ю., Володарський Є.Т., Грабко В.В. Основы метрологии та електричних вимірювань: Підручник. Херсон: Олді-плюс, 2013. 538 с.
41. Куштин И.Ф., Куштин В.И. Инженерная геодезия. Ростов-на-Дону: Изд-во Феникс, 2002. 416 с.
42. Куц В.Ю. Аналіз застосування кругової медіанної фільтрації в задачах обробки сигналів. К.: Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Е. Пухова, 2007. Вип. 39. С. 50—56.
43. Куц Ю.В. Вимірювання кумулятивних фазових зсувів. *Технічна електродинаміка*. 2001. № 5. С. 67—72.
44. Куц Ю.В., Шенгур С.В., Мельник О.С. Дослідження методу вибіркового тригонометричних моментів в задачах апроксимації розподілів кутових даних. *Системи обробки інформації*. 2015. № 6 (131). С. 111—115.
45. Куц Ю.В., Куц В.Ю. Застосування модулярної арифметики для обчислення азимута у фазових пеленгаторах. Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка, Радіоапаратобудування. 2016. № 64. С. 23—32.
46. Куц Ю.В., Купрійчук І.А., Рижкова А.А. Застосування методу тригонометричних моментів в аналізі даних фазових вимірювань. *Системи обробки інформації*. 2013. № 6 (113). С. 98—102.
47. Куц Ю.В., Куц Н.Є. Применение выборочных характеристик расположения и рассеяния в фазометрии. *Электронное моделирование*. 2004. Т. 26, № 2. С. 89—97.
48. Куц Ю.В., Шенгур С.В. Подання результату кутових вимірювань в концепції невизначеності. *Системи обробки інформації*. 2013. Вип. 3 (110). С. 97—100.
49. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Статистична фазометрія. Тернопіль: Тернопільський державний ун-т ім. І. Пулюя, 2009. 383 с.
50. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. М.: Сов. радио, 1969. 752 с.
51. Лосев А.Ф. История античной эстетики. Аристотель и поздняя классика. Харьков: Фолио, 2000. 880 с.
52. Лозэ М. Теория вероятностей: Пер. с англ. М.: ИЛ, 1962. 719 с.
53. Маевский С.М., Баженов В.Г., Батуревич Е.К. и др. Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояний. К.: Вища

школа, 1983. 83 с.

54. *Маєвський С.М., Бабак В.П., Щербак Л.М.* Основи побудови систем аналізу сигналів у неруйнівному контролі: Навч. посібник. К.: Либідь, 1993. 200 с.

55. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2 т. Пер. с франц. М.: Мир, 1983. Т. 2. 256 с.

56. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры изд-ва «Наука», 1979. 240 с.

57. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

58. *Марченко Б.Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. К.: Наукова думка, 1973. 192 с.

59. *Марченко Б.Г., Мыслович М.В.* Вибродіагностика подшипниковых узлов электрических машин. К.: Наукова думка, 1992. 196 с.

60. *Марченко Б.Г., Щербак Л.Н.* Линейные случайные процессы и их приложения. К.: Наукова думка, 1975. 144 с.

61. *Марченко В.Б.* Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. К.: Наукова думка, 1992. 210 с.

62. *Марченко Б.Г., Щербак Л.М.* Основи теорії вимірювань. К.: ІЕД НАНУ, 1999. С. 221—230.

63. *Марченко Б.Г., Щербак Л.М.* Сучасна концепція побудови теорії вимірювань. Доповіді Національної академії наук України. 1999. № 10. С. 85—88.

64. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1980. 1184 с.

65. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1979. 1104 с.

66. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1982. 1184 с.

67. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 4. М.: Сов. энциклопедия, 1984. 1216 с.

68. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 5. М.: Сов. энциклопедия, 1984. 1248 с.

69. *Мыслович М.В., Сисак Р.М.* Про деякі особливості побудови інтелектуальних багаторівневих систем технічної діагностики електроенергетичних об'єктів. *Технічна електродинаміка*. 2015, № 1. С. 78—85.

70. *Митропольский А.К.* Техника статистических вычислений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1961. 480 с.

71. *Михеечев В.В.* Геодезические светодальномеры. М.: Недра, 1979. 222 с.

72. Надежность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. Т. 9. Техническая диагностика. Под ред. В.В. Клюева, П.П. Пархоменко. М.: Машиностроение, 1987. 352 с.

73. *Новопашенный Г.Н.* Информационно-измерительные системы: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1977. 208 с.

74. *Орнатский П.П.* Теоретические основы информационно-измерительной техники: Учебник. К.: Вища школа, 1983. 455 с.

75. Основи метрології та вимірювальної техніки: Підручник у 2 т. / М. Дорожовець, В. Мотало, Б. Стадник, В. Василюк, Р. Борек, А. Ковальчик. Львів: Вид-во Національного ун-ту «Львівська політехніка», 2005. 1300 с.

76. *Переїденко А.В., Єременко В.С.* Дослідження алгоритмів проведення кластерного аналізу для вирішення задач неруйнівного контролю. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2010. № 1/5 (43). С. 40—43.
77. *Переїденко А.В., Єременко В.С., Шегедін П.А.* Класифікатор стану виробів з композиційних матеріалів на основі нейронної мережі адаптивної резонансної теорії. *Вісник Національного авіаційного університету*. 2012. № 1 (50). С. 92—100.
78. *Переїденко А.В., Єременко В.С., Шегедін П.А.* Моделювання інформаційних сигналів при вирішенні задач безеталонної діагностики композиційних матеріалів. *Наукоємні технології*. 2011. № 3-4 (11-12). С. 39—44.
79. *Переїденко А.В., Єременко В.С.* Формування навчальної вибірки інформаційних сигналів під час неруйнівного контролю виробів з композиційних матеріалів. *Відбір і обробка інформації*. 2011. Вип. 35 (111). С. 47—54.
80. *Пестряков В.Б.* Фазовые радиотехнические системы (основы статистической теории). М.: Сов. радио, 1968. 466 с.
81. *Поліщук Є.С., Дорожовець М.М., Стадник Б.І. та ін.* Засоби та методи вимірювань неелектричних величин: Підручник. За ред. Є.С. Поліщука. Львів: Вид-во Бескид Біт, 2012. 618 с.
82. *Пфанцаль І.* Теория измерения: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 245 с.
83. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.
84. *Раннев Г.Г.* Измерительные информационные системы: Учебное пособие. М.: Академия, 2010. 336 с.
85. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985. 320 с.
86. *Рубичев Н.А.* Измерительные информационные системы: Учебное пособие. М.: Дрофа, 2010. 334 с.
87. *Рытов С.М., Крайцов В.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
88. *Справочник по электрическим машинам в 2 т.* Под ред. И.П. Копылова, Б.К. Клокова. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1988. 456 с.
89. *Статистичний аналіз даних вимірювань.* Навч. посібник / В.С. Єременко, Ю.В. Куц, В.М. Мокійчук та ін. К.: НАУ, 2015. 321 с.
90. *Стогній Б.С., Кириленко О.В., Денисюк С.П.* Інтелектуальні електричні мережі електроенергетичних систем та їх технологічне забезпечення. *Технічна електродинаміка*. 2010. № 6. С. 44—50.
91. *Суптес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений: Пер. с англ. Сборник «Психологические измерения». М.: Мир, 1962. 110 с.
92. *Счастливы Г.Г., Титко А.И., Федоренко Г.М., Коваленко В.П.* Надежность турбогенераторов современных и перспективных. К.: Наукова думка, 1978. 223 с.
93. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 272 с.
94. *Темников Ф.Е., Афонин В.А., Дмитриев В.И.* Теоретические основы информационной техники: Учебное пособие. М.: Энергия, 1979. 512 с.
95. *Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем:* Підручник / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єременко та ін. За ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака. К.: Ун-т новітніх технологій, НАУ, 2017. 496 с.

96. Технические средства диагностирования: Справочник. Под общ. ред. В.В. Ключева. М.: Машиностроение, 1989. 672 с.
97. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
98. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. М.: Мир, 1992. 118 с.
99. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров, Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. М.: Сов. энциклопедия, 1984. 944 с.
100. *Философский* словарь. Под ред. И.Т. Фролова. М.: Политиздат, 1981. 445 с.
101. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, Гл. ред физ.-мат. лит., 1969. Т. 1. 607 с.
102. Філософія: Навч. посібник / Л.В. Губерський, І.Ф. Надольний, В.П. Андрущенко та ін. За ред. І.Ф. Надольного. К.: Вікар, 2006. 534 с.
103. Фрагменты ранних греческих философов: В 2 ч. Сост. А.В. Лебедев. М.: Наука, 1989. Ч. 1. 576 с.
104. Халмош П. Теория меры: Пер. с англ. М.: Мир, 1953. 289 с.
105. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах: Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 396 с.
106. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование: Учебное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1985. 440 с.
107. Чинцов В.М. Основи метрології та вимірювальної техніки: Навч. посібник. Харків, НТУ «ХПІ», 2005. 524 с.
108. Чмых М.К. Цифровая фазометрия. М.: Радио и связь, 1993. 184 с.
109. Шубов И.Г. Шум и вибрация электрических машин. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 208 с.
110. Щербак Л.Н. К вопросу аксиом теории измерений. *Метрологія та прилади*. 2014. № 1 (45). С. 262—265.
111. Щербак Л.М. Функція невизначеності й міри в задачах вимірювань. *Метрологія та прилади*. 2017. № 5-І (67), С.115—118.
112. Щербак Л.М. Шумометрія як напрям вимірювань характеристик стохастичних сигналів. Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. К.: ІПМЕ НАНУ, 2017. Вип. 78. С. 101—107.
113. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 279 с.
114. Antoni J., Bonnardot F., Raad A., Badaoui El. Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals. *Mechanical systems and signal processing*. 2004. Vol. 18. P. 1285—1314.
115. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mechanical systems and signal processing*. 2009. Vol. 23. P. 987—1036.
116. Applied Measurement System / Ed. by Md. Zachurul Had. In Tech, USA, 2012.
117. Babak V.P., Sineglazov V.M., Taranov S.G. Self-adapting information system. К.: NAU, 2007. 152 p.
118. Belkhamza Z., Wafa A. Measuring Organizational Information Systems Success: New Technologies and Practices. Universiti Malaysia Sabah, Malaysia, 2012.

119. Carpenter G.A., Grossberg S. A massively parallel architecture for a self-organizing neural pattern recognition machine. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. 1987. N 37. P. 54—115.
120. Carpenter G.A., Grossberg S., Rosen D.B. ART 2-A: An adaptive resonance algorithm for rapid category learning and recognition. *Neural Networks*. 1991. N 4. P. 493—504.
121. Carpenter G.A., Grossberg S., Rosen D.B. Fuzzy ART: Fast stable learning and categorization of analog patterns by an adaptive resonance system. *Neural Networks*. 1991. N 4. P. 759—771.
122. Derhunov O., Kuts Y., Shengur S., Monchenko O., Oliinyk Y. Improvement of ultrasonic testing method for materials with significant attenuation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 1/9 (91). 2018. P. 54—610.
123. Eremenko V.S., Suslov E.F., Pereidenko A.V. Neural Network Based System for Nondestructive Testing of Composite Materials Using Low-Frequency Acoustic Methods. *Universal Journal of Engineering Science*. Alhambra, USA, 2013. N 1 (3). P. 95—109.
124. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement: First Edition. ISO, Switzerland. 1993. 112 p.
125. Fisher N.I. *Statistical Analysis of Circular Data*. Cambridge University Press, 2000. 277 p.
126. Freeman J.A., Skapura D.M. *Neural networks. Algorithms, applications, and programming techniques*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1991. 401 p.
127. Herold R., Robers M. *Encyclopedia of Information Assurance*. Indiana, USA, 2010.
128. Hertz J., Krogh A., Palmer R.G. *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1991. 327 p.
129. Information Provision of Diagnostic Systems for Energy Facilities / V.P. Babak, S.V. Babak, M.V. Myslovych, A.O. Zaporozhets, V.M. Zvarych. Ed. by Corresponding Member of the NAS of Ukraine V.P. Babak. Kyiv: Akadem-periodyka, 2018. 132 p.
130. Kalsi H.S. *Electronic instrumentation*. Third ed. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education, 2012. 829 p.
131. Konkar P.K., Harsha S.P., Kumar P., Sharmal S.C. Fault Diagnosis of a rotor bearing systems using response surface method. *European Journal of Mechanics. A. Solids*. 2009. Vol. 28. P. 841—857.
132. Napolitano A. Cyclostationarity: New trends and applications. *Signal Processing*. 2016. Vol. 120. P. 385—408.
133. Nataraj C., Harsha S.P. The effect of bearing cage run-out on the non-linear dynamics of arotating shaft. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*. 2008. Vol. 13. P. 822—838.
134. Omondi A., Premkumar B. *Residue Number Systems. Theory and Implementation*. London, Imperial College Press, 2007. 296 p.
135. Pereidenko A.V., Eremenko V.S. Software of Information-Measurement System for Standardless Diagnostic of Composite Materials. *Software Engineering*. Rosemead, USA, 2012. Vol. 2, N 3. P. 65—76.
136. Wiener N. A new theory of measurement: a study in the logic of mathematics. *Proc. London Math. Soc.* 1921. Vol. 19. P. 181—205.

# ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА .....	3
<b>Р о з д і л 1. ПРОБЛЕМАТИКА ВИМІРЮВАНЬ .....</b>	<b>5</b>
1.1. Загальні положення .....	5
1.2. Математична модель невизначеності вимірювання .....	11
1.3. Міри, їх властивості та використання у вимірюваннях .....	14
1.4. Концепція узгодження фізичних та ймовірнісних мір у вимірюваннях .....	25
1.5. Вимірювання як обернена задача теорії сигналів і систем .....	31
<b>Р о з д і л 2. МОДЕЛІ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ ТА ПОЛІВ .....</b>	<b>39</b>
2.1. Математичні моделі сигналів та їх класифікація .....	39
2.2. Сигнали та ортогональні базиси .....	49
2.3. Моделі випадкових сигналів .....	53
2.4. Моделі багатовимірних сигналів та полів .....	60
<b>Р о з д і л 3. МОДЕЛІ ТА МІРИ У ВИМІРЮВАННЯХ ВИПАДКОВИХ КУТОВИХ ВЕЛИЧИН .....</b>	<b>66</b>
3.1. Моделі детермінованих і випадкових кутів у вимірюваннях .....	66
3.2. Детерміновані та ймовірнісні міри кутових величин .....	76
3.3. Числові характеристики випадкових кутів .....	84
3.4. Моделі та міри випадкових кутів у фазових вимірюваннях .....	96
<b>Р о з д і л 4. МОДЕЛІ ТА МІРИ ПРИ ДІАГНОСТУВАННІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ .....</b>	<b>107</b>
4.1. Фізичні процеси формування діагностичних сигналів .....	107
4.2. Моделі формування навчальних сукупностей (мір) для діагностування електроенергетичного обладнання .....	112
4.3. Побудова діагностичних просторів за результатами вимірювання інформаційних сигналів .....	118
4.4. Правила визначення технічного стану об'єктів електроенергетики ....	129
<b>Р о з д і л 5. ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ І МІР НА КОЛІ .....</b>	<b>135</b>
5.1. Фазові системи ультразвукової луна-імпульсної товщинометрії .....	136
5.2. Багатошкальні фазові вимірювання на основі числових систем залишкових класів .....	145
5.3. Статистичне опрацювання даних у системах моніторингу параметрів довкілля на базі безпілотних авіаційних комплексів .....	159
<b>Р о з д і л 6. МОДЕЛІ І МІРИ ДЛЯ БЕЗЕТАЛОННИХ ВИМІРЮВАНЬ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ .....</b>	<b>165</b>
6.1. Метод побудови віртуальних мір для інформаційних сигналів .....	166
6.2. Нейромережеві технології у безеталонній дефектоскопії композитних матеріалів .....	179
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	200

*Наукове видання*

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ТЕХНІЧНОЇ ТЕПЛОФІЗИКИ

БАБАК Віталій Павлович  
ЄРЕМЕНКО Володимир Станіславович  
КУЦЮК Юрій Васильович  
МИСЛОВИЧ Михайло Володимирович  
ЩЕРБАК Леонід Миколайович

**МОДЕЛІ ТА МІРИ  
У ВИМІРЮВАННЯХ**

За редакцією члена-кореспондента НАН України  
В. П. Б а б а к а

Київ, Науково-виробниче підприємство  
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2019

Художнє оформлення *Ю.В. Ніколаєнко*  
Художній редактор *І.П. Савицька*  
Технічний редактор *Т.С. Березяк*  
Коректор *В.М. Ткаченко*  
Оператор *В.Г. Каменькович*  
Комп'ютерна верстка *Л.В. Багненко*

Підп. до друку 18.07.2019. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1.  
Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 13,0. Ум. фарбо-відб. 13,5.  
Обл.-вид. арк. 12,5. Тираж 150 прим. Зам. № ДФ-946

Оригінал-макет виготовлено  
у НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.  
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ПП «Видавництво “Фенікс”»  
03680 Київ 680, вул. Шутова, 13б  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
серія ДК № 271 від 07.12.2000 р.